A március 16.-i gyakorlat feladatai

Először felidézek néhány fontos eredményt (diszkrét eloszlású) valószínűségi változók illetve ilyen valószínűségi változók összegének a várható értékéről és szórásnégyzetéről.

Valószínűségi változó fogalma: *Legyen adva egy* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *valószínűségi mező. Egy ezen a téren értelmezett valós értékű (mérhető)* $\xi(\omega)$ *függvényt valószínűségi változónak fogunk nevezni. Azaz* ξ *az* $\Omega \to R^1$ *leképezés. Az a megkötés, hogy a függvény legyen mérhető azt jelenti, hogy minden* x *valós számra az* $\{\omega\colon \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{A}$ *feltétel teljesül.*

Időnként hasznos nemcsak valós értékű valószínűségi változóról beszélni, hanem kissé általánosabban olyan valószínűségi változókat definiálni, amelyek értékeiket egy általános téren veszik fel. (Például bizonyos esetekben érdemes olyan valószínűségi változókat tekinteni, amelyek értéke komplex szám, vagy nem egyetlen szám, hanem egy szám-n-es. Az ilyen valószínűségi változókat vektor értékűnek szokták hívni.) Annak érdekében, hogy ezt megtehessük tekintsünk valamilyen X *halmazt, és e halmaz kitüntetett részhalmazainak* $\mathcal{X}$ *osztályát, amelyek* σ*-algebrát alkotnak. Egy az* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *valószínűségi mezőn definiált* X *térbeli értékeket felvevő (mérhető) függvényt* X*-tér értékű valószínűségi változónak nevezünk. Az, hogy ez a függvény mérhető azt jelenti, hogy minden* $Y \in \mathcal{X}$ *halmazra az* $\{\omega\colon \xi(\omega) \in Y\} \in \mathcal{A}$ *feltétel teljesül.*

Diszkrét eloszláú valószínűségi változók és azok eloszlása. *Egy* ξ *valószínűségi változót egy* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *valószínűségi mezőn diszkrétnek vagy diszkrét eloszlásúnak hívunk, ha megadható egy véges vagy megszámlálhatóan végtelen számosságú* $x_1, x_2, \cdots,$ *halmaz úgy, hogy az* $\{\omega, \xi(\omega) = x_n\}$, $n = 1, 2, \dots,$ *halmazok teljes eseményrendszert alkotnak. Egy diszkrét eloszlású valószínűségi változó eloszlását meghatározzák azok az* $x_1, x_2, \dots,$ *értékek amelyeket az felvesz és a* $p_n = P(\xi = x_n)$ *valószínűségek. (Jegyezzük meg, hogy* $\sum\limits_n P(\xi = x_n) = 1$.*)*

Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_k$ *diszkrét eloszlású valószínűségi változók ugyanazon az* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *valószínűségi mezőn, amelyek valamilyen* $x_1, x_2, \dots$ *értékeket vesznek fel. Ezek együttes eloszlását meghatározzák a* $P(\xi_1 = x_{j_1}, \xi_2 = x_{j_2}, \dots, \xi_k = x_{j_k})$, $j_s = 1, 2, \dots,$ $1 \le s \le k$, *valószínűségek.*

Diszkrét eloszlású valószínűségi változók függetlensége. *Legyenek* $\xi_1, \dots, \xi_k$ *diszkrét eloszlású valószínűségi változók ugyanazon az* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *valószínűségi mezőn, amelyek valamilyen* $x_1, x_2, \dots$ *értékeket vesznek fel. Azt mondjuk, hogy ezek az* ξ_1, ξ_2, $\dots$, ξ_k *valószínűségi változók függetlenek, ha*

$$P\left(\xi_1 = x_{j_1}, \xi_2 = x_{j_2}, \dots, \xi_k = x_{j_k}\right) = P\left(\xi_1 = x_{j_1}\right) P\left(\xi_2 = x_{j_2}\right) \cdots P\left(\xi_k = x_{j_k}\right)$$

minden $j_s = 1, 2, \dots,$ $1 \le s \le k$, *indexre.*

Diszkrét eloszlású valószínűségi változó várható értéke. *Legyen* ξ *diszkrét eloszlású valószínűségi változó, amely* $x_1, x_2, \dots$ *értékeket vesz fel* $p_k = P(\xi = x_k)$ *valószínűséggel,* $k = 1, 2, \dots,$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(\xi = x_k) = 1$. *A* ξ *valószínűségi változó várható értéke az*

$$E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k P(\xi = x_k)$$

összeg, feltéve hogy ez az összeg abszolut konvergens. Ha ez az összeg nem abszolut konvergens, akkor nem definiáljuk az $E\xi$ várható értéket.

Tétel. *Legyenek ξ_1, ξ_2 (diszkrét eloszlású) valószínűségi változók, amelyeknek létezik várható értékük. Ekkor a $\xi_1 + \xi_2$ összegnek is létezik várható értéke, és*

$$E(\xi_1 + \xi_2) = E\xi_1 + E\xi_2.$$

Következmény. *Legyenek adva $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ (diszkrét eloszlású) valószínűségi változók, amelyeknek létezik várható értékük, és legyenek $c_1, \ldots, c_k$ valós számok. Ekkor a $c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_k\xi_k$ valószínűségi változónak is létezik várható értéke, és*

$$E\left(c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_k\xi_k\right) = c_1 E\xi_1 + c_2 E\xi_2 + \cdots + c_k E\xi_k.$$

Tétel. *Legyen ξ diszkrét eloszlású valószínűségi változó, amely bizonyos $x_1, x_2, \ldots$ értéket vesz fel és $g(x)$ valós függvény. Ekkor*

$$Eg(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} g(x_j) P(\xi = x_j),$$

feltéve, hogy a $\sum\limits_{j=1}^{\infty} g(x_j) P(\xi = x_j)$ összeg abszolut konvergens.

Tétel. *Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ független, diszkrét eloszlású valószínűségi változók, amelyek mindegyikére létezik az $E\xi_j$, $1 \le j \le n$ várható érték. Ekkor az $E\xi_1\xi_2\cdots\xi_n$ várható érték is létezik, és*

$$E\xi_1\xi_2\cdots\xi_n = E\xi_1 E\xi_2 \cdots E\xi_n.$$

A szórásnégyzet definiciója: *Legyen ξ olyan valószínűségi változó, amelyre $E\xi^2 < \infty$. Ekkor a ξ valószínűségi változó szórásnégyzetét a*

$$\operatorname{Var}\xi = E\left(\xi - E\xi\right)^2$$

képlet definiálja. Ha $E\xi^2 = \infty$ akkor a $\operatorname{Var}\xi$ szórásnégyzetet nem definiáljuk vagy azt mondjuk, hogy $\operatorname{Var}\xi = \infty$.

Lemma.

$$\operatorname{Var}\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2.$$

Lemma. *Minden a és b valós számra*

$$\operatorname{Var}(a\xi + b) = a^2 \operatorname{Var}\xi.$$

Tétel. Ha $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *független valószínűségi változók, akkor*

$$\mathrm{Var}\,(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n) = \mathrm{Var}\,\xi_1 + \mathrm{Var}\,\xi_2 + \cdots + \mathrm{Var}\,\xi_n.$$

A kovarianciafüggvény definiciója. *Legyen* ξ *és* η *két valószínűségi változó, amelyek mindegyikének létezik szórásnégyzete, azaz* $E\xi^2 < \infty$ *és* $E\eta^2 < \infty$*. Ekkor a* ξ *és* η *kovariancifüggvényét* $\mathrm{Cov}\,(\xi, \eta)$*-t a*

$$\mathrm{Cov}\,(\xi, \eta) = E\left[(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)\right]$$

kifejezés definiálja. Ha a $E\xi^2 < \infty$ *és* $E\eta^2 < \infty$ *feltételek valamelyike nem teljesül, akkor nem definiáljuk a* $\mathrm{Cov}\,(\xi, \eta)$ *kovariancifüggvényt.*

Lemma.

$$\mathrm{Cov}\,(\xi, \eta) = E\xi\eta - E\xi E\eta.$$

Tétel. *Ha* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *valószínűségi változók ugyanazon a valószínűségi mezőn, amelyek mindegyikének létezik szórásnégyzete, akkor*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left(\sum_{j=1}^n \xi_j\right) &= \sum_{j=1}^n \mathrm{Var}\,\xi_j + 2 \sum_{1 \le j < k \le n} (E\xi_j\xi_k - E\xi_j E\xi_k) \\
&= \sum_{j=1}^n \mathrm{Var}\,\xi_j + 2 \sum_{1 \le j < k \le n} (\mathrm{Cov}\,(\xi_j, \xi_k) \\
&= \sum_{j=1}^n \mathrm{Var}\,\xi_j + \sum_{1 \le j, k \le n,\ j \ne k} (\mathrm{Cov}\,(\xi_j, \xi_k).
\end{aligned}$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left(\sum_{j=1}^n \xi_j\right) &= E\left(\sum_{j=1}^n \xi_j\right)^2 - \left(E\sum_{j=1}^n \xi_j\right)^2 = E\left(\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \xi_j\xi_k\right) - \left(\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n E\xi_j E\xi_k\right) \\
&= \left(\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n E\xi_j\xi_k\right) - \left(\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n E\xi_j E\xi_k\right) \\
&= \sum_{j=1}^n \left(E\xi_j^2 - (E\xi_j)^2\right) + 2 \sum_{1 \le j < k \le n} (E\xi_j\xi_k - E\xi_j E\xi_k).
\end{aligned}$$

és $E\xi_j^2 - (E\xi_j)^2 = \mathrm{Var}\,\xi_j$, $E\xi_j\xi_k - E\xi_j E\xi_k = \mathrm{Cov}\,(\xi_j, \xi_k)$.

1. Egy szabályos pénzdarabot feldobunk 100-szor egymás után. Számoljuk ki a fejdobások számának a várható értékét és szórásnégyzetét. Számítsuk ki ezt egyrészt direkt módon felírva és kiszámolva a várható értéket és szórásnégyzetet kifejező összeget másrészt egyszerűbben a független valószínűségi változók szórásnégyzetét kifejező képlet segítségével.

   Megoldás: A fejdobások száma 0 és 100 között van. Annak valószínűsége, hogy k fejdobás következik be, $0 \le k \le 100$, $p_k = \binom{100}{k} 2^{-100}$. Ezért a dobások számának várható értéke $E\xi = \sum\limits_{k=0}^{100} k \binom{100}{k} 2^{-100}$, ahol ξ jelöli a fejdobások számát megadó valószínűségi változót. Továbbá $E\xi^2 = \sum\limits_{k=0}^{100} k^2 \binom{100}{k} 2^{-100}$, a szórásnégyzet pedig $\mathrm{Var}\,\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$. Ezeket az összegeket közvetlenül kiszámíthatjuk. Valóban, $k\binom{100}{k} = 100\binom{99}{k-1}$, $E\xi = \sum\limits_{k=0}^{100} k\binom{100}{k} 2^{-100} = 50 \sum\limits_{k=0}^{99} k\binom{99}{k} 2^{-99} = 50\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^{99} = 50$. Továbbá, $k^2\binom{100}{k} = [k(k-1)+k]\binom{100}{k} = 100 \cdot 99 \cdot \binom{98}{k-2} + 100 \cdot \binom{100}{99}$, $E\xi^2 = 2^{-100} \cdot 100 \cdot 99 \cdot \sum\limits_{k=0}^{98} \binom{98}{k} + 2^{-100} \cdot 100 \cdot \sum\limits_{k=0}^{99} \binom{99}{k} = 2^{-100}\left(100 \cdot 99 \cdot (1+1)^{98} + 100 \cdot (1+1)^{99}\right) = 25 \cdot 99 + 50$, $\mathrm{Var}\,\xi = E\xi^2 - (E\xi^2) = 25$.

   Valójában a vizsgált várható értéket és szórásnégyzetet egyszerűbben is kiszámíthatjuk. Vezessük be a ξ_j valószínűségi változókat, $\xi_j = 1$, ha a j-ik dobás eredménye fej $\xi_j = 0$, ha a j-ik dobás eredménye írás, $1 \le j \le 100$. Ekkor a fejdobások száma $\xi = \sum\limits_{j=1}^{100} \xi_j$, $E\xi = \sum\limits_{j=1}^{100} E\xi_j$, $\mathrm{Var}\,\xi = \sum\limits_{j=1}^{100} \mathrm{Var}\,\xi_j$. Mivel $E\xi_j = \frac{1}{2}$, $E\xi_j^2 = \frac{1}{2}$, $\mathrm{Var}\,\xi_j = \frac{1}{4}$, $1 \le j \le 100$, ezért $E\xi = \frac{1}{2} \cdot 100 = 50$, $\mathrm{Var}\,\xi = \frac{1}{4} \cdot 100 = 25$.

2. Egy szabályos dobókockát feldobunk 100-szor egymás után. Számoljuk ki a dobáseredmények összegének várható értékét és szórásnégyzetét.

   Megoldás: Legyenek $\eta_1, \dots, \eta_{100}$ *független* valószínűségi változók, amelyekre $P(\eta_j = k) = \frac{1}{6}$, $1 \le j \le 100$, $1 \le k \le 6$. Ekkor a kiszámítandó várható érték és szórásnégyzet $E\sum\limits_{j=1}^{100} \eta_j = \sum\limits_{j=1}^{100} E\eta_j$, $\mathrm{Var}\sum\limits_{j=1}^{100} \eta_j = \sum\limits_{j=1}^{100} \mathrm{Var}\,\eta_j$. (A második reláció felhasználja a tekintett valószínűségi változók függetlenségét.) $E\eta_j = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3.5$, $E\eta_j^2 = \frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36) = \frac{91}{6}$, $\mathrm{Var}\,\eta_j = \frac{35}{12}$, $E\xi = 350$, $\mathrm{Var}\,\xi = \frac{3500}{12}$.

   Házi feladat:

   Egy szabályos dobókockát feldobunk 100-szor egymás után. Tekintsük a páros értékű dobások dobáseredményeinek összegét és számítsuk ki annak szórásnégyzetét.

3. Legyen egy urnában 20 piros és 30 fehér golyó. Húzzunk ki 20 golyót visszatevés nélkül. Számoljuk ki a kihúzott piros golyók számának várható értékét és szórásnégyzetét.

   Megoldás: Vezessük be a következő ξ_j, $1 \le j \le 20$, valószínűségi változókat: $\xi_j(\omega) = 1$, ha a j-ik húzás eredménye piros, $\xi_j(\omega) = 0$, ha a j-ik húzás eredménye fehér. Ekkor a $\xi = \sum_{j=1}^{20} \xi_j$ összeg várható értékét és szórásnégyzetét kell kiszámolnunk. Továbbá $E\xi_j = E\xi_1 = \frac{2}{5}$, $\mathrm{Var}\,\xi_j = \mathrm{Var}\,\xi_1 = \frac{2}{5} - \frac{4}{25} = \frac{6}{25}$, $E\xi_j\xi_k - E\xi_j E\xi_k = E\xi_1\xi_2 - E\xi_1 E\xi_2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{19}{49} - \frac{4}{25} = -\frac{6}{1245}$, ha $j \ne k$. Innen a 20 dobásban kihúzott piros golyók számának várható értéke $20E\xi_1 = 20 \cdot \frac{2}{5} = 8$, és szórásnégyzete $20\mathrm{Var}\,\xi_1 + 20 \cdot 19 \cdot \mathrm{Cov}\,(\xi_1, \xi_2) = 20 \cdot \frac{6}{25} - 380 \cdot \frac{6}{1245} = \frac{144}{49}$.

   Házi feladat:

   Legyen egy urnában 10 piros és 20 fehér golyó. Húzzunk ki 20 golyót, és minden húzás után a kihúzott golyót visszadobjuk egy másik azonos színű golyóval együtt. Számoltuk a kihúzott piros golyók számának várható értékét és szórásnégyzetét.

   Megjegyzés: Használjuk az előző gyakorlat eredményét arról, hogy mi a valószínűsége annak, hogy egy adott húzásban piros golyót húzunk vagy két különböző húzás mindegyikében piros golyót húzunk.

4. Egy szabályos dobókockát feldobunk tízszer. Számoljuk ki a dobásösszeg harmadik hatványának a várható értékét.

   Megoldás: Vezessük be a következő valószínűségi változókat: $\xi_j(\omega) = k$, ha a j-ik dobás eredménye k, $1 \le j \le 10$, $1 \le k \le 6$. Ekkor az $E\left(\sum_{j=1}^{10} \xi_j(\omega)\right)^3$ várható értéket kell kiszámítanunk. Ennek érdekében tekintsük a $\left(\sum_{j=1}^{10} \xi_j(\omega)\right)^3$ kifejezést és értsük meg milyen tagokat kapunk, ha elvégezzük a beszorzásokat. Egyrészt megjelenik 10 ξ_j^3 alakú kifejezés, és $E\xi_j^3 = E\xi_1^3$ minden ilyen tagra. Ezenkívül megjelenik $3 \cdot 10 \cdot 9$ $\xi_j^2\xi_k$, $j \ne k$, alakú kifejezés, mert a lehetséges (j,k) párokat $10 \cdot 9$ módon választhatjuk ki, és a k (csak egyszer szereplő tényező) három helyen szerepelhet. Továbbá minden ilyen tagra $E\xi_j^2\xi_k = E\xi_j^2 E\xi_k = E\xi_1^2 E\xi_1$. Továbbá $10 \cdot 9 \cdot 8$ módon jelenhet meg $\xi_j\xi_k\xi_l$ alakú tag, ahol a j, k és l indexek mind különbözőek, és ezekre $E\xi_j\xi_k\xi_l = (E\xi_1)^3$. Másfajta tag nem jelenik meg a szorzatban. Innen $\left(\sum_{j=1}^{10} \xi_j(\omega)\right)^3 = 10E\xi_1^3 + 270E\xi_1(E\xi_1)^2 + 720\,(E\xi_1)^3 = 4410 + 14332.5 + 3087 = 218295.5$, mert $E\xi_1 = 3.5$, $E\xi_1^2 = \frac{91}{6}$ és $E\xi_1^3 = 441$.

5. Egy urnában 10 piros és 20 fehér golyó van. Kihúzunk visszatevés nélkül 10 golyót. A páros sorszámú húzások esetén fehér golyó húzás esetén nyerünk 3 forin-

tot, piros golyó húzás esetén pedig nem nyerünk és nem veszítünk semmit. A páratlan sorszámú húzások esetén piros húzás esetén 2 forintot nyerünk, fehér golyó húzás esetén nem nyerünk és nem veszítünk semmit. Számoljuk ki a nyereményünk várható értékét és szórásnégyzetét.

Megoldás: Vezessük be a következő ξ_j, $1 \le j \le 10$, valószínűségi változókat: Páros j számokra $\xi_j = 3$, ha a j-ik húzás eredménye piros, $\xi_j = 0$, ha a j-ik húzás eredménye fehér golyó. Páratlan j számokra $\xi_j = 2$, ha a j-ik húzás eredménye piros, $\xi_j = 0$, ha a j-ik húzás eredménye fehér golyó. Ekkor az $S = \sum\limits_{j=1}^{10} \xi_j$ összeg várható értékét és szórásnégyzetét kell kiszámolnunk. Ennek érdekében számoljuk ki az $E\xi_j$ várható értékeket, $\operatorname{Var} \xi_j$ szórásnégyzeteket és $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k)$ kovarianciákat. Annak valószínűsége, hogy a j-ik húzás eredménye piros $\frac{1}{3}$, annak valószínűsége, hogy j-ik húzás eredménye fehér $\frac{2}{3}$. Ezért $E\xi_j = 2$, ha j páros, $E\xi_j = \frac{2}{3}$, ha j páratlan, és $ES = 5\left(2 + \frac{2}{3}\right) = 13\frac{1}{3}$.
A szórásnégyzet kiszámítása érdekében vegyük észre, hogy $E\xi_j^2 = 6$, $\operatorname{Var} \xi_j = 2$, ha j páros, és $E\xi_j^2 = \frac{4}{3}$, $\operatorname{Var} \xi_j = \frac{8}{9}$. Továbbá annak valószínűsége, hogy két j és k indexre $j \ne k$, a j-ik és k-ik húzás mindegyike fehér $\frac{2\cdot 19}{3\cdot 29} = \frac{38}{87}$, annak, hogy mindkét húzás piros $\frac{9}{3\cdot 29} = \frac{3}{29}$, annak, hogy az egyik húzás fehér a másik piros $\frac{2\cdot 10}{3\cdot 29} = \frac{20}{57}$. Ezért $E\xi_j\xi_k = 9 \cdot \frac{2\cdot 19}{3\cdot 29} = \frac{114}{29}$, $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k) = \frac{114}{29} - 4 = -\frac{2}{29}$, ha j és k páros, $E\xi_j\xi_k = 4 \cdot \frac{3}{29} = \frac{12}{29}$, $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k) = \frac{12}{29} - \frac{4}{9} = -\frac{8}{263}$, ha j és k páratlan, $E\xi_j\xi_k = 6 \cdot \frac{20}{57} = \frac{40}{29}$, $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k) = \frac{40}{29} - \frac{4}{3} = \frac{4}{87}$, ha j és k közül az egyik páros, a másik páratlan. Olyan (j, k) pár, $1 \le j, k \le 10$, $j \ne k$, melyre j és k mindegyike páros vagy mindegyike páratlan, összesen 20 van, és olyan (j, k) pár, melyekre az egyik páros, a másik páratlan $2 \cdot 5 \cdot 5 = 50$ van, ezért

$$\sum_{1 \le j,k \le 10,\, j \ne k} \operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k) = 20\left(-\frac{2}{29} - \frac{8}{263}\right) + 50 \cdot \frac{4}{87} = \frac{80}{263}.$$

Innen

$$\begin{aligned}\operatorname{Var} S &= \sum_{j=1}^{10} \operatorname{Var} \xi_j + \sum_{1 \le j,k \le 10,\, j \ne k} \operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k) \\ &= 5\left(2 + \frac{8}{9}\right) + \frac{80}{263} = \frac{130}{9} + \frac{80}{263} = \frac{3850}{263}.\end{aligned}$$

6. Feldobunk egy szabályos pénzdarabat 100-szor egymás után. Tekintsük az egymást követő fej-fej dobássorozatok számát, és számítsuk ki ennek várható értékét és szórásnégyzetét.

   Megoldás: Vezessük be a következő ξ_j, $1 \le j \le 99$, valószínűségi változókat: $\xi_j = 1$, ha a j-ik és $j + 1$-ik dobások mindegyikének eredménye fej, $\xi_j = 0$ egyébként. Vegyük észre, hogy minket az $S = \sum\limits_{j=1}^{99} \xi_j$ valószínűségi változó várható értéke érdekel. Ezért $ES = E\left(\sum\limits_{j=1}^{99} E\xi_j\right) = \dfrac{99}{4}$, mivel $E\xi_j = \dfrac{1}{4}$. (Érdemes megjegyezni, hogy az ebben a feladatban tekintett ξ_j valószínűségi változók nem függetlenek, de a függetlenségre nincs szükség a várható érték additivításához.)

A szórásnégyzet kiszámításában viszont figyelembe kell vennünk azt, hogy nem csupa független valószínűségi változó összegét vizsgáljuk. Használjuk a szórásnégyzet kiszámolásánál a következő formulát.

$$\operatorname{Var} S = \operatorname{Var}\left(\sum_{j=1}^{99} \xi_j\right) = \sum_{j=1}^{99} \operatorname{Var} \xi_j + 2 \sum_{1 \le j < k \le 99} \operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k).$$

Továbbá $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k) = 0$, ha $k \ge j+2$, mert ebben az esetben ξ_j és ξ_k függetlenek, és $E\xi_j\xi_{j+1} = \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$ minden $1 \le j \le 98$ számra. Ugyanis $E\xi_j\xi_{j+1} = \frac{1}{8}$, mivel $\xi_j\xi_{j+1} = 1$, ha a j-ik, $j+1$-ik és $j+2$-ik dobások mindegyike fej, aminek valószínűsége $\frac{1}{8}$, és $\xi_j\xi_{j+1} = 0$ egyébként. Továbbá $E\xi_j E\xi_{j+1} = \frac{1}{16}$. Ezenkívül $\operatorname{Var} \xi_j = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$. Innen $\operatorname{Var} S = 99 \cdot \frac{3}{16} + 2 \cdot \frac{98}{16} = \frac{493}{16}$.