A március 30.-i gyakorlat feladatai

Fontos megtanulni, hogyan lehet kiszámítani általános valószínűségi változók várható értékét és szórásnégyzetét. Ilyen jellegű feladatokat fogunk tárgyalni. De ennek érdekében először meg kell értenünk néhány fontos fogalmat illetve néhány fontos eredmény jelentését. Ezért felelevenítek bizonyos az előadáson már tárgyalt fontos ismeretet. A várható érték tárgyalása előtt meg kell ismernünk az eloszlásfüggvény fogalmát. Meg kell értenünk azt, hogy hogyan tudjuk kiszámolni a várható értéket az eloszlásfüggvény segítségével. Később rátérünk a sűrűségfüggvény fogalmának ismertetésére is, és arra, hogy hogyan tudjuk kiszámolni a várható értéket a sűrűségfüggvény ismeretében.

Valószínűségi változó eloszlásfüggvényének a definiciója. *Legyen adva egy $\xi(\omega)$ (valós értékű) valószínűségi változó egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Ennek $F(x)$ eloszlásfüggvényén az $F(x) = P(\{\omega\colon \xi(\omega) < x\})$, $-\infty < x < \infty$, függvényt értjük.*

Tétel. *Legyen $\xi(\omega)$ valószínűségi változó egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, és legyen $F(x) = P(\{\omega\colon \xi(\omega) < x\})$, $-\infty < x < \infty$, e valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. Az $F(x)$ eloszlásfüggvény teljesíti a következő tulajdonságokat.*

a) *$F(x)$ monoton növekvő függvény.*
b) *$F(x)$ balról folytonos függvény, azaz $\lim\limits_{h\to 0,\, h>0} F(x-h) = F(x)$ minden $-\infty < x < \infty$ számra.*
c) $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$.
d) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

Megfordítva, ha egy $F(x)$ függvény teljesíti az előbb megfogalmazott a)—d) tulajdonságokat, akkor az eloszlásfüggvény. Részletesebben megfogalmazva ez azt jelenti, hogy ha az $F(x)$ függvény teljesíti az a)—d) feltételeket, akkor létezik egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, és azon olyan $\xi(\omega)$ valószínűségi változó, amelynek az eloszlásfüggvénye ez az $F(x)$ függvény.

Valószínűségi változó várható értékének *formális* **definiciója.** *Legyen $\xi(\omega)$ valószínűségi változó egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. E valószínűségi változó várható értékét úgy definiáljuk, mint a $\xi(\omega)$ függvénynek az*

$$E\xi(\omega) = \int \xi(\omega)\,dP(\omega)$$

Lebesgue integrálját a P valószínűségi mérték szerint, feltéve, hogy $\int |\xi(\omega)|\,dP(\omega) < \infty$. Ha ez a feltétel nem teljesül, akkor nem definiáljuk a ξ valószínűségi változó várható értékét.

A Lebesgue integrál fogalmának pontos ismerete nem szükséges a továbbiak megértéséhez és a tárgyalt feladatok megoldásához. Érdemes megjegyezni, hogy ez egy a valószínűségi mezőn értelmezett függvénynek azaz valószínűségi változónak a valószínűségi mezőn definiált valószínűségi mérték szerinti integrálja. Ez az integrálfogalom hasonló a tanult Lebesgue integrál fogalmához. Először egyszerű (véges sok értéket felvevő) függvények integrálát definiáljuk természetes módon, majd természetes határátmenet segítségével ezt az integrált értelmezzük általános függvények esetén is. A defició fogalmilag nem nehéz, de a részletes elmélet kidolgozása mély mértékelméleti eredmények ismeretét igényli. Erre nem lesz szükségünk, viszont nagyon fontos tudni, hogy noha a várható érték fogalmát a valószínűségi mező és a rajta definiált valószínűségi változó és valószínűségi mérték segítségével definiáltuk, ahhoz, hogy kiszámoljuk elegendő a valószínűségi változó eloszlásának az ismerete. Ezt az alábbi jelentősége miatt *fontos tételnek* nevezett eredmény segítségével tehetjük meg.

Fontos Tétel. *Legyen $\xi(\omega)$ valószínűségi változó egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, amelynek $F(x)$ az $F(x) = P(\xi < x)$, $-\infty < x < \infty$, eloszlásfüggvénye. Ekkor*

$$E\xi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} xF(\,dx),$$

ahol a fenti integrál Lebesgue–Stieltjes integrált jelöl az F mérték szerint. Ez a formula akkor érvényes, ha $\int_{-\infty}^{\infty} |x|F(\,dx) < \infty$. Ellenkező esetben az $E\xi$ várható értéket nem definiáltuk.

Sőt, igaz a Fontos Tétel következő általánosítása.

A Fontos Tétel általánosítása. *Legyen $\xi(\omega)$ valószínűségi változó egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, amelynek $F(x)$ az $F(x) = P(\xi < x)$, $-\infty < x < \infty$, eloszlásfüggvénye. Legyen $g(x)$ tetszőleges (mérhető) függvény a számegyenesen, és definiáljuk az $\eta(\omega) = g(\xi(\omega))$ valószínűségi változót. Ekkor*

$$E\eta(\omega) = Eg(\xi(\omega)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)F(\,dx),$$

ahol a fenti integrál Lebesgue–Stieltjes integrált jelöl az F mérték szerint. Ez a formula akkor érvényes, ha $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|F(\,dx) < \infty$. Ellenkező esetben az $E\eta$ várható értéket nem definiáltuk.

Tétel. *Ha két ξ_1, ξ_2 valószínűségi változónak (amelyek ugyanazon a valószínűségi mezőn vannak definiálva) létezik várható értéke, c_1 és c_2 két valós szám, akkor a $c_1\xi_1 + c_2\xi_2$ kifejezésnek is létezik várható értéke, és*

$$E\left(c_1\xi_1 + c_2\xi_2\right) = c_1E\xi_1 + c_2E\xi_2.$$

Szórásnégyzet definiciója. *Legyen ξ olyan valószínűségi változó, amelyre $E\xi^2 < \infty$. Ekkor e valószínűségi változó szórásnégyzete*

$$\operatorname{Var}\xi = E\left(\xi - E\xi\right)^2$$

(Ha $E\xi^2 = \infty$, akkor vagy nem definiáljuk a ξ valószínűségi változó szórásnégyzetét, vagy azt mondjuk, hogy $\operatorname{Var}\xi(\omega) = \infty$.)

Lemma.

$$\operatorname{Var}\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 .$$

Sűrűségfüggvény definiciója. *Egy $F(x)$ eloszlásfüggvénynek az $f(u)$, $-\infty < u < \infty$, függvény sűrűségfüggvénye, ha minden $-\infty < x < \infty$ számra teljesül az*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\, du$$

azonosság.

Megjegyzés: Többször fogunk beszélni egy valószínűségi változó sűrűségfüggvényéről is. Ez azt jelenti, hogy e valószínűségi változó eloszlásfüggvényének a sűrűségfüggvényét tekintjük. Sok érdekes és fontos eloszlásfüggvénynek létezik sűrűségfüggvénye, de nem mindegyiknek. Például egy diszkrét eloszlású valószínűségi változónak nincs sűrűségfüggvénye.

Tétel. *Ha egy $F(x)$ eloszlásfüggvénynek létezik $f(u)$ sűrűségfüggvénye, akkor ez teljesíti minden $g(\cdot)$ függvényre a következő azonosságot:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(u) F(\,du) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) f(u) du.$$

Newton–Leibniz formula. *Legyen $F(x)$ folytonos függvény egy $[a,b]$ véges intervallumon, amely véges sok pont kivételével folytonosan deriválható. Legyen $f(u) = \left.\dfrac{dF(x)}{dx}\right|_{x=u}$ minden pontban, ahol az $F(\cdot)$ differenciálható. Ekkor $F(x) - F(a) = \int_a^x f(u)\, du$ minden $a \le x \le b$ számra. Továbbá, ha a fenti feltétel teljesül minden véges $[a,b]$ intervallumban, és létezik a $F(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$ határérték, akkor $F(x) - F(-\infty) = \int_{-\infty}^x f(u)\, du$ minden $-\infty < x < \infty$ számra.*

Megfordítva, ha $f(u)$, (pontosabban annak abszolut értéke) integrálható függvény egy $[a,b]$ intervallumban, és $F(x) = \int_a^x f(u)\, du$, $a \le x \le b$, akkor $f(u) = \left.\dfrac{dF(x)}{dx}\right|_{x=u}$ (majdnem) minden $a \le u \le b$ pontban. Ha az $f(u)$ függvény integrálható az egész számegyenesen, akkor a fenti állítás igaz $a = -\infty$ választással is.

Megjegyzés: A Newton–Leibniz formula jelentősége számunkra az, hogy eszerint az eredmény szerint a sűrűségfüggvény (feltéve, hogy az létezik) egyenlő az eloszlásfüggvény deriváltjával. Megfordítva, a sűrűségfüggvény ismeretében meg tudjuk határozni az eloszlásfüggvényt. Annak értéke az x pontban megegyezik a sűrűségfüggvény integráljával a $[-\infty, x]$ intervallumban.

Tétel. *Egy $f(\cdot)$ (mérhető) függvény akkor és csak akkor sűrűségfüggvénye egy alkalmas eloszlásfüggvénynek, ha $f(u) \ge 0$ majdnem minden $-\infty < u < \infty$ számra, és $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, du = 1$.*

Tétel. *Jelölje $F(\cdot)$ illetve $f(\cdot)$ egy ξ valószínűségi változó eloszlás illetve sűrűségfüggvényét. Legyen $g(\cdot)$ mérhető függvény a számegyenesen. Ekkor*

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} uF(\,du) = \int_{-\infty}^{\infty} uf(u)\,du$$

és

$$Eg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)F(\,du) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)f(u)\,du.$$

1.) Tekintsük egy szabályos dobókocka feldobását, illetve azt a valószínűségi változót, amely megmondja mi a dobás eredménye. Adjuk meg ennek a ξ valószínűségi változónak az $F(x)$ eloszlásfüggvényét.

Megoldás: Ez a ξ valószínűségi változó az 1, 2, 3, 4, 5 és 6 értékek valamelyikét veszi fel, mindegyiket $\frac{1}{6}$ valószínűséggel. Ezért annak a valószínűsége, hogy $P(\xi < x)$ nullával egyenlő, ha $x < 1$. Sőt $x = 1$ esetében is teljesül a $P(\xi < 1) = 0$ azonosság, mert annak valószínűségét nézzük, hogy a ξ valószínűségi változó szigorúan kisebb mint az x szám. Ezért $F(x) = 0$, ha $-\infty < x \le 1$. Ha $1 < x < 2$, akkor az $\{\omega\colon \xi(\omega) < x\}$ esemény azt jelenti, hogy a dobás eredménye 1. Ez az állítás igaz $x = 2$ esetében is. Ezért $F(x) = \frac{1}{6}$, ha $1 < x \le 2$. Ha $2 < x \le 3$, akkor az $\{\omega\colon \xi(\omega) < x\}$ esemény azt jelenti, hogy a dobás eredménye 1 vagy 2. Ezért $F(x) = \frac{2}{6}$, ha $2 < x \le 3$. Ezt a gondolatot végigkövetve kapjuk, hogy $F(x) = 0$, ha $-\infty < x \le 1$, $F(x) = \frac{j}{6}$, ha $j < x \le j+1$, $1 \le j \le 5$, és $F(x) = 1$, ha $6 < x < \infty$,

Házi feladat:

Feldobunk egy pénzdarabot, amely p valószínűséggel esik a fej, $1-p$ valószínűséggel az írás oldalra kétszer egymástól függetlenül. Jelölje ξ azt a valószínűségi változót, amely a fejdobások számát adja meg. Adjuk meg a ξ valószínűségi változó $F(x)$ eloszlásfüggvényét.

2.) Legyen ξ valószínűségi változó $f(u)$ sűrűségfüggvénnyel, a és b valós számok. Határozzuk meg az $\eta = a\xi + b$ és $\zeta = \xi^2$ valószínűségi változók sűrűségfüggvényét.

Megoldás: Legyen $F(x) = P(\xi < x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$ a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. Ekkor az $\eta = a\xi + b$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a $G(x) = P(\eta < x) = P\left(\xi < \dfrac{x-b}{a}\right) = F\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$ függvény, ha $a > 0$, és $G(x) = P(\eta < x) = P\left(\xi > \dfrac{x-b}{a}\right) = 1 - F\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$, ha $a < 0$. Innen η sűrűségfüggvénye $g(x) = \dfrac{dG(x)}{dx} = \dfrac{1}{|a|} f\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$.

A $\zeta = \xi^2$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$G(x) = P(\xi^2 < x) = P\left(-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}\right) = F\left(\sqrt{x}\right) - F\left(-\sqrt{x}\right),$$

ha $x \geq 0$, és $G(x) = 0$, ha $x < 0$. Innen deriválással ζ sűrűségfüggvénye $g(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(f\left(\sqrt{x}\right) + f\left(-\sqrt{x}\right)\right)$, ha $x > 0$, és $g(x) = 0$, ha $x < 0$.

Házi feladat:

Legyen egy ξ valószínűségi változónak $f(x)$ sűrűségfüggvénye. Számítsuk ki ξ^3 és ξ^4 sűrűségfüggvényét.

3.) Azt mondjuk, hogy egy λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

Lássuk be, hogy $f_\lambda(x)$ valóban sűrűségfüggvény.
Megoldás: Azt kell belátni, hogy $f_\lambda(x) \geq 0$ minden $-\infty < x < \infty$ számra, ami a definició nyílvánvaló következménye, és $\int_{-\infty}^{\infty} f_\lambda(x)\,dx = 1$. Viszont $\int_{-\infty}^{\infty} f_\lambda(x)\,dx = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^\infty = 1 - 0 = 1$.

4.) Számítsuk ki egy λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó momentumait, azaz számítsuk ki az $E\xi^k$, $k = 1, 2, \dots,$ várható értékeket egy olyan ξ valószínűségi változó esetében, amelynek sűrűségfüggvénye $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, ha $x \geq 0$, és $f(x) = 0$, ha $x < 0$.
Megoldás: $E\xi^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_\lambda(x)\,dx$, ezt az integrált kell kiszámítani minden $k = 1, 2, \dots,$ számra. Alkalmazva az $u = \lambda x$ helyettesítést azt kapjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k f_\lambda(x)\,dx = \int_0^\infty x^k \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \lambda^{-k} \int_0^\infty u^k e^{-u}\,du.$$

Parciális integrálással

$$\begin{aligned}\int_0^\infty u^k e^{-u}\,du &= \int_0^\infty u^k \left(-e^{-u}\right)'\,du = \left[-u^k e^{-u}\right]_0^\infty + \int_0^\infty k u^{k-1} e^{-u}\,du \\ &= k \int_0^\infty u^{k-1} e^{-u}\,du,\end{aligned}$$

ahonnan teljes indukcióval azt kapjuk, hogy $\int_0^\infty u^k e^{-u}\,du = k!$. Innen $E\xi^k = k!\lambda^{-k}$.

5.) Legyen ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó egy $[a, b]$ intervallumban, azaz legyen annak a valószínűsége, hogy a ξ valószínűségi változó egy $[u, v] \subset [a, b]$ intervallumba esik $\frac{v-u}{b-a}$. Számítsuk ki a ξ valószínűségi változó eloszlás és sűrűségfüggvényét, valamint várható értékét és szórásnégyzetét.
Megoldás: A ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F(x) = 0$, ha $x \leq a$, $F(x) = \frac{x-a}{b-a}$, ha $a \leq x \leq b$, $F(x) = 1$, ha $x > b$. Ugyanis $F(x) = P(\xi < x)$, és ez a valószínűség 0-val egyenlő, ha $x < a$, 1-gyel egyenlő, ha $x > b$, és $P(\xi < x) = P(a \leq \xi < x) = \frac{x-a}{b-a}$. A ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$,

ezért $f(x) = 0$, ha $x < a$ vagy $x > b$, és $f(x) = \frac{1}{b-a}$. Innen $E\xi = \int x f(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{b-a}\,dx = \left[\frac{x^2}{2(b-a)}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{a+b}{2}$, $E\xi^2 = \int x^2 f(x)\,dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$. Innen $\operatorname{Var}\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{4(a^2+b^2+ab)-3(a+b)^2}{12} = \frac{a^2+b^2-2ab}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$.