A március 9.-i gyakorlat feladatai

1.) Bizonyítsuk be a következő azonosságot, amelyet teleszkóp szabálynak is szoktak nevezni: Ha adva vannak $A_1, \dots, A_k$ események egy valószínűségi mezőn, amelyekre $P(A_1 \cap \cdots \cap A_k) > 0$, akkor

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_k|A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1})$$

Megoldás:

$$\begin{aligned} &P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_k|A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1}) \\ &\quad = P(A_1)\frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)}\frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \cdots \frac{P(A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_{k-1} \cap A_k)}{P(A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1})} \\ &\quad = P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k). \end{aligned}$$

2.) Két különböző fáról leszednek 100 almát, és beteszik két különböző (megkülönböztethetetlen) ládába. Ez egyik fáról szedett almák (egymástól függetlenül) $\frac{1}{4}$ a másik fáról szedett almák pedig (szintén egymástól függetlenül) $\frac{1}{10}$ valószínűséggel férgesek. Kiveszünk az egyik (véletlenül kiválasztott) ládából két almát és mind a kettő férges. Ezek után kiveszünk a másik ládából egy almát. Mi annak a valószínűsége, hogy ez az alma már nem férges?

Megoldás: Értsük meg először pontosabban a feladatot. Jelölje B azt az eseményt, hogy első alkalommal a rosszabb fáról leszedett almákat tartalmazó ládához nyúlunk. Ekkor egyrészt $P(B) = \frac{1}{2}$. Másrészt, ha egymás után, esetleg váltogatva a ládákat kiveszünk egymás után a ládákból almákat, definiáljuk a $j_1, \dots, j_k$ húzássorozatot, ahol mindegyik $j_s = \pm 1$, $j_1 = 1$, $j_s = 1$ azt jelenti, hogy a s-ik húzás során az elsőnek kiválasztott ládából, $j_s = -1$ pedig azt, hogy a másik ládából választottunk almát, akkor $A(j_1, \dots, j_n)$-nel jelölve azt az eseményt, hogy minden kiválasztott alma férges, felírhatjuk, hogy

$$P(A(j_1, \dots, j_n)|B) = \left(\frac{1}{4}\right)^{u(j_1,\dots,j_n)} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-u(j_1,\dots,j_n)},$$
$$P(A(j_1, \dots, j_n)|\bar{B}) = \left(\frac{1}{10}\right)^{u(j_1,\dots,j_n)} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-u(j_1,\dots,j_n)},$$

ahol $u(j_1, \dots, j_n)$ jelöli a $j_1, \dots, j_n$ sorozatban szereplő $+1$ jelek számát. Hasonlóan fel tudjuk írni annak feltételes valószínűségét, hogy egy előírt húzássorozat esetén, amelyikben megmondjuk, hogy mikor melyik ládából húztunk almát a férges és jó almahúzásoknak előírt sorozata jelenik meg, feltéve a B eseményt vagy annak komplementerét, a $\bar{B}$ eseményt. Jelölje C azt az eseményt, hogy az első két húzásban férges almát húzunk, D pedig azt, hogy a harmadik húzásban (a láda megváltoztatása után) jó almát húzunk. Ekkor a $P(D|C) = \dfrac{P(C \cap D)}{P(D)}$ feltételes valószínűséget akarjuk kiszámolni. Viszont,

$$P(C) = P(C|B)P(B) + P(C|\bar{B})P(\bar{B}) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^2\right) = \frac{29}{800},$$

$$\begin{aligned} P(C \cap D) &= P(C \cap D|B)P(B) + P(C \cap D|\bar{B})P(\bar{B}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2 \frac{9}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^2 \frac{3}{4}\right) = \frac{51}{1600}. \end{aligned}$$

Innen $P(D|C) = \dfrac{P(C \cap D)}{P(D)} = \dfrac{51}{58}$.

3. Legyenek $A_1, A_2, \ldots,$ események egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Lássuk be, hogy $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ jelöli azt az eseményt, hogy az $A_1, A_2, \ldots,$ események közül véges sok kivétellel mindegyik bekövetkezik.
Megoldás: Az, hogy az A_n események majdnem mindegyike bekövetkezik, azt jelenti, hogy van olyan n szám, amelyre igaz, hogy minden $k \geq n$ indexre bekövetkezik az A_k esemény, azaz a $B_n = \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ esemény is bekövetkezik. Az, hogy a B_n esemény bekövetkezik valamely n számra azt jelenti, hogy bekövetkezik az $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ esemény.
4. Ha egy szabályos pénzdarabot végtelen sokszor feldobunk egymás után, akkor egy valószínűséggel lesz legalább 50 fejdobás.
Egy lehetséges megoldás: Az is igaz egy valószínűséggel, hogy a

$$B_k = \{\text{azon } j \text{ indexekre, amelyekre } 50k \leq j < 50(k+1) \text{ minden dobás fej}\}$$

események közül végtelen sok fog bekövetkezni. Ugyanis ezek a B_k események függetlenek, $P(B_k) = 2^{-50}$, tehát $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(B_k) = \infty$. Ezért a Borel–Cantelli lemmából következik a kívánt állítás, sőt az is, hogy végtelen sok B_k esemény következik be egy valószínűséggel. Valójában a Borel–Cantelli lemmára nincs is szükség. Annak valószínűsége, hogy egyik B_k esemény sem következik be $\lim\limits_{N \to \infty} \left(1 - 2^{-50}\right)^N = 0$, tehát egy valószínűséggel valamelyik B_k esemény bekövetkezik.
5. Egy 100 tagú társaság minden egyes tagja egymástól függetlenül $\dfrac{1}{1000}$ valószínűséggel betegszik meg. Mi annak a valószínűsége, hogy a társaságnak lesz beteg tagja? A kapott eredményről mit mondhatunk? Az nagyon nagy, majdnem 1 vagy nagyon kicsi majdnem nulla?

Megoldás: Jelölje A_j azt az eseményt, hogy a társaság j-ik megbetegszik meg. Ekkor a $P(A_j)=\dfrac{1}{1000}$, és az A_j események függetlenek. Számoljuk ki először a minket érdeklő esemény komplementerének, azaz annak az eseménynek a valószínűségét, hogy mindenki egészséges. Ez az $\bigcap\limits_{j=1}^{1000}(\Omega\setminus A_j)$ esemény. Mivel $P(\Omega\setminus A_j)=1-\dfrac{1}{1000}$, és az A_j események függetlenségéből következik az $\Omega\setminus A_j$ események függetlensége is, ezért $P\left(\bigcap\limits_{j=1}^{1000}(\Omega\setminus A_j)\right)=\left(1-\dfrac{1}{1000}\right)^{100}$. Innen a minket érdeklő esemény valószínűsége $1-\left(1-\dfrac{1}{1000}\right)^{100}$.

Végül jegyezzük meg, hogy $\left(1-\dfrac{1}{1000}\right)^{100}=\left(\left(1-\dfrac{1}{1000}\right)^{1000}\right)^{1/10}\sim e^{-1/10}$. Miért? Ez a szám nagyon közel van az egyhez, ezért a minket érdeklő valószínűség értéke kicsi.

6. Tekintsük a következő valószínűségi mezőt. $\Omega=\{1,\dots,n\}$, ahol n valamely pozitív egész szám, $\mathcal{A}$ az Ω összes részhalmazaiból álló σ-algebra,

$$P(A)=\frac{\text{az } A \text{ halmaz számossága}}{n}.$$

Legyen $n=p_1^{r_1}\cdots p_k^{r_k}$ az n szám prímtényezős felbontása, és definiáljuk a következő A_j eseményeket: $A_j=\{m\colon m \text{ osztható a } p_j \text{ számmal}\}$, $1\le j\le k$. Legyen $B=\{m\colon m \text{ relatív prim az } n \text{ számhoz képest}\}$. Mutassuk meg, hogy

a. Az $A_1,\dots,A_k$ események függetlenek.

b. $P(B)=\prod\limits_{j=1}^{k}\left(1-\dfrac{1}{p_j}\right)$, azaz összesen $n\cdot\prod\limits_{j=1}^{k}\left(1-\dfrac{1}{p_j}\right)$ n-nél kisebb és az n-hez képest relatív prim van.

Megoldás: $A_j=\left\{p_j,2p_j,\dots,\dfrac{n}{p_j}p_j\right\}$ egy $\dfrac{n}{p_j}$ számból álló halmaz, ezért $P(A_j)=\dfrac{1}{p_j}$, $1\le j\le k$. Az $A_{j_1}\cap A_{j_2}\cap\cdots\cap A_{j_s}$ halmaz az n-nél kisebb $p_{j_1}\cdots p_{j_s}$ számmal osztható számokból áll minden $1\le j_1<j_2<\cdots<j_s\le k$ sorozatra, ezért számossága $\dfrac{n}{p_{j_1}\cdots p_{j_s}}$, és $P(A_{j_1}\cap A_{j_2}\cap\cdots\cap A_{j_s})=\dfrac{1}{p_{j_1}\cdots p_{j_s}}$. Ez azt jelenti, hogy $P(A_{j_1}\cap A_{j_2}\cap\cdots\cap A_{j_s})=P(A_{j_1})P(A_{j_2})\cdots P(A_{j_s})$ minden $1\le j_1<j_2<\cdots<j_s\le k$ sorozatra, ezért az A_1, A_2, … A_k halmazok függetlenek.

Végül $B=\Omega\setminus(A_1\cup\cdots\cup A_k)=\bigcap\limits_{j=1}^{k}(\Omega\setminus A_j)$. Ezért és az A_j események függetlensége miatt $P(B)=\prod\limits_{j=1}^{k}P(\Omega\setminus A_j)=\prod\limits_{j=1}^{k}\left(1-\dfrac{1}{p_j}\right)$, ahonnan következik a B halmaz számosságára megadott képlet.

Az elöző két feladatban láttuk hogyan lehet egyszerűen kiszámítani a $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ alakú események valószínűségét, ha az A_j, $1 \le j \le n$, események függetlenek. Ezek a számolások természetesen kihasználták a tekintett események függetlenségét. A következőben azt tárgyaljuk meg, hogy amennyiben nincs feltétlenül függetlenség a tekintett események között, de ki tudjuk számolni az $A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_s}$ alakú események valószínűségét, akkor egy úgynevezett szita formula segítségével ki tudjuk számítani az $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ események valószínűségét is. Továbbá megmutatjuk, hogy ez lehetővé teszi érdekes feladatok megoldását. A következő feladatot fogjuk tárgyalni:

7. Egy estélyen megjelenik n házaspár. Egy táncmester, aki nem tudja, hogy kik házastársak és kik nem véletlen módon párba rendezi a férfiakat és nőket a tánc előtt. Mi a valószínűsége annak, hogy egyetlen házaspár sem táncol együtt? Mi ennek a valószínűségnek a határértéke, ha $n \to \infty$?

   Megoldás: Definiáljuk a következő A_j eseményeket:

   $$A_j = \text{a } j\text{-ik házaspár egütt táncol}, \quad 1 \le j \le n.$$

   Ekkor minket a $P(\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n}) = 1 - P(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$ valószínűség érdekel. Vegyük észre, hogy a $P(A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_k}) = \dfrac{(n-k)!}{n!}$ azonosság igaz. Ugyanis az összes lehetséges párbaállítások száma $n!$, míg az olyan párbaállítások száma, amelyben a j_1-ik, j_2-ik, ... , j_k-ik házaspár egy párba kerül $(n-k)!$. Továbbá érvényes a következő az irodalomban szita-formulának nevezett eredmény, amely szerepelt az előadáson is.

Szita formula. *Legyenek $A_1, \dots, A_n$ tetszőleges események egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Ekkor*

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = S_1 - S_2 + S_3 - \cdots + (-1)^{n+1} S_n,$$

ahol

$$S_k = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n} P(A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_k}).$$

A szita-formula segítségével kapjuk, hogy n házaspár esetében

$$S_k = \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{k!}.$$

Innen adódik, hogy a minket érdeklő valószínűség n házaspár esetén

$$\begin{aligned} P(\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n}) &= 1 - P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \\ &= 1 - S_1 + S_2 + \cdots + (-1)^n S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}, \end{aligned}$$

és ezért

$$P(\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \to \frac{1}{e} \quad \text{ha } n \to \infty.$$

Kiegészítés

1. Feldobunk egy szabályos pénzdarabot 100-szor egymás után. Számítsuk ki a fejdobások számának várható értékét.

   Megoldás: A fejdobások száma 0 és 100 között van. Annak valószínűsége, hogy k fejdobás következik be, $0 \le k \le 100$, $p_k = \binom{100}{k} 2^{-100}$. Ezért a dobások számának várható értéke $E\xi = \sum_{k=0}^{100} k \binom{100}{k} 2^{-100}$, ahol ξ jelőli a fejdobások számát megadó valószínűségi változót. Ezt az összeget közvetlenül kiszámíthatjuk. Valóban, mivel $k\binom{100}{k} = 100\binom{99}{k-1}$, ezért

   $$E\xi = \sum_{k=0}^{100} k \binom{100}{k} 2^{-100} = 50 \sum_{k=0}^{99} \binom{99}{k} 2^{-99} = 50 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^{99} = 50.$$

   Valójában a vizsgált várható értéket egyszerűbben is kiszámíthatjuk. Vezessük be a ξ_j valószínűségi változókat, $\xi_j = 1$, ha a j-ik dobás eredménye fej $\xi_j = 0$, ha a j-ik dobás eredménye írás, $1 \le j \le 100$. Ekkor a fejdobások száma $\xi = \sum_{j=1}^{100} \xi_j$, $E\xi = \sum_{j=1}^{100} E\xi_j$. Mivel $E\xi_j = \frac{1}{2}$, $1 \le j \le 100$, ezért $E\xi = \frac{1}{2} \cdot 100 = 50$,

2.) Feldobunk egy szabályos dobókockát 100-szor egymás után. Tekintsük a dobások eredményeinek összegét. Számítsuk ki ennek az összegnek a várható értékét.

   Megoldás: Definiáljuk az $\eta_1, \dots, \eta_{100}$ *független* valószínűségi változókat úgy, hogy η_j és a a j-ik dobás értéke megegyezik. Ekkor $P(\eta_j = k) = \frac{1}{6}$, $1 \le j \le 100$, $1 \le k \le 6$, és minket a $\xi = \sum_{j=1}^{100} \eta_j$ valószínűségi változó várható értéke érdekel. Ez könnyen kiszámolható, mert $E\xi = E \sum_{j=1}^{100} \eta_j = \sum_{j=1}^{100} E\eta_j$, $E\eta_j = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3.5$. Innen $E\xi = 350$.

   Házi feladat:

   Feldobunk egy szabályos dobókockát 100-szor egymás után. Tekintsük a páros értékű dobások eredményeinek összegét. Számítsuk ki ennek az összegnek a várható értékét.

3. Feldobunk egy szabályos pénzdarabat 100-szor egymás után. Tekintsük az egymást követő fej-fej dobássorozatok számát, és számítsuk ki annak várható értékét.

   Megoldás: Vezessük be a következő ξ_j, $1 \le j \le 99$, valószínűségi változókat: $\xi_j = 1$, ha a j-ik és $j+1$-ik dobások mindegyikének eredménye fej, $\xi_j = 0$ egyébként. Vegyük észre, hogy minket az $S = \sum_{j=1}^{99} \xi_j$ valószínűségi változó várható értéke érdekel. Ezért $ES = E\left(\sum_{j=1}^{99} \xi_j\right) = \sum_{j=1}^{99} E\xi_j = \frac{99}{4}$, mivel $E\xi_j = \frac{1}{4}$. (Érdemes megjegyezni, hogy az ebben a feladatban tekintett ξ_j valószínűségi változók nem függetlenek, de a függetlenségre nincs szükség a várható érték additivításához.)