DOLGOZAT FELADATOK

(A programozó matematikus gyakorlaton)

1.) Legyen egy urnában 10 piros és 40 fehér golyó. Húzzunk ki az urnából 10 golyót visszatevés nélkül. Mi a kihúzottt piros golyók számának a várható értéke és szórásnégyzete?

2.) Legyen ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó λ paraméterrel, azaz legyen ξ eloszlásfüggvénye $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, ha $x \ge 0$, $F(x) = 0$, ha $x < 0$. Számoljuk ki ξ^3 sűrűségfüggvényét.

3.) Legyen ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[0,1]$ intervallumban, azaz legyen sűrűségfüggvéye $f(x) = 1$, ha $0 \le x \le 1$, $f(x) = 0$, ha $x < 0$ vagy $x > 1$. Számítsuk ki a ξ^5 valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.

4.) Legyen a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\left(1 + \dfrac{1}{2}\sin x\right)$, ha $0 \le x \le 2\pi$, $f(x) = 0$, ha $x < 0$ vagy $x > 2\pi$. Számítsuk ki a ξ valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.

5.) Ledobunk a $[0,3]$ intervallumra 24 000 pontot egyenletes eloszlással, azaz egy ledobott pont egy valószínűséggel a $[0,3]$ intervalumba esik, és annak valószínűsége, hogy a ledobott pont egy $[a,b] \subset [0,3]$ intervallumba esik $\frac{b-a}{3}$. Ha egy pont a $[0,1]$ intervallumba esik, akkor felírjuk a ledobott pont helyének pontos értékét egy jegyzőkönyvbe, ha a pont az $(1,2]$ intervalumba esik, akkor az 1 számot, ha pedig a $(2,3]$ intervallumba esik, akkor a 2 számot írjuk a jegyzőkönyvbe. Adjunk becslést a mellékelt normális eloszlástáblázat segítségével annak valószínűségére, hogy a jegyzőkönyvbe írt 24 000 szám összege 27 900 és 28 150 közé esik.

6.) Legyen adva n darab $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változó egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Mikor mondjuk, hogy ezek a $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók függetlenek egymástól?

MEGOLDÁSOK

1.) Vezessük be a következő ξ_j, $1 \le j \le 10$ valószínűségi változókat: $\xi_j = 1$, ha a j-ik húzás piros $\xi_j = 0$, ha a j-ik húzás fehér. Ekkor minket az $S = \sum\limits_{j=1}^{10} \xi_j$ valószínűségi változó várható értéke és szórásnégyzete érdekel. Jegyezzük meg, hogy $E\xi_j = E\xi_1 = \frac{1}{5}$, $\operatorname{Var}\xi_j = \operatorname{Var}\xi_1 = \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$ minden $1 \le j \le 10$ indexre, és $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k) = E\xi_j\xi_k - E\xi_j E\xi_k = E\xi_1\xi_2 - E\xi_1 E\xi_2 = \frac{1}{5} \cdot \frac{9}{49} - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = -\frac{4}{1225}$ minden $1 \le j, k \le 10$, $j \ne k$ indexre. Innen $ES = \sum\limits_{j=1}^{10} E\xi_j = 2$, és $\operatorname{Var} S = \sum\limits_{j=1}^{10} \operatorname{Var}\xi_j + 2\sum\limits_{j=1}^{9}\sum\limits_{k=j+1}^{10} \operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k) = 10 \cdot \frac{4}{25} - 90 \cdot \frac{4}{1225} = \frac{64}{49}$.

2.) Jelölje $G(x)$ a ξ^3 valószínűségi változó eloszlás és $g(x)$ ξ^3 sűrűségfüggvényét. Ekkor $G(x) = P(\xi^3 < x) = P(\xi < x^{1/3}) = F(x^{1/3})$, ahol $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, ha $x \ge 0$, $F(x) = 0$, ha $x < 0$. Ezért $G(x) = 0$, ha $x < 0$, $G(x) = 1 - e^{-\lambda x^{1/3}}$. Mivel

$g(x)=\frac{dG(x)}{dx}$, ezért $g(x)=0$, ha $x<0$, $g(x)=\frac{1}{3}\lambda x^{-2/3}e^{-\lambda x^{1/3}}$, ha $x\ge 0$.

3.) *Első megoldás:* $E\xi^5=\int_0^1 x^5\,dx=\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1=\frac{1}{6}$, és $\operatorname{Var}\xi^5=E(\xi^5)^2-(E\xi^5)^2=E\xi^{10}-\left(\frac{1}{6}\right)^2$, $E\xi^{10}=\int_0^1 x^{10}\,dx=\left[\frac{x^{11}}{11}\right]_0^1=\frac{1}{11}$, ahonnan $\operatorname{Var}\xi^5=\frac{1}{11}-\frac{1}{36}=\frac{25}{396}$.

Második megoldás: Számoljuk ki először az $\eta=\xi^5$ valószínűségi változó $g(x)$ sűrűségfüggvényét. $G(x)=P(\eta<x)=P(\xi<x^{1/5})$, $G(x)=x^{1/5}$, ha $0\le x\le 1$, és $G(x)=0$, ha $x<0$, $G(x)=1$, ha $x>1$. Innen $g(x)=\frac{dG(x)}{dx}$, $g(x)=\frac{1}{5}x^{-4/5}$, ha $0\le x\le 1$, $g(x)=0$, ha $x<0$ vagy $x>1$. Ezért $E\xi^5=E\eta=\int_0^1 x\cdot\frac{1}{5}x^{-4/5}\,dx=\frac{1}{5}\left[\frac{5}{6}x^{6/5}\right]_0^1=\frac{1}{6}$, $\operatorname{Var}\xi^5=\operatorname{Var}\eta=E\eta^2-(E\eta)^2=\int_0^1 x^2\cdot\frac{1}{5}x^{-4/5}\,dx-\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{5}\left[\frac{5}{11}x^{11/5}\right]_0^1=\frac{1}{11}-\frac{1}{36}=\frac{25}{396}$.

4.) Tudjuk, hogy

$$E\xi=\int_0^{2\pi}x\frac{1}{2\pi}\left(1+\frac{1}{2}\sin x\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x\,dx+\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}x\sin x\,dx,$$

$\operatorname{Var}\xi=E\xi^2-(E\xi)^2$, és

$$E\xi^2=\int_0^{2\pi}x^2\frac{1}{2\pi}\left(1+\frac{1}{2}\sin x\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x^2\,dx+\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}x^2\sin x\,dx.$$

Továbbá $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x\,dx=\frac{1}{2\pi}\frac{(2\pi)^2}{2}=\pi$, és $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x^2\,dx=\frac{1}{2\pi}\frac{(2\pi)^3}{3}=\frac{4}{3}\pi^2$,. Parciális integrálással ($x\sin x=-x\frac{d}{dx}\cos x$ szereposztással) kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}x\sin x\,dx&=\frac{1}{4\pi}\left[-x\cos x\right]_0^{2\pi}+\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\cos x\,dx\\&=\frac{1}{4\pi}\left(-2\pi+[\sin x]_0^{2\pi}\right)=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Hasonlóan, kétszeres parciális integrálás adja, hogy

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}x^2\sin x\,dx&=\frac{1}{4\pi}\left[-x^2\cos x\right]_0^{2\pi}+\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}2x\cos x\,dx\\&=-\pi+\frac{1}{4\pi}\left[2x\sin x\right]_0^{2\pi}-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin x\,dx=-\pi+\frac{1}{4\pi}\left[2x\sin x\right]_0^{2\pi}=-\pi.\end{aligned}$$

Innen $E\xi=\pi-\frac{1}{2}$, $E\xi^2=\frac{4}{3}\pi^2-\pi$, $\operatorname{Var}\xi=\frac{4}{3}\pi^2-\pi-(\pi-\frac{1}{2})^2=\frac{\pi^2}{3}-\frac{1}{4}$.

5.) Vezessük be a következő η_j és η_j, $1\le j\le 90\ 000$, valószínűségi változókat. Legyen ξ_j a j-ik ledobott pont helyének az értéke. Vezessük be a következő $h(x)$ függvényt: $h(x)=x$, ha $0\le x\le 1$, $h(x)=1$, ha $1<x\le 2$, $h(x)=2$, ha $2<x\le 3$, és legyen $\xi_j=h(\eta_j)$. Ekkor η_j egyenletes eloszlású a $[0,3]$ intervallumban, és $\xi_j=h(\eta_j)$ a j-ik felírt pont értéke. Ezért minket a $P(104\ 500\le S\le 105\ 250)$

valószínűség értéke érdekel, ahol $S = \sum_{j=1}^{90\ 000} \xi_j$. Továbbá $E\xi_j = \int_0^3 \frac{1}{3} h(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{3} x\,dx + \int_1^2 \frac{1}{3}\,dx + \int_2^3 \frac{1}{3} \cdot 2\,dx = \frac{1}{3}(\frac{1}{2} + 1 + 2) = \frac{7}{6}$, $E\xi_j^2 = \int_0^3 \frac{1}{3} h^2(x)\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 \frac{1}{3}\,dx + \int_2^3 \frac{1}{3} \cdot 4\,dx = \frac{1}{3}(\frac{1}{3} + 1 + 4) = \frac{16}{9}$, és $\operatorname{Var} \xi_j = Ex_j^2 - (E\xi_j)^2 = \frac{16}{9} - \frac{49}{36} = \frac{5}{12}$. Ezért $ES = \frac{7}{6} \cdot 90\ 000 = 105\ 000$, $\operatorname{Var} S = \frac{5}{12} 90\ 000 = (150)^2 \cdot \frac{5}{3}$

$$P(104\ 500 \le S \le 105\ 250) = P\left(-\frac{500}{150}\sqrt{\frac{3}{5}} \le \frac{S - ES}{\sqrt{\operatorname{Var} S}} \le \frac{250}{150}\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

$$\sim \Phi\left(\frac{\sqrt{15}}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{2\sqrt{15}}{3}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{15}}{3}\right) + \Phi\left(\frac{2\sqrt{15}}{3}\right) - 1$$

a centrális határeloszlástétel alapján.

6.) **Valószínűségi változók függetlenségének a definiciója.** *Legyenek* $\xi_1, \dots, \xi_n$ *valószínűségi változók egy* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *valószínűségi mezőn. Azt mondjuk, hogy ezek a valószínűségi változók függetlenek, ha minden* $x_1, \dots, x_n$ *valós számra*

$$P(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n) = P(\xi_1 < x_1) \cdots P(\xi_n < x_n).$$

Elfogadtam a következő választ is, mert a valószínűségszámítás bizonyos eredményei szerint ez ekvivalens az eredeti definicióval.

A $\xi_1, \dots, \xi_n$ *valószínűségi változók akkor függetlenek, ha a számegyenes minden* $B_1, \dots, B_n$ *Borel mérhető részhalmazára teljesül a*

$$P(\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_n \in B_n) = P(\xi_1 \in B_1) \cdots P(\xi_n \in B_n)$$

azonosság.