

DOLGOZAT FELADATOK

(A programozó matematikus gyakorlaton)

- 1.) Legyen egy urnában 10 piros és 40 fehér golyó. Húzzunk ki az urnából 10 golyót visszatevés nélkül. Mi a kihúzott piros golyók számának a várható értéke és szórásnégyzete?
- 2.) Legyen ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó λ paraméterrel, azaz legyen ξ eloszlásfüggvénye $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, ha $x \geq 0$, $F(x) = 0$, ha $x < 0$. Számoljuk ki ξ^3 sűrűségfüggvényét.
- 3.) Legyen ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[0, 1]$ intervallumban, azaz legyen sűrűségfüggvénye $f(x) = 1$, ha $0 \leq x \leq 1$, $f(x) = 0$, ha $x < 0$ vagy $x > 1$. Számítsuk ki a ξ^5 valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.
- 4.) Legyen a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{2\pi} \left(1 + \frac{1}{2} \sin x\right)$, ha $0 \leq x \leq 2\pi$, $f(x) = 0$, ha $x < 0$ vagy $x > 2\pi$. Számítsuk ki a ξ valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.
- 5.) Ledobunk a $[0, 3]$ intervallumra 24 000 pontot egyenletes eloszlással, azaz egy ledobott pont egy valószínűséggel a $[0, 3]$ intervallumba esik, és annak valószínűsége, hogy a ledobott pont egy $[a, b] \subset [0, 3]$ intervallumba esik $\frac{b-a}{3}$. Ha egy pont a $[0, 1]$ intervallumba esik, akkor felírjuk a ledobott pont helyének pontos értékét egy jegyzőkönyvbe, ha a pont az $(1, 2]$ intervallumba esik, akkor az 1 számot, ha pedig a $(2, 3]$ intervallumba esik, akkor a 2 számot írjuk a jegyzőkönyvbe. Adjunk becslést a mellékelt normális eloszlástáblázat segítségével annak valószínűségére, hogy a jegyzőkönyvbe írt 24 000 szám összege 27 900 és 28 150 közé esik.
- 6.) Legyen adva n darab ξ_1, \dots, ξ_n valószínűségi változó egy (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mezőn. Mikor mondjuk, hogy ezek a ξ_1, \dots, ξ_n valószínűségi változók függetlenek egymástól?

MEGOLDÁSOK

- 1.) Vezessük be a következő ξ_j , $1 \leq j \leq 10$ valószínűségi változókat: $\xi_j = 1$, ha a j -ik húzás piros $\xi_j = 0$, ha a j -ik húzás fehér. Ekkor minket az $S = \sum_{j=1}^{10} \xi_j$ valószínűségi változó várható értéke és szórásnégyzete érdekel. Jegyezzük meg, hogy $E\xi_j = E\xi_1 = \frac{1}{5}$, $\text{Var} \xi_j = \text{Var} \xi_1 = \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$ minden $1 \leq j \leq 10$ indexre, és $\text{Cov}(\xi_j, \xi_k) = E\xi_j \xi_k - E\xi_j E\xi_k = E\xi_1 \xi_2 - E\xi_1 E\xi_2 = \frac{1}{5} \cdot \frac{9}{49} - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = -\frac{4}{1225}$ minden $1 \leq j, k \leq 10$, $j \neq k$ indexre. Innen $ES = \sum_{j=1}^{10} E\xi_j = 2$, és $\text{Var} S = \sum_{j=1}^{10} \text{Var} \xi_j + 2 \sum_{j=1}^9 \sum_{k=j+1}^{10} \text{Cov}(\xi_j, \xi_k) = 10 \cdot \frac{4}{25} - 90 \cdot \frac{4}{1225} = \frac{64}{49}$.
- 2.) Jelölje $G(x)$ a ξ^3 valószínűségi változó eloszlás és $g(x)$ ξ^3 sűrűségfüggvényét. Ekkor $G(x) = P(\xi^3 < x) = P(\xi < x^{1/3}) = F(x^{1/3})$, ahol $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, ha $x \geq 0$, $F(x) = 0$, ha $x < 0$. Ezért $G(x) = 0$, ha $x < 0$, $G(x) = 1 - e^{-\lambda x^{1/3}}$. Mivel

$g(x) = \frac{dG(x)}{dx}$, ezért $g(x) = 0$, ha $x < 0$, $g(x) = \frac{1}{3}\lambda x^{-2/3}e^{-\lambda x^{1/3}}$, ha $x \geq 0$.

3.) *Első megoldás:* $E\xi^5 = \int_0^1 x^5 dx = \left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$, és $\text{Var} \xi^5 = E(\xi^5)^2 - (E\xi^5)^2 = E\xi^{10} - \left(\frac{1}{6}\right)^2$, $E\xi^{10} = \int_0^1 x^{10} dx = \left[\frac{x^{11}}{11}\right]_0^1 = \frac{1}{11}$, ahonnan $\text{Var} \xi^5 = \frac{1}{11} - \frac{1}{36} = \frac{25}{396}$.

Második megoldás: Számoljuk ki először az $\eta = \xi^5$ valószínűségi változó $g(x)$ sűrűségfüggvényét. $G(x) = P(\eta < x) = P(\xi < x^{1/5})$, $G(x) = x^{1/5}$, ha $0 \leq x \leq 1$, és $G(x) = 0$, ha $x < 0$, $G(x) = 1$, ha $x > 1$. Innen $g(x) = \frac{dG(x)}{dx}$, $g(x) = \frac{1}{5}x^{-4/5}$, ha $0 \leq x \leq 1$, $g(x) = 0$, ha $x < 0$ vagy $x > 1$. Ezért $E\xi^5 = E\eta = \int_0^1 x \cdot \frac{1}{5}x^{-4/5} dx = \frac{1}{5} \left[\frac{5}{6}x^{6/5}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$, $\text{Var} \xi^5 = \text{Var} \eta = E\eta^2 - (E\eta)^2 = \int_0^1 x^2 \cdot \frac{1}{5}x^{-4/5} dx - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{5} \left[\frac{5}{11}x^{11/5}\right]_0^1 = \frac{1}{11} - \frac{1}{36} = \frac{25}{396}$.

4.) Tudjuk, hogy

$$E\xi = \int_0^{2\pi} x \frac{1}{2\pi} \left(1 + \frac{1}{2} \sin x\right) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x dx + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} x \sin x dx,$$

$\text{Var} \xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$, és

$$E\xi^2 = \int_0^{2\pi} x^2 \frac{1}{2\pi} \left(1 + \frac{1}{2} \sin x\right) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^2 dx + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \sin x dx.$$

Továbbá $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x dx = \frac{1}{2\pi} \frac{(2\pi)^2}{2} = \pi$, és $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi} \frac{(2\pi)^3}{3} = \frac{4}{3}\pi^2$. Parciális integrálással ($x \sin x = -x \frac{d}{dx} \cos x$ szereposztással) kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} x \sin x dx &= \frac{1}{4\pi} [-x \cos x]_0^{2\pi} + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos x dx \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(-2\pi + [\sin x]_0^{2\pi}\right) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Hasonlóan, kétszeres parciális integrálás adja, hogy

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \sin x dx &= \frac{1}{4\pi} [-x^2 \cos x]_0^{2\pi} + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} 2x \cos x dx \\ &= -\pi + \frac{1}{4\pi} [2x \sin x]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin x dx = -\pi + \frac{1}{4\pi} [2x \sin x]_0^{2\pi} = -\pi. \end{aligned}$$

Innen $E\xi = \pi - \frac{1}{2}$, $E\xi^2 = \frac{4}{3}\pi^2 - \pi$, $\text{Var} \xi = \frac{4}{3}\pi^2 - \pi - \left(\pi - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{4}$.

5.) Vezessük be a következő η_j és η_j , $1 \leq j \leq 90\,000$, valószínűségi változókat. Legyen ξ_j a j -ik ledobott pont helyének az értéke. Vezessük be a következő $h(x)$ függvényt: $h(x) = x$, ha $0 \leq x \leq 1$, $h(x) = 1$, ha $1 < x \leq 2$, $h(x) = 2$, ha $2 < x \leq 3$, és legyen $\xi_j = h(\eta_j)$. Ekkor η_j egyenletes eloszlású a $[0, 3]$ intervallumban, és $\xi_j = h(\eta_j)$ a j -ik felírt pont értéke. Ezért minket a $P(104\,500 \leq S \leq 105\,250)$

valószínűség értéke érdekel, ahol $S = \sum_{j=1}^{90\,000} \xi_j$. Továbbá $E\xi_j = \int_0^3 \frac{1}{3}h(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{3}x dx + \int_1^2 \frac{1}{3} dx + \int_2^3 \frac{1}{3} \cdot 2 dx = \frac{1}{3}(\frac{1}{2} + 1 + 2) = \frac{7}{6}$, $E\xi_j^2 = \int_0^3 \frac{1}{3}h^2(x) dx = \frac{1}{3} \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 \frac{1}{3} dx + \int_2^3 \frac{1}{3} \cdot 4 dx = \frac{1}{3}(\frac{1}{3} + 1 + 4) = \frac{16}{9}$, és $\text{Var } \xi_j = E\xi_j^2 - (E\xi_j)^2 = \frac{16}{9} - \frac{49}{36} = \frac{5}{12}$. Ezért $ES = \frac{7}{6} \cdot 90\,000 = 105\,000$, $\text{Var } S = \frac{5}{12} \cdot 90\,000 = (150)^2 \cdot \frac{5}{3}$

$$P(104\,500 \leq S \leq 105\,250) = P\left(-\frac{500}{150}\sqrt{\frac{3}{5}} \leq \frac{S - ES}{\sqrt{\text{Var } S}} \leq \frac{250}{150}\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \\ \sim \Phi\left(\frac{\sqrt{15}}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{2\sqrt{15}}{3}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{15}}{3}\right) + \Phi\left(\frac{2\sqrt{15}}{3}\right) - 1$$

a centrális határeloszlástétel alapján.

- 6.) **Valószínűségi változók függetlenségének a definíciója.** Legyenek ξ_1, \dots, ξ_n valószínűségi változók egy (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mezőn. Azt mondjuk, hogy ezek a valószínűségi változók függetlenek, ha minden x_1, \dots, x_n valós számra

$$P(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n) = P(\xi_1 < x_1) \cdots P(\xi_n < x_n).$$

Elfogadtam a következő választ is, mert a valószínűségszámítás bizonyos eredményei szerint ez ekvivalens az eredeti definícióval.

A ξ_1, \dots, ξ_n valószínűségi változók akkor függetlenek, ha a számegyenes minden B_1, \dots, B_n Borel mérhető részhalmazára teljesül a

$$P(\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_n \in B_n) = P(\xi_1 \in B_1) \cdots P(\xi_n \in B_n)$$

azonosság.