A november 9.-i gyakorlat témája

1.) Egy urnában 10 piros és 20 fehér golyó van. Kihúzunk visszatevés nélkül 10 golyót. A páros sorszámú húzások során fehér golyó húzás esetén nyerünk 3 forintot, piros golyó húzás során pedig nem nyerünk és nem veszítünk semmit. A páratlan sorszámú húzások során piros húzás esetén 2 forintot nyerünk, fehér golyó húzás esetén nem nyerünk és nem veszítünk semmit. Számoljuk ki a nyereményünk várható értékét és szórásnégyzetét.

Megoldás: Vezessük be a következő ξ_j, $1 \le j \le 10$, valószínűségi változókat: Páros j számokra $\xi_j = 3$, ha a j-ik húzás eredménye piros, $\xi_j = 0$, ha a j-ik húzás eredménye fehér golyó. Páratlan j számokra $\xi_j = 2$, ha a j-ik húzás eredménye piros, $\xi_j = 0$, ha a j-ik húzás eredménye fehér golyó. Ekkor az $S = \sum\limits_{j=1}^{10} \xi_j$ összeg várható értékét és szórásnégyzetét kell kiszámolnunk. Ennek érdekében számoljuk ki az $E\xi_j$ várható értékeket, $\operatorname{Var}\xi_j$ szórásnégyzeteket és $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k)$ kovarianciákat. Annak valószínűsége, hogy a j-ik húzás eredménye piros $\frac{1}{3}$, annak valószínűsége, hogy j-ik húzás eredménye fehér $\frac{2}{3}$. Ezért $E\xi_j = 2$, ha j páros, $E\xi_j = \frac{2}{3}$, ha j páratlan, és $ES = 5\left(2 + \frac{2}{3}\right) = 13\frac{1}{3}$.

A szórásnégyzet kiszámítása érdekében vegyük észre, hogy $E\xi_j^2 = 6$, $\operatorname{Var}\xi_j = 2$, ha j páros, és $E\xi_j^2 = \frac{4}{3}$, $\operatorname{Var}\xi_j = \frac{8}{9}$. Továbbá annak valószínűsége, hogy két j és k indexre $j \ne k$, a j-ik és k-ik húzás mindegyike fehér $\frac{2\cdot 19}{3\cdot 29} = \frac{38}{87}$, annak, hogy mindkét húzás piros $\frac{9}{3\cdot 29} = \frac{3}{29}$, annak, hogy az egyik húzás fehér a másik piros $\frac{2\cdot 10}{3\cdot 29} = \frac{20}{57}$. Ezért $E\xi_j\xi_k = 9 \cdot \frac{2\cdot 19}{3\cdot 29} = \frac{114}{29}$, $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k) = \frac{114}{29} - 4 = -\frac{2}{29}$, ha j és k páros, $E\xi_j\xi_k = 4 \cdot \frac{3}{29} = \frac{12}{29}$, $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k) = \frac{12}{29} - \frac{4}{9} = -\frac{8}{263}$, ha j és k páratlan, $E\xi_j\xi_k = 6 \cdot \frac{20}{57} = \frac{40}{29}$, $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k) = \frac{40}{29} - \frac{4}{3} = \frac{4}{87}$, ha j és k közül az egyik páros, a másik páratlan. Olyan (j,k) pár, $1 \le j,k \le 10$, $j \ne k$, amelyre j és k mindegyike páros vagy mindegyike páratlan, összesen 20 van, és olyan (j,k) pár, amelyekre az egyik páros, a másik páratlan $2 \cdot 5 \cdot 5 = 50$ van, ezért

$$\sum_{1 \le j,k \le 10,\, j \ne k} \operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k) = 20\left(-\frac{2}{29} - \frac{8}{263}\right) + 50 \cdot \frac{4}{87} = \frac{80}{263}.$$

Innen

$$\begin{aligned}\operatorname{Var} S &= \sum_{j=1}^{10} \operatorname{Var}\xi_j + \sum_{1 \le j,k \le 10,\, j \ne k} \operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k) \\ &= 5\left(2 + \frac{8}{9}\right) + \frac{80}{263} = \frac{130}{9} + \frac{80}{263} = \frac{3850}{263}.\end{aligned}$$

Házi feladat:

Adott két urna, mind a kettőben 10 piros és 30 fehér golyó. Kihúzunk 10 alkalommal mind a két urnából egy golyót visszatevés nélkül. Számoljuk ki azon húzáspárok számának várható értékét és szórásnégyzetét, amikor ugyanolyan színű golyót húztunk.

Meg fogunk tárgyalni néhány fontos fogalmat és alapvető eredményt általános, nem feltétlenül diszkrét értékű valószínűségi változókról. Megbeszéljük általános (nem feltétlenül diszkrét eloszlású) valószínűségi változó eloszlásának fogalmát, azt hogy mit értünk ezek várható értékén, szórásnégyzetén, és hogyan számoljuk azt ki.

Valószínűségi változó eloszlásfüggvényének a definiciója. *Legyen adva egy* $\xi(\omega)$ *(valós értékű) valószínűségi változó egy* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *valószínűségi mezőn. Ennek* $F(x)$ *eloszlásfüggvényén az* $F(x) = P(\{\omega\colon \xi(\omega) < x\})$, $-\infty < x < \infty$, *függvényt értjük.*

2.) Tekintsük egy szabályos dobókocka feldobását, illetve azt a valószínűségi változót, amely megmondja mi a dobás eredménye. Határozzuk meg ennek a ξ valószínűségi változónak az $F(x)$ eloszlásfüggvényét. Határozzuk meg a dobásértékek négyzetének az eloszlásfüggvényét.

Megoldás: Ez a ξ valószínűségi változó az 1, 2, 3, 4, 5 és 6 értékek valamelyikét veszi fel, mindegyiket $\frac{1}{6}$ valószínűséggel. Ezért annak a valószínűsége, hogy $P(\xi < x)$ nullával egyenlő, ha $x < 1$. Sőt $x = 1$ esetében is teljesül a $P(\xi < 1) = 0$ azonosság, mert annak valószínűségét nézzük, hogy a ξ valószínűségi változó szigorúan kisebb mint az x szám. Ezért $F(x) = 0$, ha $-\infty < x \le 1$. Ha $1 < x < 2$, akkor az $\{\omega\colon \xi(\omega) < x\}$ esemény azt jelenti, hogy a dobás eredménye 1. Ez az állítás igaz $x = 2$ esetében is. Ezért $F(x) = \frac{1}{6}$, ha $1 < x \le 2$. Ha $2 < x \le 3$, akkor az $\{\omega\colon \xi(\omega) < x\}$ esemény azt jelenti, hogy a dobás eredménye 1 vagy 2. Ezért $F(x) = \frac{2}{6}$, ha $2 < x \le 3$. Ezt a gondolatot végigkövetve kapjuk, hogy $F(x) = 0$, ha $-\infty < x \le 1$, $F(x) = \frac{j}{6}$, ha $j < x \le j+1$, $1 \le j \le 5$, és $F(x) = 1$, ha $6 < x < \infty$. Ha a dobások négyzetének az eloszásfüggvényére vagyunk kiváncsiak, akkor hasonlóan vizsgálhatjuk a helyzetet. Ekkor a vizsgált valószínűségi változó $G(x)$ eloszlásfüggvénye a következő lesz: $G(x) = 0$, ha $-\infty < x \le 1$, mert ebben annak valószínűsége, hogy a dobás értékének négyzete kisebb, mint x egy $x \le 1$ szám esetén 0. $G(x) = \frac{1}{6}$, ha $1 < x \le 4$, mert az az esemény, hogy a dobás értékének négyzete kisebb mint x egy $1 < x < 4$ szám esetén akkor következik be, ha a dobás értéke 1. $G(x) = \frac{2}{6}$, ha $x < 4 \le 9$, mert a dobás értékének a négyzete akkor kisebb, mint x egy $4 \le x < 9$ szám esetében, ha a dobás eredménye 1 vagy 2. Hasonlóan, $G(x) = \frac{3}{6}$, ha $9 \le x < 16$, $G(x) = \frac{4}{6}$, ha $16 \le x < 25$, $G(x) = \frac{5}{6}$, ha $25 < x \le 36$, és $G(x) = 1$, ha $36 < x$.

3.) Ledobunk egy pontot egyenletesen a $[0, 2]$ intervallumra, azaz annak valószínűsége, hogy a ledobott pont egy $[a, b] \subset [0, 2]$ intervallumba esik $\frac{b-a}{2}$. Mi a ledobott pont helyének az eloszlásfüggvénye?

Írjuk fel a ledobott pont helyének az értékét akkor, ha az a $[0, 1]$ intervallumba esik, de az 1 számot írjuk fel, ha a dobás értéke az $[1, 2]$ interllumba esik. Mi a felírt szám eloszlásfüggvénye? Mi lesz a felírt szám eloszlásfüggvénye akkor, ha abban az esetben, amikor a ledobott pont az $[1, 2]$ intervallumba esik nullát írunk, abban az eseben, ha a $[0, 1]$ intervallumba esik, akkor magát a számot írjuk fel?

Megoldás: Annak valószínűsége, hogy a ledobott pont ξ értéke kisebb, mint x $P(\xi < x) = 0$, ha $x \le 0$, $P(\xi < x) = \frac{x}{2}$, ha $0 \le x \le 2$, és $P(\xi < x) = 1$, ha $x > 1$. Ezért a ξ valószínűségi változó $F(x)$ eloszlásfügggvénye $F(x) = 0$, ha $x \le 0$, $F(x) = \frac{x}{2}$, ha $0 \le x \le 2$, és $F(x) = 1$, ha $x > 1$, azaz egy $\frac{1}{2}$ meredekségű egyenes a $[0, 2]$ intervallumon, és $F(x)$ a vízszintes $x = 1$ egyenes az $x > 2$, és az $x = 0$ vízszintes egyenes az $x < 0$ félegyenesen.

A felírt (véletlen) η szám $G(x)$ eloszlásfüggvénye az első esetben $P(\eta < x) = 0$, ha $-\infty < x \le 0$, ha $x \le 0$, $P(\eta < x) = \frac{x}{2}$, ha $0 < x \le 1$, és $P(\eta < x) = 1$, ha $x > 1$. Ez azt jelenti, hogy $G(x) = 0$, ha $x \le 0$, $G(x) = \frac{x}{2}$, ha $x \le 1$, (ebben hasonló a viselkedése az előbb tekintett $F(x)$ függvényhez), de az $x = 1$ pontban ugrik, és $G(x) = 1$, ha $x > 1$.

A második esetben tekintett véletlen szám $H(x)$ eloszlásfüggvénye hasonlóan határozható meg. A különbség az, hogy ekkor a $[0, 1]$ intervallumban $H(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$, $0 \le x \le 1$. Ekkor ugyanis a felírt szám akkor lesz kisebb, mint x, $0 \le x \le 1$, ha a ledobott pont vagy a $[0, 1]$ vagy az $1, 2]$ intervallumba esik, és ennek valószínűsége $\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$. Továbbá $H(x) = 0$, ha $x \le 0$, és $H(x) = 1$, ha $x > 1$.

Házi feladat:

Feldobunk egy pénzdarabot, amely p valószínűséggel esik a fej, $1-p$ valószínűséggel az írás oldalra kétszer egymástól függetlenül. Jelölje ξ azt a valószínűségi változót, amely a fejdobások számát adja meg. Adjuk meg a ξ valószínűségi változó $F(x)$ eloszlásfüggvényét.

Ledobunk egy pontot véletlenül egyenletes eloszlással a $[0, 1]$ intervallumba, azaz annak valószínűsége, hogy a pont egy $[a, b] \subset [0, 1]$ intervallumba esik $b - a$. Határozzuk meg a ledobott pont négyzetének az eloszlásfüggvényét.

Az előző példákban láttunk néhány példát arra, hogy hogyan nézhet ki egy eloszlásfüggvény. Most kimondok egy tételt, amely megadja, hogy milyen alakú lehet egy eloszlásfüggvény az általános esetben.

Tétel. *Legyen $\xi(\omega)$ valószínűségi változó egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, és legyen $F(x) = P(\{\omega\colon \xi(\omega) < x\})$, $-\infty < x < \infty$, e valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. Az $F(x)$ eloszlásfüggvény teljesíti a következő tulajdonságokat.*

a) *$F(x)$ monoton növekvő függvény.*

b) *$F(x)$ balról folytonos függvény, azaz $\lim\limits_{h \to 0,\, h > 0} F(x - h) = F(x)$ minden $-\infty < x < \infty$ számra.*

c) $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$.

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

Ha egy $F(x)$ függvény teljesíti az előbb megfogalmazott a)—d) tulajdonságokat, akkor az eloszlásfüggvény. Részletesebben megfogalmazva ez azt jelenti, hogy ha az $F(x)$ függvény teljesíti az a)—d) feltételeket, akkor létezik egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi *mező, és azon olyan $\xi(\omega)$ valószínűségi változó, amelynek az eloszlásfüggvénye ez az $F(x)$ függvény.*

Megtárgyaljuk röviden egy valószínűségi változó várható értékének a definicióját, de számunkra elsősorban nem ez lesz az érdekes, hanem az, hogy hogyan lehet kiszámítani egy valószínűségi változó várható értékét annak eloszlásfüggvénye illetve a később ismertetendő sűrűségfüggvénye segítségével. (Egyébként nem minden valószínűségi változónak van sűrűségfüggvénye.)

Valószínűségi változó várható értékének *formális* **definiciója.** *Legyen $\xi(\omega)$ valószínűségi változó egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. E valószínűségi változó várható értékét úgy definiáljuk, mint a $\xi(\omega)$ függvénynek az*

$$E\xi(\omega) = \int \xi(\omega) dP(\omega)$$

Lebesgue integrálját a P valószínűségi mérték szerint, feltéve, hogy $\int |\xi(\omega)| dP(\omega) < \infty$. Ha ez a feltétel nem teljesül, akkor nem definiáljuk a ξ valószínűségi változó várható értékét.

A következő *Fontos Tétel*-nek nevezett eredmény lehetővé teszi egy valószínűségi változó várható értékének kiszámítását csak a valószínűségi változó eloszlásfüggvényének az ismeretében.

Fontos Tétel. *Legyen $\xi(\omega)$ valószínűségi változó egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, amelynek $F(x)$ az $F(x) = P(\xi < x)$, $-\infty < x < \infty$, eloszlásfüggvénye. Ekkor*

$$E\xi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x F(\,dx),$$

ahol a fenti integrál Lebesgue–Stieltjes integrált jelöl az F mérték szerint. Ez a formula akkor érvényes, ha $\int_{-\infty}^{\infty} |x| F(\,dx) < \infty$. Ellenkező esetben az $E\xi$ várható értéket nem definiáltuk.

Sőt igaz a Fontos Tétel következő általánosítása.

A Fontos Tétel általánosítása. *Legyen $\xi(\omega)$ valószínűségi változó egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, amelynek $F(x)$ az $F(x) = P(\xi < x)$, $-\infty < x < \infty$, eloszlásfüggvénye. Legyen $g(x)$ tetszőleges (mérhető) függvény a számegyenesen, és definiáljuk az $\eta(\omega) = g(\xi(\omega))$ valószínűségi változót. Ekkor*

$$E\eta(\omega) = Eg(\xi(\omega)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) F(\,dx),$$

ahol a fenti integrál Lebesgue–Stieltjes integrált jelöl az F mérték szerint. Ez a formula akkor érvényes, ha $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| F(\,dx) < \infty$. Ellenkező esetben az $E\eta$ várható értéket nem definiáltuk.

Megjegyzés: Az előbb megfogalmazott eredményekben szerepelt az $\int_{-\infty}^{\infty} |x| F(\,dx) < \infty$, illetve $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| F(\,dx) < \infty$ feltétel. E feltételek természetes megfelelői annak a diszkrét valószínűségi változók esetében szerep;ő feltételnek, hogy egy diszkrét valószínűségi változó várható értékét definiáló összeg legyen abszolut konvergens.

Legyen ξ diszkrét értékű valószínűségi változó, amely valamely $x_1, x_2, \dots,$ valós értékeket vesznek fel. Ekkor

$$E\xi = \sum_i x_i P(\xi = x_i)$$
$$Eg(\xi) = \sum_i g(x_i) P(\xi = x_i),$$

feltéve, hogy a jobboldalon szereplő összegek abszolut konvergensek.

Gyakorlati szempontból, annak érdekében, hogy a leggyakrabban előforduló esetekben jobban tudjunk számolni, érdemes bevezetni egy eloszlásfüggvény sűrűségfüggvényének a definicióját. Ez lehetővé teszi, hogy a problémákban felmerülő és sokszor kényelmetlenül kezelhető Lebesgue integrálokat átírjuk mint (közönséges) Riemann integrálokat.

Sűrűségfüggvény definiciója. *Egy $F(x)$ eloszlásfüggvénynek az $f(u)$, $-\infty < u < \infty$, függvény sűrűségfüggvénye, ha minden $-\infty < x < \infty$ számra teljesül az*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$$

azonosság.

Annak érdekében, hogy megértsük, hogyan tudjuk egy eloszlásfüggvény sűrűségfüggvényét kiszámítani, idézzük fel a klasszikus analízis egyik alapvető eredményét, a Newton–Leibniz formulát.

Newton–Leibniz formula. *Legyen $F(x)$ folytonos függvény egy $[a,b]$ véges intervallumon, amely véges sok pont kivételével folytonosan deriválható. Legyen $f(u) = \left.\frac{dF(x)}{dx}\right|_{x=u}$ minden pontban, ahol az $F(\cdot)$ differenciálható. Ekkor $F(x) - F(a) = \int_a^x f(u)\,du$ minden $a \le x \le b$ számra. Továbbá, ha a fenti feltétel teljesül minden véges $[a,b]$ intervallumban, és létezik a $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x)$ határérték, akkor $F(x) - F(-\infty) = \int_{-\infty}^x f(u)\,du$ minden $-\infty < x < \infty$ számra.*

Megfordítva, ha $f(u)$, (pontosabban annak abszolut értéke) integrálható függvény egy $[a,b]$ intervallumban, és $F(x) = \int_a^x f(u)\,du$, $a \le x \le b$, akkor $f(u) = \left.\frac{dF(x)}{dx}\right|_{x=u}$ (majdnem) minden $a \le u \le b$ pontban. Ha az $f(u)$ függvény integrálható az egész számegyenesen, akkor a fenti állítás igaz $a = -\infty$ választással is.

Az eloszlásfüggvényekhez hasonlóan pontosan jellemezni lehet a sűrűségfüggvényeket. Ezt a jellemzést adja meg az alábbi tétel.

Tétel. *Egy $f(\cdot)$ (mérhető) függvény akkor és csak akkor sűrűségfüggvénye egy alkalmas eloszlásfüggvénynek, ha $f(u) \ge 0$ majdnem minden $-\infty < u < \infty$ számra, és $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,du = 1$.*

Tétel. *Jelölje $F(\cdot)$ illetve $f(\cdot)$ egy ξ valószínűségi változó eloszlás illetve sűrűségfüggvényét. Legyen $g(\cdot)$ mérhető függvény a számegyenesen. Ekkor*

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} uF(\,du) = \int_{-\infty}^{\infty} uf(u)\,du$$

és

$$Eg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)F(\,du) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)f(u)\,du$$

Definiáljuk általános (nem feltétlenül diszkrét eloszlású) valószínűségi változók szórásnégyzetét.

Szórásnégyzet definiciója. *Legyen ξ olyan valószínűségi változó, amelyre $E\xi^2 < \infty$. Ekkor e valószínűségi változó szórásnégyzete*

$$\operatorname{Var}\xi = E\,(\xi - E\xi)^2$$

(Ha $E\xi^2 = \infty$, akkor vagy nem definiáljuk a ξ valószínűségi változó szórásnégyzetét, vagy azt mondjuk, hogy $\operatorname{Var}\xi(\omega) = \infty$.

Lemma.

$$\operatorname{Var}\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2\,.$$

Néhány fontos folytonos eloszlás.

a.) *Normális eloszlásfüggvény.*

Bevezetjük a standard normális eloszlásfüggvény definicióját. Későbbi eredményekből fog kiderülni, hogy ez az eloszlás miért játszik fontos szerepet a valószínűségszámításban.

A standard normális eloszlás definiciója. *A $\Phi(x)$ standard normális eloszlás az az eloszlás, amelynek sűrűségfüggvénye a $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}$, $-\infty < u < \infty$, függvény.*

E definició helyességének igazolásához meg kell mutatni, hogy a fent definiált $\varphi(\cdot)$ függvény valóban sűrűségfüggvény. Ennek érdekében be kell bizonyítani a következő eredményt.

Tétel.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\,du = 1.$$

Normális eloszlásfüggvény definiciója: *Legyen ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó. Ekkor az $\eta = \sigma\xi + m$ valószínűségi változó, (illetve egy vele azonos eloszlású valószínűségi változó) normális eloszlású valószínűségi változó m és σ^2 paraméterrel. (Később meg fogjuk tárgyalni, hogy m az η valószínűségi változó várható értéke és σ^2 a szórásnégyzete.)*

4.) Egy m és σ^2 paraméterű η normális eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(u-m)^2/2\sigma^2}$, $-\infty < u < \infty$

Megoldás: Legyen $\eta = \sigma\xi + m$, ahol ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó. Jelölje $\Phi(x)$ a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. Ekkor η eloszlásfüggvénye $G(x) = P(\sigma\xi + m, x) = P\left(\xi < \frac{x-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$, sűrűségfüggvénye pedig $g(x) = \frac{d}{dx}G(x) = \frac{1}{\sigma}\left.\frac{d\Phi(u)}{du}\right|_{u=\frac{x-m}{\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(u-m)^2/2\sigma^2}$.

Egyenletes eloszlásfüggvény definiciója. *Egy ξ valószínűségi változó egyenletes eloszlású egy $[a,b]$ intervallumban, $-\infty < a < b < \infty$, ha sűrűségfüggvénye $f(u) = \frac{1}{b-a}$, ha $a \le u \le b$, és $f(u) = 0$ egyébként.*

5.) Számítsuk ki egy az $[a,b]$ intervallumban egyenletes eloszlású ξ valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.

Megoldás:

$$E\xi = \int_a^b u\frac{1}{b-a}\,du = \frac{1}{b-a}\left[\frac{u^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{b-a}{2},$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}\xi &= E\left(\xi - \frac{b-a}{2}\right)^2 = \int_a^b \left(u - \frac{b-a}{2}\right)^2 du = \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} u^2\,du \\ &= \frac{1}{b-a}\left[\frac{u^3}{3}\right]_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} = \frac{2}{3(b-a)}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 = \frac{(b-a)^2}{12}.\end{aligned}$$

Exponenciális eloszlásfüggvény definiciója. *Egy ξ valószínűségi változó exponenciális eloszlású λ paraméterrel, $\lambda > 0$, ha eloszlásfüggvénye, $F(x) = P(\xi < x) = 1 - e^{-\lambda x}$, ha $x \ge 0$, és $F(x) = P(\xi < x) = 0$, ha $x < 0$. Ezzel ekvivalens jellemzés: Egy valószínűségi változó exponenciális eloszlású $\lambda > 0$ paraméterrel, ha létezik $f(u)$ sűrűségfüggvénye, és az $f(u) = \lambda e^{-\lambda u}$, ha $u \ge 0$, $f(u) = 0$, ha $u \le 0$ alakú.*

6.) Számoljuk ki egy λ paraméterű ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.

Megoldás: Parciális integrálással kapjuk, hogy

$$E\xi = \int_0^\infty u\lambda e^{-\lambda u}\,du = \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty ue^{-u}\,du = \frac{1}{\lambda}\left(\left[-ue^{-u}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-u}\,du\right) = \frac{1}{\lambda},$$

$$E\xi^2 = \int_0^\infty u^2 \lambda e^{-\lambda u}\,du = \frac{1}{\lambda^2}\left(\left[u^2 e^{-u}\right]_0^\infty + \int_0^\infty 2ue^{-u}\,du\right) = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Ezért $\operatorname{Var}\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$.

7.) Mutassuk meg, hogy egy exponenciális eloszlású ξ valószínűségi változó teljesíti a következő úgynevezett örökifjú tulajdonságot:

$$P(\xi > x + y | \xi > y) = P(\xi > x)$$

minden $x \geq 0$ és $y \geq 0$ számra.

Megoldás: Mivel $P(\xi > u) = e^{-\lambda u}$ minden $u \geq 0$ számra, ezért $P(\xi > x + y | \xi > y) = \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda y}} = e^{-\lambda x} = P(\xi > x)$.

8.) Legyen ξ valószínűségi változó $f(u)$ sűrűségfüggvénnyel, a és b valós számok. Határozzuk meg az $\eta = a\xi + b$ és $\zeta = \xi^2$ valószínűségi változók sűrűségfüggvényét.

Megoldás: Legyen $F(x) = P(\xi < x) = \int_{-\infty}^x f(u)\,du$ a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. Ekkor az $\eta = a\xi + b$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a $G(x) = P(\eta < x) = P\left(\xi < \frac{x-b}{a}\right) = F\left(\frac{x-b}{a}\right)$ függvény, ha $a > 0$, és $G(x) = P(\eta < x) = P\left(\xi > \frac{x-b}{a}\right) = 1 - F\left(\frac{x-b}{a}\right)$, ha $a < 0$. Innen η sűrűségfüggvénye $g(x) = \frac{dG(x)}{dx} = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{x-b}{a}\right)$.

A $\zeta = \xi^2$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$G(x) = P(\xi^2 < x) = P\left(-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}\right) = F\left(\sqrt{x}\right) - F\left(-\sqrt{x}\right),$$

ha $x \geq 0$, és $G(x) = 0$, ha $x < 0$. Innen deriválással ζ sűrűségfüggvénye $g(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(f\left(\sqrt{x}\right) + f\left(-\sqrt{x}\right)\right)$.

Házi feladat:

Legyen egy ξ valószínűségi változónak $f(x)$ sűrűségfüggvénye. Számítsuk ki ξ^3 és ξ^4 sűrűségfüggvényét.