DOLGOZAT FELADATOK

1. Egy éven keresztül lottózunk. Mind az 52 héten kitöltünk egy szelvényt (90 számból kell eltalálni ötöt). Mi a valószínűsége annak, hogy legalább két alkalommal lesz (pontosan) hármas találatunk?
2. Feldobunk két szabályos dobókockát egymástól függetlenül. Mi a feltételes valószínűsége annak, hogy mind a két dobás eredménye páros feltéve, hogy a két dobás eredményének az összege 8?
3. Egy éttermet látogatunk meg időnként, ahol egy véletlenül kiválasztott időpontban 0,9 valószínűséggel az étterem szakácsa, 0,1 valószínűséggel pedig vendégszakács főz. Az étterem szakácsa 0,8 valószínűséggel, a vendégszakács pedig 0,1 valószínűséggel készít paprikás csirkét. Meglátogatjuk az éttermet, és azt látjuk, hogy az étlapon nincs paprikás csirke. Mi annak a valószínűsége, hogy ez alkalommal vendégszakács főz?
4. Egy szabályos dobókockát feldobunk 100-szor egymás után. Tekintsük a páros értékű dobások eredményeinek az összegét, és számítsuk ki ennek várható értékét és szórásnégyzetét.
5. Egy urnában negyven fehér és tíz piros golyó van. Kihúzunk öt golyót egymás után. Számítsuk ki a kihúzott piros színű golyók számának
   a) várható értékét, ha a golyókat visszatevés nélkül húzzuk ki.
   b) várható értékét és szórásnégyzetét, ha a golyókat visszatevéssel húzzuk ki.

Megoldások

1.) Annak a valószínűsége, hogy egy adott héten pontosan 3 találatunk van $p=\frac{\binom{5}{3}\binom{85}{2}}{\binom{90}{5}}$. Ugyanis, $\binom{90}{5}$ lehetséges húzáseredmény van, minden húzáseredmény egyformán valószínű, és $\binom{5}{3}\binom{85}{2}$ olyan kitöltés van, amely pontosan 3 találatot eredményez. (Az 5 kihúzott számból kell kiválasztani hármat és a 85 ki nem húzott számból kettőt.) Annak az eseménynek, hogy legalább 2 alkalommal volt 3 találatunk az a komplementere, hogy nulla vagy pontosan egy alkalommal volt három találatunk. Ezen események valószínűsége $(1-p)^{52}$ illetve $52p(1-p)^{51}$. Ugyanis az egyes heteken egymástól függetlenül p valószínűséggel következett be a három találat. Így annak a valószínűsége, hogy ez egyik héten sem következett be $(1-p)^{52}$, annak a valószínűsége, hogy egy előírt héten van három találatunk és az összes többi héten nincsen három találatunk $p(1-p)^{51}$, annak a valószínűsége, hogy a lehetséges 52 hét valamelyikén van 3 találatunk és az összes többi héten nincsen $52p(1-p)^{51}$. Így a minket érdeklő valószínűség $1-(1-p)^{52}-52p(1-p)^{51}$, azaz

$$1-\left(1-\frac{\binom{5}{3}\binom{85}{2}}{\binom{90}{5}}\right)^{52}-52\frac{\binom{5}{3}\binom{85}{2}}{\binom{90}{5}}\left(1-\frac{\binom{5}{3}\binom{85}{2}}{\binom{90}{5}}\right)^{51}.$$

2.) Legyen A az az esemény, hogy a dobásösszeg 8, és B az az esemény, hogy mind a két dobás páros. Ekkor minket a $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ valószínűség érdekel. Az

A esemény azt jelenti, hogy az $(2,6)$, $(3,5)$, $(4,4)$, $(5,3)$, $(2,6)$ dobások valamelyike következett be, az $A \cap B$ esemény pedig azt, hogy a $(2,6)$, $(4,4)$, $(6,2)$ dobások valamelyike következett be. (E felírásban az első koordináta jelöli az első kocka a második koordináta a második kocka dobáseredményét.) Minden lehetséges dobáspár egyformán valószínű. Ezért $P(A) = \frac{5}{36}$, $P(A \cap B) = \frac{3}{36}$, $P(B|A) = \frac{3}{5}$.

3.) Jelölje A azt az eseményt, hogy a vendégszakács főz, B pedig azt az eseményt, hogy az étlapon nincs paprikás csirke. Ekkor minket a $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ feltételes valószínűség érdekel. Tudjuk továbbá, hogy

$$P(A) = 0,1, \quad P(B|A) = 0,9 \quad \text{és} \quad P(B|\bar{A}) = 0,2.$$

Ezért $P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = 0,1 \cdot 0,9$, $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = 0,1 \cdot 0,9 + 0,9 \cdot 0,2$. Innen

$$P(A|B) = \frac{0,1 \cdot 0,9}{0,1 \cdot 0,9 + 0,9 \cdot 0,2} = \frac{1}{3}.$$

4.) Vezessük be a következő ξ_j, $1 \le j \le 100$ valószínűségi változókat: $\xi_j = 2$, ha a j-ik dobás eredménye 2, $\xi_j = 4$, ha a j-ik dobás eredménye 4, $\xi_j = 6$, ha a j-ik dobás eredménye 6, és $\xi_j = 0$, ha a j-ik dobás eredménye 1, 3 vagy 5. Ekkor a $S = \sum_{j=1}^{100} \xi_j$ valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét akarjuk kiszámolni. $E\xi_j = \frac{1}{6}(2+4+6) = 2$, $E\xi_j^2 = \frac{1}{6}(2^2+4^2+6^2) = \frac{28}{3}$, $\operatorname{Var}\xi_j = E\xi_j^2 - (E\xi_j)^2 = \frac{16}{3}$, ahonnan a ξ_j valószínűségi változók függetlensége miatt $ES = 100E\xi_1 = 200$, $\operatorname{Var} S = 100\operatorname{Var}\xi_1 = \frac{1600}{3}$.

5.) Legyen ξ_j az a valószínűségi változó, amely 1, ha a j-ik húzás piros, 0, ha a j-ik húzás fehér, $1 \le j \le 5$. Ekkor $P(\xi_j = 1) = \frac{1}{5}$, $P(\xi_j = 0) = \frac{4}{5}$, $1 \le j \le 5$, Ez igaz akár visszatevéses akár visszatevés nélküli húzás esetén. Innen $E\xi_j = \frac{1}{5}$. Minket az $S = \sum_{j=1}^{5} \xi_j$ valószínűségi változó várható értéke érdeke, illetve a b) esetben az S valószínűségi változó szórásnégyzetét is ki akarjuk számítani. Innen $E\xi_j = \frac{1}{5}$, $ES = 1$ mind az a) mind a b) esetben. A b) esetben, azaz akkor, ha a golyókat visszatevéssel húzzuk ki, akkor a ξ_j valószínűségi változók függetlenek, ezért $\operatorname{Var} S = \sum_{j=1}^{5} \operatorname{Var}\xi_j$, és $\operatorname{Var}\xi_j = E\xi_j^2 - (E\xi_j)^2$, $E\xi_j^2 = \frac{1}{5}$, $\operatorname{Var}\xi_j = \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$ minden $1 \le j \le 5$ indexre. Innen $\operatorname{Var} S = \frac{4}{5}$.