Az október 5.-i gyakorlat témája

Ezen a gyakorlaton először további feladatokat tekintünk, amelyekben feltételes valószínűségeket számolunk, majd bevezetjük a valószínűségi változó, illetve valószínűségi változó várható értékének a fogalmát (diszkrét értékű valószínűségi változók esetében), és példát mutatunk arra, hogyan kell a várható értéket kiszámolni néhány fontos esetben.

1.) Három gép gyárt csavarokat, az egyik 0.01 a második 0.02 a harmadik 0.03 valószínűséggel gyárt hibás csavarokat. A csavarokat egy raktárba viszik, és összekeverik őket. Egy gyártott csavar 0.5 valószínűséggel készült az első 0.3 valószínűséggel a második és 0.2 valószínűséggel készült a harmadik gépen. Kiveszünk egy csavart, megnézzük, és azt találjuk, hogy az hibás. Milyen valószínűséggel készült a csavar eme feltételek mellett az első gépen?

Megoldás: Jelölje A_1, A_2 illetve A_3 azt az eseményt, hogy a csavar az első, második vagy harmadik gépen készült, B azt az eseményt, hogy a csavar hibás. Ekkor minket a $P(A_1|B)$ feltételes valószínűség érdekel. Tudjuk, hogy $P(A_1) = 0.5$, $P(A_2) = 0.3$, $P(A_3) = 0.2$, továbbá $P(B|A_1) = 0.01$, $P(B|A_2) = 0.02$, és $PB(B|A_3) = 0.03$. Ekkor

$$\begin{aligned}
P(A_1|B) = \frac{P(B\cap A_1)}{P(B)} &= \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B\cap A_1)+P(B\cap A_2)+P(B\cap A_3)} \\
&= \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)} \\
&= \frac{0.01\cdot 0.5}{0.01\cdot 0.5+0.02\cdot 0.3+0.03\cdot 0.2}.
\end{aligned}$$

2. Egy teszt-vizsgán, ahol három lehetőség közül kell kiválasztani a helyes választ ketten vesznek részt. Az első résztvevő p_1, a második résztvevő pedig p_2 valószínűséggel tudja a helyes választ, továbbá a vizsga két résztvevője egymástól függetlenül tudja vagy nem tudja, hogy mi a helyes válasz. Mindkét résztvevő a jó választ jelöli meg, ha tudja azt, ellenkező esetben pedig mindentől függetlenül egyforma valószínűséggel véletlenül bejelöli a három lehetséges válasz valamelyikét. Mi a feltételes valószínűsége annak, hogy mind a két résztvevő a helyes választ jelölte be, feltéve, hogy ugyanazt a választ adta?

Megoldás: Jelölje A azt az eseményt, hogy az első diák jól válaszol, B azt az eseményt, hogy a második diák jól válaszol, D_1 azt az eseményt, hogy mind a két jelölt az elsőként felsororolt feltüntetett rossz választ D_2 pedig azt az eseményt, hogy mind a két jelölt a másodiknak felsorolt rossz választ adja. Ekkor $C = (A\cap B)\cup D_1\cup D_2$ jelöli azt az eseményt, hogy a két diák egyformán válaszol. Bennünket a $P(A\cap B|C) = \dfrac{P(A\cap B\cap C)}{P(C)} = \dfrac{P(A\cap B)}{P((A\cap B)\cup D_1\cup D_2)}$ feltételes valószínűség érdekel. Viszont $P(A) = p_1 + \dfrac{1}{3}(1-p_1) = \dfrac{1+2p_1}{3}$, $P(B) = \dfrac{1+2p_2}{3}$, és az A és B események függetlenek. Innen $P(A\cap B) = \dfrac{1+2p_1}{3}\cdot\dfrac{1+2p_2}{3}$, $P(C) =$

$R(A \cap B) + P(D_1) + P(D_2) = \dfrac{1+2p_1}{3} \cdot \dfrac{1+2p_2}{3} + 2\dfrac{1-p_1}{3} \cdot \dfrac{1-p_2}{3}$. Ugyanis $P(D_1) = P(D_2) = \dfrac{(1-p_1)}{3} \cdot \dfrac{(1-p_2)}{3}$, mivel az első jelölt akkor válaszol rosszul, ha nem tudja a helyes választ, és a három lehetőség közül az első rossz választ jelöli ki, aminek a valószínűsége $(1-p_1)\dfrac{1}{3}$, annak a valószínűsége, hogy a második jelölt ugyanezt a választ adja $(1-p_1)\dfrac{1}{3}$, a két jelölt egymástól függetlenül válaszol, ahonnan $P(D_1) = \dfrac{(1-p_1)}{3} \cdot \dfrac{(1-p_2)}{3}$. Hasonlóan, a $P(D_2)$ valószínűségre ugyanazt az értéket kapjuk. Innen

$$P(A \cap B|C) = \frac{(1+2p_1)(1+2p_2)}{(1+2p_1)(1+2p_2) + 2(1-p_1)(1-p_2)}.$$

3.) Adott két város, az igazmondók és hazugok városa. Az igazmondók városában egy kérdésre 0.9 valószínűséggel helyes a hazugok városában pedig 0.8 valószínűséggel hamis választ adnak. Megérkezünk véletlenül az egyik városba, egyforma, azaz $\frac{1}{2}$ valószínűséggel az igazmondók vagy a hazugok városába. Megkérdezzük az első embert, akivel találkozunk, hogy az igazmondók városába értünk-e. Azt a választ kapjuk, hogy nem. Mi a valószínűsége annak, hogy az igazmondók városába érkeztünk?

Megoldás: Jelölje A azt az eseményt, hogy az igazmondók városába érkeztünk, és B azt az eseményt, hogy a véletlenül megkérdezett ember azt válaszolja kérdésünkre, hogy nem az igazmondók városába érkeztünk. Ekkor minket a $P(A|B)$ feltételes valószínűség értéke érdekel. Tudjuk továbbá, hogy $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B|A) = 0.1$, $P(B|\bar{A}) = 0.2$. (Az első esetben az igazmondók városában megkérdezett ember hazudik, a másodikban a hazugok városában megkérdezett ember igazat mond.) Ezért

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})} = \frac{0.1 \cdot 0.5}{0.1 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.5} = \frac{1}{3}.$$

Házi feladat:

Egy háromnapos nyaraláson veszünk részt a Balatonnál. Minden nap a többi naptól függetlenül $\frac{2}{3}$ valószínűséggel kisüt a nap, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel nem süt ki. Azokon a napokon, amikor kisüt a nap, $\frac{2}{3}$ valószínűséggel megfürdünk a Balatonban és fagylaltot is eszünk, $\frac{1}{6}$ valószínűséggel megfürdünk a Balatonban, de nem eszünk fagylaltot, $\frac{1}{6}$ valószínűséggel nem fürdünk meg a Balatonban, de eszünk fagylaltot, és nulla annak a valószínűsége, hogy nem fürdünk és fagylaltot sem eszünk. Ha nem süt a nap, akkor $\frac{1}{4}$ annak a valószínűsége, hogy eszünk fagylaltot, és fürdünk, $\frac{1}{4}$ annak a valószínűsége, hogy eszünk fagylaltot, de nem fürdünk, $\frac{1}{4}$ annak a valószínűsége, hogy nem eszünk fagylaltot, de fürdünk, és ugyancsak $\frac{1}{4}$ annak a valószínűsége, hogy sem fagylaltot nem eszünk, sem a Balatonban nem fürdünk meg. Mi annak a feltételes valószínűsége, hogy megfürödtünk a Balatonban, feltéve hogy nem ettünk fagylaltot?

Egy fontos fogalomról és módszerről lesz szó, valószínűségi változók várható értékéről. Ennek a kérdésnek a tárgyalásához szükséges először a valószínűségi változó fogalmának megértése. Továbbá külön tárgyaljuk az úgynevezett diszkrét eloszlású valószínűségi változók fogalmát, és egyelőre csak ilyen valószínűségi változók várható értékéről fogunk beszélni. Ennek technikai okai vannak. Mint később látni fogjuk, általános valószínűségi változók esetén hasonló eredmények érvényesek, csak abban az esetben a dolgok megértése több figyelmet követel. Egy lényeges különbség a speciális diszkrét eloszlású és általános eset között az, hogy diszkrét esetben a várható érték kiszámításához elég összegeket vizsgálni, míg az általános eset kezeléséhez szükség lesz az integrálszámítási ismeretek használatára is.

Valószínűségi változó fogalma: *Legyen adva egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező. Egy ezen a téren értelmezett valós értékű (mérhető) $\xi(\omega)$ függvényt valószínűségi változónak fogunk nevezni. Azaz ξ az $\Omega \to R^1$ leképezés. Az a megkötés, hogy a függvény legyen mérhető azt jelenti, hogy minden x valós számra az $\{\omega\colon \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{A}$ feltétel teljesül.*

Diszkrét eloszlású valószínűségi változók és azok eloszlása. *Egy ξ valószínűségi változót egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn diszkrétnek vagy diszkrét eloszlásúnak hívunk, ha megadható egy véges vagy megszámlálhatóan végtelen számosságú $x_1, x_2, \cdots$, halmaz úgy, hogy az $\{\omega, \xi(\omega) = x_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, halmazok teljes eseményrendszert alkotnak. Egy diszkrét eloszlású valószínűségi változó eloszlását meghatározzák azok az $x_1, x_2, \dots$, értékek amelyeket az felvesz és a $p_n = P(\xi = x_n)$ valószínűségek. (Jegyezzük meg, hogy $\sum\limits_n P(\xi = x_n) = 1$.)*

Diszkrét eloszlású valószínűségi változó várható értéke. *Legyen ξ diszkrét eloszlású valószínűségi változó, amely $x_1, x_2, \dots$ értékeket vesz fel $p_k = P(\xi = x_k)$ valószínűséggel, $k = 1, 2, \dots$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(\xi = x_k) = 1$. A ξ valószínűségi változó várható értéke az*

$$E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k P(\xi = x_k)$$

összeg, feltéve hogy ez az összeg abszolut konvergens. Ha ez az összeg nem abszolut konvergens, akkor nem definiáljuk az $E\xi$ várható értéket.

Ahhoz, hogy a várható érték definicióját megértsük fel kell idéznünk, hogy mit jelent az, hogy egy összeg abszolut konverges, illetve meg kell értenünk, hogy miért követeltük meg, hogy a definicóban szereplő összeg teljesítse ezt a feltételt.

Összeg abszolut konvergességének a definiciója. *Azt mondjuk, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sorozat abszolut konvergens, ha nemcsak a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ összeg konvergens, hanem a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$*

összeg is. Ez utóbbi tulajdonság azzal ekvivalens, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$.

1. Megjegyzés: Példa konvergens, de nem abszolut konvergens összegre a következő váltakozó előjelű összeg. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$. Formálisan $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$.

Azt mondtuk, hogy (egyelőre) olyan valószínűségi változók várható értékéről beszélünk, amelyek megszámlálható sok értéket vesznek fel, azaz más szavakkal a felvett értékek valamilyen $x_1, x_2, \dots$ sorozat formájában felsorolhatók. Beszéltünk arról, hogy a megszámlálható halmazok lehetnek nagyon bonyolultak is, például a racionális számok sorozata is megszámlálható. Ez azt jelenti, hogy az általános esetben nincs egy természetes sorrendje a felvett $x_1, x_2, \dots,$ értékeknek. A várható érték kiszámításakor az $x_k P(\xi = x_k)$ értékeket kell összegezni, mely számok között lehet lehetnek pozitív és negatív számok egyaránt. Felmerül a kérdés, értelmes-e a definicióban szereplő összegről beszélni, vagy esetleg egészen különböző értékeket kapunk attól függően, hogy milyen sorrendben soroltuk fel az x_k számokat. A válasz az, hogy amennyiben a várható érték definiciójában szereplő összeg nemcsak konvergens, hanem abszolut konvergens is, akkor ennek az összegnek az értéke független az összeg tagjainak sorrendjétől, ezért tudunk róla beszélni. Az összeg abszolut konvergenciája viszont nem elhagyható feltétel. Ezt mondja ki az alábbi tétel.

Tétel. *Legyen adva valós számok egy tetszőleges a_n, $n = 1, 2, \dots,$ végtelen sorozata. Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ összeg is konvergens, akkor az a_n, $n = 1, 2, \dots,$ sorozat tetszőleges a_{n_k}, $k = 1, 2, \dots,$ átrendezésére igaz, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, és ez az összeg véges. Megfordítva, ha a fenti tulajdonság az a_n sorozat tetszőleges átrendezésére teljesül, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ összeg abszolut konvergens.*

Az alábbi eredmény később alapvető fontosságú lesz.

Tétel. *Legyenek ξ_1, ξ_2 (diszkrét eloszlású) valószínűségi változók, amelyeknek létezik várható értékük. Ekkor a $\xi_1 + \xi_2$ összegnek is létezik várható értéke, és*

$$E(\xi_1 + \xi_2) = E\xi_1 + E\xi_2.$$

Következmény. *Legyenek adva $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ (diszkrét eloszlású) valószínűségi változók, amelyeknek létezik várható értékük, és legyenek $c_1, \dots, c_k$ valós számok. Ekkor a $c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_k\xi_k$ valószínűségi változónak is létezik várható értéke, és*

$$E\left(c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_k\xi_k\right) = c_1 E\xi_1 + c_2 E\xi_2 + \cdots + c_k E\xi_k.$$

4.) Feldobunk egy szabályos pénzdarabot 100-szor egymás után. Számítsuk ki a fejdobások számának várható értékét.

Megoldás: A fejdobások száma 0 és 100 között van. Annak valószínűsége, hogy k fejdobás következik be, $0 \le k \le 100$, $p_k = \binom{100}{k} 2^{-100}$. Ezért a dobások számának várható értéke $E\xi = \sum_{k=0}^{100} k \binom{100}{k} 2^{-100}$, ahol ξ jelöli a fejdobások számát megadó valószínűségi változót. Ezt az összeget közvetlenül kiszámíthatjuk. Valóban, mivel $k\binom{100}{k} = 100\binom{99}{k-1}$, ezért

$$E\xi = \sum_{k=0}^{100} k\binom{100}{k} 2^{-100} = 50 \sum_{k=0}^{99} \binom{99}{k} 2^{-99} = 50\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^{99} = 50.$$

Megtárgyaljuk, hogy a fenti feladatnak létezik egyszerűbb megoldása is. Heurisztikusan úgy is érvelhetünk, hogy minden dobásban a fej-dobásunk száma várhatóan $\frac{1}{2}$-del nő, ezért a 100 dobás során bekövetkező fejdobások száma 50. Értsük meg, hogyan lehet ezt a heurisztikus érvelést precízen elmondani. Ennek érdekében először azt gondoljuk meg, hogyan lehet a fenti kérdést egy alkalmas valószínűségi mezőn tekintett valószínűségi változó várható értékeként definiálni, és azt mint egyszerű valószínűségi változók összegét felírni.

5.) Tekintsük az előző feladatban vizsgált szabályos pénzdarab 100 egymásutáni feldobását. Adjuk meg ennek egy modelljét, amelynek segítségével az előző feladat egyszerűbben a heurisztikus érvelés segítségével is megoldható.

Megoldás: Tekinthetjük például a következő modellt. Legyen a valószínűségi mező, amelyen dolgozunk a következő: Legyenek az ω elemi események a 100 hosszúságú fej-írás sorozatok, $P(\{\omega\}) = 2^{-100}$ minden $\omega = \{\dots, F, \dots, I, \dots\}$ 100 hosszúságú fej-írás sorozatra, és $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$. Definiáljunk $\xi_j(\omega)$, $1 \le j \le 100$, valószínűségi változókat a következő módon. Legyen $\xi_j(\omega) = 1$, ha az ω elemi esemény olyan 100 hosszúságú fej-írás sorozat, amelynek a j-ik koordinátája F, legyen $\xi_j(\omega) = 0$, ha az ω sorozat j-ik koordinátája I. Ekkor $\xi(\omega) = \sum_{j=1}^{100} \xi_j(\omega)$ a minket érdeklő valószínűségi változó a fejdobások száma 100 dobás során, és a ξ_j valószínűségi eloszlásait a következő képlet adja meg: $P(\xi_j(\omega) = 1) = P(\xi_j(\omega) = 0) = \frac{1}{2}$ minden $1 \le j \le 100$ számra.

Megjegyzés: Definiáltam egy valószínűségi mezőt, amelyen a valószínűségi változókat is meg tudtuk adni. Valójában nem szükséges rögzíteni pontosan a valószínűségi mezőt, amelyen dolgozunk. Olyan valószínűségi mezőt kell tekintenünk, amelyeken minden ω elemi esemény bekövetkezése esetén megtudjuk mondani, hogy mennyi a j-ik dobás eredménye. Ez azt jelenti, hogy a $\xi_j(\omega)$ valószínűségi változó értékét, amelyik 0, ha a j-ik dobás írás és 1, ha a j-ik dobás fej, definiálni tudjuk. Továbbá, definiálható a $\xi(\omega) = \sum_{j=1}^{100} \xi_j(\omega)$ valószínűségi változó értéke is, és minket az $E\xi$

várható érték érdekel. Továbbá, feltételezésünk szerint (a pénzdarab szabályos) $P(\xi_j(\omega) = 1) = P(\xi_j(\omega) = 0) = \frac{1}{2}$. Ez is egy olyan példa, amely azt mutatja, hogy a feladat megoldásához elegendő tudni a vizsgált valószínűségi változók eloszlását, az eredmény nem függ attól, hogy milyen valószínűségi modellben dolgozunk.

6.) Oldjuk meg a 4. feladatot egyszerűbben az 5. feladatban tárgyalt konstrukció segítségével.

Megoldás: Valójában a vizsgált várható értéket egyszerűbben is kiszámíthatjuk. Vezessük be a ξ_j valószínűségi változókat, $\xi_j = 1$, ha a j-ik dobás eredménye fej $\xi_j = 0$, ha a j-ik dobás eredménye írás, $1 \le j \le 100$. Ekkor a fejdobások száma $\xi = \sum\limits_{j=1}^{100} \xi_j$, $E\xi = \sum\limits_{j=1}^{100} E\xi_j$. Mivel $E\xi_j = \frac{1}{2}$, $1 \le j \le 100$, ezért $E\xi = \frac{1}{2} \cdot 100 = 50$,

7.) Feldobunk egy szabályos dobókockát 100-szor egymás után. Tekintsük a dobások eredményeinek összegét. Számítsuk ki ennek az összegnek a várható értékét.

Megoldás: Definiáljuk az $\eta_1, \dots, \eta_{100}$ *független* valószínűségi változókat úgy, hogy η_j a j-ik dobás értékével egyenlő. Ekkor $P(\eta_j = k) = \frac{1}{6}$, $1 \le j \le 100$, $1 \le k \le 6$, és minket a $\xi = \sum\limits_{j=1}^{100} \eta_j$ valószínűségi változó várható értéke érdekel. Ez könnyen kiszámolható, mert $E\xi = E \sum\limits_{j=1}^{100} \eta_j = \sum\limits_{j=1}^{100} E\eta_j$, $E\eta_j = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3.5$. Innen $E\xi = 350$.

Házi feladat:

Feldobunk egy szabályos dobókockát 100-szor egymás után. Tekintsük a páros értékű dobások eredményeinek összegét. Számítsuk ki ennek az összegnek a várható értékét.

8.) Feldobunk egy szabályos pénzdarabot 100-szor egymás után. Tekintsük az egymást követő fej-fej dobássorozatok számát, és számítsuk ki annak várható értékét.

Megoldás: Vezessük be a következő ξ_j, $1 \le j \le 99$, valószínűségi változókat: $\xi_j = 1$, ha a j-ik és $j+1$-ik dobások mindegyikének eredménye fej, $\xi_j = 0$ egyébként. Vegyük észre, hogy minket az $S = \sum\limits_{j=1}^{99} \xi_j$ valószínűségi változó várható értéke érdekel. Ezért $ES = E\left(\sum\limits_{j=1}^{99} \xi_j\right) = \sum\limits_{j=1}^{99} E\xi_j = \dfrac{99}{4}$, mivel $E\xi_j = \dfrac{1}{4}$. (Érdemes megjegyezni, hogy az ebben a feladatban tekintett ξ_j valószínűségi változók nem függetlenek, de a függetlenségre nincs szükség a várható érték additivításához.)