A szeptember 21.-i gyakorlat témája

Házi feladat:

Számítsuk ki annak valószínűségét, hogy lottón legalább három találatot érünk el.

1. Egy urnában 20 piros 30 fehér és 50 zöld golyó van. Kihúzunk visszatevéssel 10 golyót. Mi annak a valószínűsége, hogy 2 piros, 3 fehér és 5 zöld golyót húzunk ki? (Mindegyik golyót egyforma valószínűséggel választjuk.)

   Megoldás: Tekintsük először annak a valószínűségét, hogy egy előírt sorrendben pontosan két piros három fehér és öt zöld golyót húzunk. (Például az első 2 húzás piros, a 3., 4. és 5. húzás fehér és az utolsó 5 húzás zöld.) Vegyük észre, hogy minden ilyen húzássorozat valószínűsége, a különböző színű kihúzott golyók sorrendjétől függetlenül $\left(\frac{2}{10}\right)^2 \left(\frac{3}{10}\right)^3 \left(\frac{5}{10}\right)^5$. Ezután számoljuk össze, hány különböző 2 piros 3 fehér és 5 zöld golyóból álló húzássorozat van. Egy lehetséges összeszámlálási mód: A két piros húzás helyét $\binom{10}{2}$ féleképp jelölhetjük ki, a maradék 8 helyen a három fehér golyó kihúzásának a helyét $\binom{8}{3}$ féleképp jelölhetjük ki, a zöld golyók húzáshelye ezután egyértelműen meghatározott. Ezért az összes lehetséges húzássorozat száma $\binom{10}{2}\binom{8}{3} = \frac{10!}{8!\cdot 2!} \cdot \frac{8!}{3!\cdot 5!} = \frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 5!}$. Ezért a keresett valószínűség

$$\frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 5!}\left(\frac{2}{10}\right)^2 \left(\frac{3}{10}\right)^3 \left(\frac{5}{10}\right)^5 .$$

   Házi feladat:

   Egy urnában l_1 darab 1-es színű, l_2 darab 2-es színű, és így tovább l_s darab s-es színű golyó van. Hány olyan (visszatevéses) $r = r_1 + \cdots + r_s$ hosszú húzássorozat van, amelyik pontosan r_1 darab 1-es színű, r_2 darab 2-es színű, és így tovább r_s darab s színű golyót tartalmaz?

2. Egy szabályos pénzdarabot feldobunk végtelen sokszor. Mutassuk meg, hogy annak a valószínűsége, hogy nem lesz fejdobás nulla. Annak valószínűsége, hogy legfeljebb 100 fejdobás lesz szintén nulla.

   Megoldás: Annak valószínűsége, hogy az első n dobásban nem lesz fejdobás, azaz csupa írásdobás következik be 2^{-n}. Annak valószínűsége, hogy egyáltalán nem lesz fejdobás megegyezik annak az eseménynek a valószínűségével, hogy minden n számra az első n dobásban nem lesz fejdobás, aminek valószínűsége kisebb, mint 2^{-n} minden $n = 1, 2, \dots$ számra. Ezért a vizsgált esemńy valószínűsége, amely különböző 2^{-n} valószínűségű események metszete, $n = 1, 2, \dots,$ nulla.

   Hasonlóan annak az eseménynek a valószínűsége, hogy az első $100n$ dobásban legfeljebb 100 fejdobás következik be kisebb, mint annak a valószínűsége, hogy vagy az első 100 sem a 101. és 200. közötti sem az $100(n-1)+1$. és $100n$. közötti dobásban nem történik tiszta fejdobás sorozat, és ennek valószínűsége $\left(1-2^{-100}\right)^n$. Ezért annak valószínűsége, hogy egyáltalán nem következik be fejdobás kisebb, mint $\left(1-2^{-100}\right)^n$ minden n számra, tehát nulla.

3. Ledobunk az egység intervallumra egy pontot véletlenül egyenletes eloszlásban, azaz annak valószínűsége, hogy a ledobott pont egy $[a,b]$ intervallumba esik, $[a,b] \subset [0,1]$ $b-a$-val egyenlő. Lássuk be, hogy annak valószínűsége, hogy a ledobott pont pontosan a $\frac{\pi}{6}$ pontba esik nulla.

   Megoldás: Annak valószínűsége, hogy a ledobott pont a $\frac{\pi}{6}$ pontba esik kisebb, mint annak a valószínűsége, hogy a ledobott pont a $\left[\frac{\pi}{6}-\varepsilon, \frac{\pi}{6}+\varepsilon\right]$ intervallumba esik, és ennek valószínűsége 2ε. Ez igaz minden $\varepsilon > 0$ számra. Ez csak úgy lehetséges, ha a vizsgált valószínűség nulla.

Fontos megjegyzés: *Az üres, be nem következő esemény valószínűsége nulla. Az előbb tárgyalt egyszerű feladatok azt mutatják, hogy lehetséges az, hogy egy esemény bekövetkezhet, a valószínűsége mégis nulla. Nagyon fontos, hogy ezt jól megértsük.*

4. Egy szabályos dobókockát sokszor feldobunk egymás után. Mi annak a valószínűsége, hogy a 3. hatos dobás a 20. vagy az egyik későbbi dobásban jelenik meg?

   Megoldás: Ez azt jelenti, hogy az első 19 dobásban nulla, egy vagy két hatos jelenik meg. Ennek valószínűsége $\left(\frac{5}{6}\right)^{19} + \binom{19}{1}\left(\frac{5}{6}\right)^{18} \cdot \frac{1}{6} + \binom{19}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{17} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{2}$.

   Második megoldás: Ez azt jelenti, hogy a harmadik hatos dobás eredménye a 20, 21, 22 vagy valamelyik későbbi dobás eredménye. (Tudni kell, hogy egy valószínűséggel előbb-utóbb megjelenik a harmadik fej-dobás.) Ennek valószínűsége

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{3} \sum_{k=20}^{\infty} \binom{k-1}{2} \left(\frac{5}{16}\right)^{k-3}.$$

   Annak érdekében, hogy megértsük az első megoldás jogosságát lássuk be, hogy

4a. Annak, hogy egy szabályos dobókocka végtelen sok egymás utáni feldobása során nem jelenik meg három hatos nulla a valószínűsége.

   Valójában ennek a feladatnak a megoldása hasonló a második feladat megoldásához, de leírom.

   Megoldás: Az állítás ekvivalens azzal, hogy annak valószínűsége, hogy bekövetkezik legaláb három hatos dobás 1. Ez utóbbi esemény valószínűsége viszont nagyobb mint az, hogy (akárhogyan is rögzítünk egy n egész számot) annak valószínűsége, hogy az első n dobás közül legalább egy hatos, az $n+1$-ik és $2n$-ik dobás közötti dobások közül legalább az egyik hatos és a $2n+1$-ik éa $3n$-ik dobás közötti dobások közül legalább az egyik hatos. Ennek valószínűsége viszont $\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n}\right)^{3}$. Ezért a vizsgált valószínűségnek ennél a számnál nagyobbnak kell lenni tetszőleges n-re, ami csak úgy lehetséges, hogy ez a valószínűség 1.

Felmerülhet az a kérdés, hogy hogyan lehet megmutatni valószínűségi meggondolások nélkül azt, hogy az előbb tárgyalt feladat két megoldásában szereplő két látszólag teljesen különböző kifejezés megegyezik. Megmutatom, hogy hogy a második összegben szereplő végtelen összeg összegezhető a $(1+x)^{\alpha} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^{k}$, ha $|x| < 1$

azonosság segítségével, ahol $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$. (A fenti azonosság minden valós α számra érvényes, tekinthető úgy mint az általánosított binomiális tétel, és az $(1+x)^\alpha$ függvény Taylor sorfejtéséből következik.) Azt kell észrevenni, hogy

$$\binom{k-1}{2} = \frac{(2-k)(1-k)}{2} = (-1)^{k-1}\frac{(-3)(-4)\cdots(1-k)}{(k-3)!} = (-1)^{k-1}\binom{-3}{k-3},$$

ahonnan $\sum\limits_{k=3}^{\infty}\binom{k-1}{2}\left(\frac{5}{16}\right)^{k-3} = \sum\limits_{k=3}^{\infty}\binom{-3}{k-3}\left(-\frac{5}{16}\right)^{k-3} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\binom{-3}{k}\left(-\frac{5}{16}\right)^{k} = \left(1-\frac{5}{6}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{6}\right)^{-3}$. Tehát $\left(\frac{1}{6}\right)^3\sum\limits_{k=3}^{\infty}\binom{k-1}{2}\left(\frac{5}{16}\right)^{k-3} = 1$. Ez az azonosság ekvivalens azzal az állítással, hogy egy szabályos dobókocka végtelen sok egymás utáni feldobása esetén 1 valószínűséggel legalább 3 hatos dobás történik.

5. Egy urnában 20 piros és 30 fehér golyó van. Kihúzunk egymás után 10 golyót visszatevéssel. Mi annak a valószínűsége, hogy az első húzás piros? Mi annak a valószínűsége, hogy a második húzás piros? Annak, hogy az ötödik húzás piros? Annak, hogy az első és második húzás piros? Annak, hogy a második és ötödik húzás piros?

   Megoldás: Minden golyót egyforma valószínűséggel húzunk ki, húsz piros és harminc fehér golyó közül választhatunk. Ezért annak a valószínűsége, hogy az első húzás eredménye piros ezért $\frac{20}{30}$. Ugyanez a valószínűsége annak, hogy a második vagy annak a valószínűsége, hogy az ötödik húzás piros szintén $\frac{20}{50}$, ugyanis mindegyik esetben 50 golyóból kell kiválasztanunk 20-t, mindegyik golyó húzása egyforma valószínű. Hasonlóan látható, hogy annak valószínűsége, hogy az első és második húzás piros, $\left(\frac{2}{5}\right)^2$, és ugyanez annak a valószínűsége, hogy a második és ötödik húzás piros.

   Az előző feladat számunkra elsősorban azért érdekes, mert párhuzamba állítható a következő feladattal.

6. Egy urnában 20 piros és 30 fehér golyó van. Kihúzunk egymás után 10 golyót visszatevés nélkül. Mi annak a valószínűsége, hogy az első húzás piros? Mi annak a valószínűsége, hogy a második húzás piros? Annak, hogy az ötödik húzás piros? Annak, hogy az első és második húzás piros? Annak, hogy a második és ötödik húzás piros?

   Megoldás: Annak valószínűsége, hogy az első húzás piros $\frac{20}{50}$, annak a valószínűsége, hogy az első és második húzás piros $\frac{20}{50}\frac{19}{49}$. Ez hasonlóan látható, mint az előző feladat megoldása. Annak valószínűsége, hogy a második húzás piros megegyezik annak a valószínűségével, hogy vagy az első húzás piros és a második húzás piros vagy az első húzás fehér és a második húzás piros. Ennek valószínűsége $\frac{20}{50}\frac{19}{49} + \frac{30}{50}\frac{20}{49} = \frac{20(19+30)}{50\cdot 49} = \frac{20}{50}$. Ez azt jelenti, hogy annak valószínűsége, hogy a második húzás piros megegyezik annak valószínűségével, hogy az első húzás piros. Annak valószínűsége, hogy a második és ötödik húzás megegyezik annak valószínűségével, hogy az első és a második húzás piros. Ez belátható hasonlóan az előző számoláshoz, de ez kissé bonyolult. Megmutatjuk, hogy az események halmazokkal való reprezentációjával ez a feladat egyszerűbben megoldható.

6a.) Vezessük be a következő eseményeket az előző feladatban: Legyen $A(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{10})$, $\varepsilon_j=\pm1$, $1\le j\le 10$, az az esemény, amelyik akkor következik be, ha a 10 húzás során a j-ik húzás piros, ha ε_j, azaz a j-ik koordináta 1, és a j-ik húzás fehér, ha a j-ik koordináta -1. Lássuk be, hogy ilyen módon a valószínűségi mező egy 2^{10} elemű particióját definiáltuk. Továbbá az az esemény, hogy a második és ötödik húzás piros megegyezik az $\bigcup\limits_{\varepsilon_2=1,\,\varepsilon_5=1} A(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{10})$ eseménnyel, az az esemény pedig, hogy az első és második húzás piros megegyezik az $\bigcup\limits_{\varepsilon_1=1,\,\varepsilon_2=1} A(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{10})$ eseménnyel. Mutassuk meg, hogy az $A(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{10})$, $\varepsilon_j=\pm1$, esemény valószínűsége csak az esemény definiciójában szereplő $\varepsilon_j=1$ és $\varepsilon_j=-1$ koordináták számától függ, de független azok sorrendjétől. Lássuk be ezen észrevételek segítségével az 5. feladat hiányzó részét.

Megoldás: Két $A(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{10})$, $\varepsilon_j=\pm1$, esemény nyilvánvalóan diszunkt ha legalább egy koordinátájuk különbözik, az összes ilyen alakú esemény uniója pedig a biztos esemény, hiszen ez az unió tartalmazza a 10 hosszúságú húzássorozat összes lehetséges kimenetelét. Ez jelenti azt, hogy a felsorolt halmazok particiót alkotnak. Az, hogy az adott kifejezések a második és ötödik húzásban történt piros húzás illetve az első és második húzásban történt piros húzást jelent hasonlóan látható. Annak valószínűsége, hogy egy olyan $A(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{10})$, $\varepsilon_j=\pm1$ esemény következik be, amelynek koordinátái l piros és $10-l$ fehér húzást tartalmaznak egyenlő a

$$P(l)=\frac{20\cdot19\cdots(20-l+1)\cdot30\cdot29\cdots(30-(10-l)+1)}{50\cdot49\cdots41}$$

kifejezéssel, hiszen amikor kiszámoljuk ezt a valószínűséget ez a kifejezés jelenik meg, az ε_j-k sorrendje csak a számlálóban szereplő tényezők sorrendjének megjelenését befolyásolja. Vegyük észre, hogy az az esemńy, hogy a második és ötödik húzás piros és pontosan l piros húzás következik be $\binom{8}{l-2}$ darab olyan $A(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{10})$, $\varepsilon_j=\pm1$ esemény bekövetkezésekor történik meg, amelyek mindegyikének valószínűsége $P(l)$. Ezért annak a valószínűsége, hogy a második és ötödik húzás piros és összesen l piros húzás következik be $\binom{8}{l-2}P(l)$, annak valószínűsége pedig, hogy a második és ötödik húzás piros $\sum\limits_{l=0}^{8}\binom{8}{l-2}P(l)$. Hasonló módon annak a valószínűsége, hogy az első és második húzás piros $\sum\limits_{l=0}^{8}\binom{8}{l-2}P(l)$, tehát a két valószínűség megegyezik.

Házi feladat:

Egy urnában 20 piros és 30 fehér golyó van. Kihúzunk egymás után 10 golyót úgy, hogy minden húzás után a golyót visszadobjuk az urnába, és vele együtt visszadobunk két ugyanolyan színű golyót is. Mutassuk meg, hogy annak a valószínűsége, hogy az első és második kihúzott golyó piros megegyezik annak a valószínűségével, hogy a második és ötödik kihúzott golyó piros.