Stacionárius sorozatok előrejelzése.

Ebben az előadásban a következő kérdést fogom tárgyalni: Tekintsük valószínűségi változók egy olyan $\dots, X_{-1}, X_0, X_1, \dots$ stacionárius Gauss sorozatát, amelyre $EX_n = 0$ (minden $n = 0 \pm 1, \pm 2, \dots$ indexre), és legyen megadva ennek a sorozatnak az $r(n) = EX_k X_{k+n}$ kovarianciafüggvénye, $n = 0, 1, 2, \dots$. Ha ismerjük e sorozat múltbeli viselkedését egy n időpontig, azaz az $X_j(\omega)$ valószínűségi változónak tudjuk az értékét minden $-\infty < j \le n$ indexre, akkor hogyan lehet megadni az X_{n+1} valószínűségi változó legjobb becslését ezen információk segítségével? Az idő rövidsége miatt megelégszem a legfontosabb fogalmak és eredmények ismertetésével és néhány bizonyítás rövid leírásával.

Először megfogalmazom a feladatot kissé pontosabban. Az X_j, $-\infty < j \le n$, valószínűségi változóknak olyan $f(X_j, j \le n)$ függvényét keressük, amelyre az $E(X_{n+1} - f(X_j, j \le n))^2$ minimális. Más szavakkal az X_{n+1} valószínűségi változó legkisebb hibájú becslését keressük az X_j, $-\infty < j \le n$, valószínűségi változók segítségével, ahol a becslés hibáját úgy definiáljuk, mint a tekintett valószínűségi változó valódi és becsült értéke közötti különbség négyzetének a várható értékét.

Vegyük észre, hogy a keresett legjobb becslés megtalálása, a feltételes várható érték tulajdonságai alapján megegyezik azzal a problémával, hogy találjuk meg a X_{n+1} valószínűségi változó feltételes várható értékét, feltéve az X_j, $-\infty < j \le n$, valószínűségi változók által generált σ-algebrát. Ez a feladat átfogalmazható a következő módon is. Tekintsük az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn azon ξ valószínűségi változók összességét, amelyekre $E\xi^2 < \infty$, és vezessük be közöttük a $(\xi, \eta) = E\xi\bar{\eta}$ skalárszorzatot. (A tekintett valószínűségi változók lehetnek komplex értékűek is, és $\bar{\eta}(\omega)$ az $\eta(\omega)$ komplex konjugáltját jelöli.) Ilyen módon bevezettük a négyzetesen integrálható valószínűségi változók által generált Hilbert teret, és az előbb megfogalmazott feladat ekvivalens módon úgyis átfogalmazható, hogy meg kell adnunk a Hilbert tér X_{n+1} elemének a vetületét a tekintett Hilbert térnek az X_j, $-\infty < j \le n$, valószínűségi változók által generált σ-algebra szerint mérhető négyzetesen integrálható valószínűségi változókból álló alterére. Ez a feladat a tekintett X_j valószínűségi változók (együttes) Gauss eloszlása miatt tovább egyszerűsíthető. A keresett feltételes várható érték megegyezik az X_{n+1} valószínűségi változó vetületével az X_j, $-\infty < j \le n$, valószínűségi változók (megszámlálható) lineáris kombinációiból álló altérre, azaz a keresett becslés az az $Y = \sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j X_{n-j}$ valószínűségi változó ($EY^2 < \infty$), amelyre $EX_j(X_{n+1} - Y) = 0$ minden $-\infty < j \le n$ indexre. (Lásd az alábbi feladatot.)

Feladat:

Legyenek Y és $X_1, X_2, \dots,$ együttesen normális eloszlású (nulla várható értékű) valószínűségi változók. Ekkor az Y valószínűségi változó Z vetülete az $X_1, X_2, \dots$ valószínűségi változók négyzetesen integrálható lineáris kombinációi által kifeszített altérre (a második momentummal rendelkező valószínűségi változókból álló Hilbert térben) merőleges minden az $X_1, X_2, \dots$ valószínűségi változók által generált σ-algebrára mérhető négyzetesen integrálható valószínűségi változóra. Ez azt jelenti, hogy ez a vetület megegyezik az

$E(Y|X_1, X_2, \dots)$ feltételes várható értékkel.

Segítség: Vegyük észre, hogy az $Y - Z, X_1, X_2, \dots$ valószínűségi változók együttesen normálisak, ezért az $E(Y-Z)X_j = 0$, $j = 1, 2, \dots$, relációkból következik, hogy $Y - Z$ független az $(X_1, X_2, \dots)$ vektortól. Ezért $Y - Z$ független az X_j valószínűségi változók minden $f(X_1, X_2, \dots)$ függvényétől is. Továbbá $E(Y - Z) = 0$.

A fentiek alapján a feladat átfogalmazható úgy, mint egy a kovarianciafüggvény segítségével felírható végtelen lineáris egyenletrendszer megoldása. (Az ismeretlen c_j együtthatókat kell megtalálni a $R(n+1-k) = EX_kX_{n+1} = EYX_k = \sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j EX_{n-j}X_k = \sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j R(n-j-k)$, $-\infty < k \le n$, egyenletrendszerben.) Annak érdekében, hogy a megoldásról bizonyos hasznosabb információkat nyerhessünk, érdemes a feladatot más formában is tárgyalni. Először bevezetek néhány fogalmat és megadok néhány a Hilbert terek alapvető tulajdonságait felhasználó eredményt bizonyítás nélkül. Ezek kissé pongyolán fogalmazva azt állítják, hogy a feladatot redukálni lehet két eset vizsgálatára, amelyek közül az első eset azt jelenti, hogy már a nagyon régi megfigyelések is egyértelműen meghatározzák a rendszer további viselkedését, a második eset pedig azt, hogy a nagyon régi megfigyelések szinte semmi információt nem adnak arra, hogy mi történik a jövőben.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$H = B(X_j,\, -\infty < j < \infty), \qquad H_n = B(X_j,\, -\infty < j \le n), \quad -\infty < n < \infty,$$
$$S = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} H_n. \tag{1}$$

A fenti jelölésekben $B(X_j,\, j \in T)$, ahol T az egész számok valamely részhalmaza, a T halmaz elemeivel indexelt X_j valószínűségi változók által generált legszükebb Hilbert teret jelöli, S pedig a legnagyobb minden H_n Hilbert tér által tartalmazott Hilbert tér.

Adva egy X_n, $n = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$, stacionárius sorozat vezessük be a következő U shift operátort az X_n valószínűségi változók által kifeszített H Hilbert térben: $UX_n = X_{n+1}$, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, és ha $Y = f(X_n,\, -\infty < n < \infty) \in H$, akkor ennek UY eltoltját (shift-jét) az $UY = Uf(X_n,\, -\infty < n < \infty) = f(UX_n,\, -\infty < n < \infty) \in H$ képlettel definiáljuk. Akkor és csak akkor nevezünk valószínűségi változók egy Y_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, sorozatát az X_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, sorozat alárendelt sorozatának, ha $Y_n \in H$, ezenkívül az $Y_n \in H_n$ reláció is teljesül minden $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, ahol H_n az (1) formulában van definiálva és $UY_n = Y_{n+1}$ minden $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$ indexre. Egy Y_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, az X_n sorozatnak alárendelt sorozat nyílvánvaló módon szintén stacionárius.

Szinguláris stacionárius sorozat definiciója. *Egy Y_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$ stacionárius (Gauss) sorozatot szingulárisnak nevezünk, ha $S = H$. A $H = B(Y_j,\, -\infty < j < \infty)$, $H_n = B(Y_j,\, -\infty < j \le n)$, $S = \bigcap\limits_{n=-\infty}^{\infty} H_n$ az (1) képlethez hasonlóan* *definiáljuk. Az egyetlen különbség az, hogy jelen esetben az Y_n sorozat segítségével definiáljuk a H, H_n és S Hilbert tereket.*

Reguláris stacionárius sorozat definiciója. *Egy Z_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$ stacionárius (Gauss) sorozatot regulárisnak nevezünk, ha $S = \emptyset$. A $H = B(Z_j, -\infty < j < \infty)$, $H_n = B(Z_j, -\infty < j \le n)$, $S = \bigcap\limits_{n=-\infty}^{\infty} H_n$ az (1) képlethez hasonlóan definiáljuk. Az egyetlen különbség az, hogy jelen esetben a Z_n sorozat segítségével definiáljuk a H, H_n és S Hilbert tereket.*

Érvényes a következő egy stacionárius (Gauss) sorozat felbontásáról szóló tétel.

Tétel stacionárius sorozat felbontásáról reguláris és szinguláris sorozatok összegére. *Legyen X_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, stacionárius (Gauss) sorozat. Ekkor ennek létezik olyan*

$$X_n = Y_n + Z_n, \quad n = \dots, -1, 0, 1, \dots \tag{2}$$

előállítása valószínűségi változók két sorozatának az összegére úgy, hogy

a) Y_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, az X_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, sorozatnak alárendelt szinguláris sorozat, Z_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, az X_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, sorozatnak alárendelt reguláris sorozat.

b) Az Y_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, és Z_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, sorozatok korrelálatlanok, azaz

$$\operatorname{Cov}(Y_n, Z_m) = 0 \quad \text{minden } n, m = \dots, -1, 0, 1, \dots \text{ számpárra.}$$

Az X_n sorozat felbontása az alábbi tulajdonságú sorozatok összegére egyértelmű.

Ha Y_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, szinguláris sorozat, akkor e sorozat tetszőleges Y_k eleme benne van a $H_{-N}(Y_j, -\infty < j \le -N)$ Hilbert térben bármilyen nagy N indexre. Ez azt jelenti, hogy az Y_n sorozat múltjának ismerete bármilyen régi időpontig elegendő ahhoz, hogy az Y_k valószínűségi változót pontosan rekonstruáljuk. Ha Z_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, reguláris sorozat, akkor valamely tetszőleges Y_k elemének a vetülete a $H_{-N}(Y_j, -\infty < j \le -N)$ Hilbert térbe nagy N indexekre tart nullához. Ez informálisan azt jelenti, hogy a nagyon régi megfigyelések alig adnak információt egy Y_k valószínűségi változó becslésére. Igaz a következő Wold felbontásnak nevezett eredmény.

Tétel (Wold felbontás). *Legyen X_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, reguláris stacionárius sorozat. Ekkor létezik olyan az X_n sorozatnak alárendelt V_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, stacionárius sorozat és valós számok olyan c_k, $k = 0, 1, 2, \dots$ sorozata, emelyekre $EV_n = 0$, $EV_n^2 = 1$, $EV_nV_m = 0$, ha $n \ne m$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k^2 = EX_1^2$, és*

$$X_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k V_{n-k} \quad \text{minden } n = \dots, -1, 0, 1, \dots \text{ indexre.} \tag{3}$$

Megfordítva, ha az X_n, $n = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$, stacionárius sorozatnak létezik az adott tulajdonságú reprezentációja, akkor ez a sorozat reguláris.

A fenti eredmények a Hilbert terek általános tulajdonságait használják ki. Így például a Wold felbontásban szereplő V_k valószínűségi változókat és a (3) formulában szereplő felbontást úgy kapjuk meg, hogy minden n számra tekintjük a H_{n-1} Hilbert tér D_n ortogonális kiegészítőjét a H_n Hilbert térre, és veszünk ebben egy 1-re normált V_n vektort. Némi munkával meg lehet mutatni, hogy ezeket a V_n vektorokat választhatjuk úgy, hogy íly módon egy az X_n sorozatnak alárendelt (ortonormált elemekből álló) stacionárius sorozatot kapjunk, amelynek elemei egyben a H Hilbert tér ortonormált bázisát alkossák. Az X_n valószínűségi változók sorfejtéseként ezen bázis alapján megkapjuk a (3) formulát.

Az így kapott eredmények azért nem kielégítőek számunkra, mert önmagukban nem elegendőek ahhoz, hogy megkapjuk a minket érdeklő predikciót. Nem nehéz belátni, hogy az X_n valószínűségi változó legjobb becslése az X_j, $j \le 0$ valószínűségi változók segítségével a $\sum\limits_{k=n}^{\infty} c_k V_{n-k}$ valószínűségi változó, de eddigi ismereteink nem elegendőek ahhoz, hogy explicit módon megadjuk a c_k együtthatókat és kiszámoljuk azt, hogy a V_n valószínűségi változók hogy fejezhetők ki az X_j valószínűségi változók lineáris kombinációjaként. További probléma, hogy az eddigi eredmények nem mondják meg, hogy egy ismert kovarianciájú Gauss folyamat mikor reguláris, és ha nem reguláris, akkor hogyan lehet megtalálni a sorozat (2) formulában megadott felbontását.

Annak érdekében, hogy ezekre a kérdésekre legalább részleges válaszokat adhassunk, szükségünk van az analízis néhány klasszikus eredményére. Először ismertetem a Bochner tételt pozitív definit függvények jellemzéséről, amely lehetővé teszi annak megmutatását, hogy egy stacionárius sorozat kovariancia függvénye előállítható, mint egy úgynevezett spektrál mérték Fourier transzformáltja. Definiáljuk először a pozitív definit függvényeket.

Pozitív definit függvények és sorozatok definiciója. *Azt mondjuk, hogy egy $f(t)$ függvény a számegyenesen pozitív definit, ha minden $t_1, \ldots, t_N$ valós és $z_1, \ldots, z_N$ komplex számokból álló szám n-esre teljesül a*

$$\sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} z_k \bar{z}_l f(t_k - t_l) \ge 0$$

egyenlőtlenség, ahol $\bar{z}$ a z komplex szám konjugáltját jelöli.

Hasonlóan ha $a(n)$, $n = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$, az egész számokkal indexezett számsorozat, akkor ezt a sorozatot akkor és csak akkor nevezzük pozitív definitnek, ha minden $a_1, \ldots, a_N$ egész és $z_1, \ldots, z_N$ komplex számokból álló szám n-esre teljesül a

$$\sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} z_k \bar{z}_l a(n_k - n_l) \ge 0$$

egyenlőtlenség.

Feladat: Mutassuk meg, hogy az $f_t(x) = e^{itx}$, t valós szám, függvény pozitív definit függvény minden (valós) x paraméterre, $a_k(n) = e^{ikn}$, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, pozitív definit sorozat minden egész k számra.

A Bochner tétel a pozitív definit sorozatok és függvények jellemzését adja. Számunkra a következő egyszerű lemma miatt érdekes ez az eredmény.

Lemma. *Ha $X(t)$, $-\infty < t < \infty$, stacionárius sztochasztikus folyamat, akkor az $R(t) = EX(s)X(t+s)$ kovariancia függvény pozitív definit függvény. Ha X_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, stacionárius sorozat, akkor $R(n) = EX_mX_{n+m}$ pozitív definit sorozat.*

Megfordítva, ha $R(n)$ pozitív definit sorozat, akkor létezik valószínűségi változók olyan X_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, stacionárius sztochasztikus sorozata, amelynek ez az $R(n)$ sorozat az $R(n) = EX_kX_{k+n}$ kovarianciafüggvénye. Sőt, létezik az adott kovarianciafüggvénnyel rendelkező Gauss sorozat nulla várható értékű valószínűségi változókkal. Ez utóbbi esetben a sorozat véges dimenziós eloszlásait egyértelműen meghatározza a kovarianciafüggvény.

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hoggy $EX(t) = 0$, Rögzítsünk valamely $t_1, \dots, t_N$ valós és $z_1, \dots, z_N$ komplex számokból álló szám n-es párt és tekintsük a $\sum\limits_{k=1}^N \sum\limits_{l=1}^N z_k \bar z_l R(t_k - t_l)$ kifejezést. Vegyük észre, hogy $\sum\limits_{k=1}^N \sum\limits_{l=1}^N z_k \bar z_l R(t_k - t_l) = \sum\limits_{k=1}^N \sum\limits_{l=1}^N z_k \bar z_l EX(t_k)X(t_l) = E\left(\sum\limits_{k=1}^N z_k X(t_k)\right)\left(\overline{\sum\limits_{k=1}^N z_k X(t_k)}\right) \ge 0$.

Hasonlóan, rögzítve valamely $n_1, \dots, n_N$ egész és $z_1, \dots, z_N$ komplex számokból álló szám n-es párt. Ekkor felírhatjuk, hogy $\sum\limits_{k=1}^N \sum\limits_{l=1}^N z_k \bar z_l R(n_k - n_l) = \sum\limits_{k=1}^N \sum\limits_{l=1}^N z_k \bar z_l EX_{n_k}X_{n_l} = E\left(\sum\limits_{k=1}^N z_k X_{n_k}\right)\left(\overline{\sum\limits_{k=1}^N z_k X_{n_k}}\right) \ge 0$.

A lemma utolsó állításának bizonyításához azt kell meggondolnunk, hogy ahhoz, hogy az adott $R(n)$ kovarianciafüggvényhez létezzen olyan normális sorozat, amelynek $(X_{k_1}, \dots, X_{k_p})$ véges dimenziós eloszlásainak a kovarianciamátrixát az $R(n)$ kovarianciafüggvény határozza meg az kell, hogy ez a kovarianciamátrix pozitív definit legyen. Viszont ezt a feltételt az biztosítja, hogy az $R(n)$ sorozat pozitív definit. Ezenkívül emlékezzünk arra, hogy egy normális eloszlású véletlen vektor eloszlását annak várható értéke és kovariancia mátrixa meghatározza.

Bochner tétel. *Legyen $f(t)$, $-\infty < t < \infty$, folytonos pozitív definit függvény. Ekkor létezik olyan véges $\mu(\cdot)$ mérték a számegyenesen, amelyre*

$$f(t) = \int e^{itx} \mu(\,dx), \quad -\infty < t < \infty. \tag{4}$$

A (4) képletben szereplő μ mértéket az $f(t)$ függvény egyértelműen meghatározza.

Legyen $a(n)$, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, pozitív definit sorozat az egész számokon. Ekkor létezik olyan véges mérték a $[-\pi, \pi)$ szakaszon, amelyre

$$a(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ixn} \mu(\,dx), \quad n = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

A μ mértéket az $a(n)$ sorozat egyértelműen meghatározza.

Következmény. *Legyen X_n, $EX_n = 0$, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, stacionárius sorozat $R(n) = EX_k X_{k+n}$ kovarianciafüggvénnyel. Akkor létezik olyan egyértelműen meghatározott $G(\,dx)$ mérték a $-\pi \le x \le \pi$ intervallumon, amelyre*

$$R(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} G(\,dx), \quad n = \dots, -1, 0, 1, \dots \tag{5}$$

Speciálisan

$$EX_n^2 = R(0) = \int_{-\pi}^{\pi} G(\,dx) = G([-\pi, \pi]).$$

A G mérték teljesíti a $G(A) = G(-A)$ tulajdonságot is minden mérhető A halmazra.

Bizonyítás. Mivel az $R(n)$ sorozat pozitív definit a Bochner tételből következik az (5) formula. Továbbá, mivel $R(n) = R(-n)$, és az $R(n)$ sorozat egyértelműen meghatározza a $G(\,dx)$ mértéket, innen következik, hogy $G(A) = G(-A)$.

1. megjegyzés. Az (5) formulában szereplő G mértéket az $R(n)$ kovarianciafüggvény spektrálmértékének nevezik az irodalomban. Ha a G mérték abszolut folytonos a (Lebesgue mértékre nézve), akkor ennek $g(x) = \frac{dG}{dx}(x)$ deriváltját a kovarianciafüggvény spektrálsűrűségének nevezik. Ha létezik az $R(n)$ függvénynek $g(x)$ spektrálsűrűsége, akkor az (5) formula felírható a következő ekvivalens módon is:

$$R(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} g(x)\,dx, \quad n = \dots, -1, 0, 1, \dots \tag{5$'$}$$

2. megjegyzés. Egy a $[-\pi, \pi]$ intervallumon definiált G mértéket, amelyre $G([-\pi, \pi]) < \infty$, $G(A) = G(-A)$ minden mérhető függvényre spektrál mértéknek is neveznek. Az elnevezés oka az, hogy létezik olyan X_n, $n = -\dots, -1, 0, 1, \dots$, Gauss eloszlású stacionárius sorozat, amelynek ez a G mérték a spektrál mértéke. Azt is feltehetjük, hogy e sorozat elemei teljesítik az $EX_n = 0$ feltételt. Valóban, ha az $EX_k X_{k+n} = R(n)$ függvény segítségével meg tudjuk adni a keresett Gauss sorozat véges dimenziós eloszlásainak kovariancia mátrixát, így magukat a véges dimenziós eloszlásokat is.

A spektrál mérték bevezetése azért hasznos, mert ilyen módon a Fourier analízis módszereit tudjuk alkalmazni. Egy stacionárius sorozat kovarianciafüggvénye előáll, mint a spektrál mérték Fourier transzformáltja. A kovarianciafüggvény vagy a spektrál mérték megadása ekvivalens. Alkalmazások szempontjából sokszor hasznosabb a spektrál mértékkel dolgozni.

Legyen adva egy stacionárius Gauss folyamat valamely G spektrál mértékkel. Lehetséges és érdemes konstruálni olyan úgynevezett véletlen (normális) spektrál mértéket definiálni, amelynek segítségével magát a sztochasztikus folyamatot is elő tudjuk állítani ezen véletlen spektrál mértéknek a Fourier transzformáltjaként. Ezt az eredményt, illetve a bizonyításban szükséges gondolatmenetet röviden ismertetem. Először bevezetem a következő definiciót.

Véletlen (normális) spektrálmérték definiciója. *Legyen adva egy G spektrálmérték a $[-\pi, \pi]$ intervallumon. Azt mondjuk, hogy egy véletlen Z_G mérték véletlen a G mértéknek megfelelő normális spektrál mérték, ha teljesíti a következő tulajdonságokat.*

(i.) *Minden mérhető $A \subset [-\pi, \pi]$ halmazra létezik egy komplex értékű*

$$Z_G(A) = \mathrm{Re}\, Z_G(A) + i\mathrm{Im}\, Z_G(A)$$

valószínűségi változó, amelyet az A halmaz véletlen mértékének nevezünk.

(ii.) *A $\mathrm{Re}\, Z_G(A)$, $\mathrm{Im}\, Z_G(A)$, $A \subset [-\pi, \pi]$ mérhető halmaz, valószínűségi változók együttesen Gauss eloszlásúak, azaz bármely véges sok valószínűségi változónak ezek közül az együttes eloszlása többdimenziós normális eloszlás.*

(iii.) $EZ_G(A) = 0$ *minden $A \subset [-\pi, \pi]$ mérhető halmazra.*

(iv.) $EZ_G(A)\overline{Z_G(B)} = G(A \cap B)$, *ahol $\bar{z}$ a z szám konjugáltját jelöli.*

(v.) $\sum\limits_{j=1}^{n} Z_G(A) = Z_G\left(\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j\right)$, *ha $A_1, \dots, A_n$ diszjunkt halmazok.*

(vi.) $Z_G(-A) = \overline{Z_G(A)}$.

Észrevétel. A $\mathrm{Re}\, Z_G(A)$ és $\mathrm{Im}\, Z_G(B)$ valószínűségi változók függetlenek. Valóban, ehhez elég megmutatni a normális eloszlás miatt, hogy korrelálatlanok. Viszont

$$\begin{aligned}E\mathrm{Re}\, Z_G(A)\mathrm{Im}\, Z_G(B) &= \frac{1}{4}E\left[(Z_G(A) + \overline{Z_G(A)})(Z_G(B) - \overline{Z_G(B)})\right] \\ &= \frac{1}{4}E\left[(Z_G(A) + Z_G(-A))(\overline{Z_G(-B)} - \overline{Z_G(B)})\right] \\ &= \frac{1}{4}\left(G(A \cap (-B)) - G(A \cap B) + G((-A) \cap (-B)) - G((-A) \cap B)\right) = 0\end{aligned}$$

Feladat: Ha $(A_1) \cup (-A_1), \dots, A_n \cup (-A_n)$ diszjunktak, akkor $Z_G(A_1), \dots Z_G(A_n)$ függetlenek. Ha $A \cap (-A) = \emptyset$, akkor $\mathrm{Re}\, Z_G(A) = \mathrm{Re}\, Z_G(-A)$, $\mathrm{Im}\, Z_G(A) = \mathrm{Im}\, Z_G(-A)$, $\mathrm{Var}\, (\mathrm{Re}\, Z_G(A)) = \mathrm{Var}\, (\mathrm{Im}\, Z_G(A)) = \frac{G(A)}{2}$.
Segítség: Az első állítás bizonyításához azt kell megmutatni, hogy

$$E\mathrm{Re}\, Z_G(A_j)\mathrm{Re}\, Z_G(A_k) = 0, \quad \text{és} \quad E\mathrm{Im}\, Z_G(A_j)\mathrm{Im}\, Z_G(A_k)) = 0,$$

ha $(A_j \cup (-A_j)) \cap (A_k \cup (-A_k)) = \emptyset$. Viszont

$$E\mathrm{Re}\, Z_G(A_j)\mathrm{Re}\, Z_G(A_k) = \frac{1}{4}E(Z_G(A_j) + \overline{Z_G(-A_j)})(Z_G(A_k) + \overline{Z_G(-A_k)}) = 0$$

az adott feltételek mellett, és az $E\mathrm{Im}\, Z_G(A_j)\mathrm{Im}\, Z_G(A_k)) = 0$ reláció hasonlóan bizonyítható.

Ha $A \cap (-A) = \emptyset$, akkor $E(\mathrm{Re}\,(Z_G(A))^2 = \frac{1}{4}E(Z_G(A) + \overline{Z_G(-A)})^2 = \frac{G(A)}{2}$. Hasonlóan $E(\mathrm{Re}\,(Z_G(-A))^2 = \frac{G(A)}{2}$. Mivel $Z_G(-A) = \overline{Z_G(A)}$ az (vi) reláció szerint, innen következik a Feladat még nem tárgyalt állítása.

A fent megadott definició bár technikainak látszik természetes. Ha egy Z_G véletlen mérték teljesíti a fenti tulajdonságokat, akkor definiálhatjuk az $\int f(x)Z_G(\,dx)$ mértéket a következő módon. Először definiáljuk ezt az integrált természetes módon $f(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j I_{A_j}(x)$ alakú elemi függvényekre, ahol $A_1, \dots, A_n$ mérhető diszjunkt részhalmazai a $[-\pi, \pi]$ intervallumnak, és $I_A(\cdot)$ az A halmaz indikátorfüggvénye. A definiciót az

$$\int \left(\sum_{j=1}^{n} c_j I_{A_j}(x) \right) Z_G(\,dx) = \sum_{j=1}^{n} c_j Z_G(A_j)$$

képlettel adjuk meg. Be lehet látni, hogy teljesül az

$$E\left(\int f(x)Z_G(\,dx)\overline{\int h(x)Z_G(\,dx)} \right) = \int f(x)\overline{h(x)}G(dx) \tag{6}$$

elemi függvények minden $(f(x), h(x))$ párjára. (A fenti tulajdonságokat azért vezetük be, hogy a (6) tuljdonság érvényes legyen. Ez lehetővé teszi, hogy L_2 izomorfia segítségével kiterjesszük az $\int f(x)Z_G(\,dx)$ integrált minden olyan függvényre, amelyre $\int |f(x)|^2 G(\,dx) < \infty$, úgy, hogy a (6) reláció továbbra is érvényben maradjon. Továbbá igaz lesz az is, hogy amennyiben $f(-x) = \overline{f}(x)$, (ez jellemzi a valós értékű függvények, illetve valós értékű előjeles mértékek Fourier transzformáltját), akkor $\int f(x)Z_G(\,dx)$ valós értékű valószínűségi változó. Ezután definiáljuk a

$$X_n = \int e^{inx} Z_G(\,dx), \quad n = \dots, -1, 0, 1, \dots \tag{7}$$

integrálokat. Az X_n valószínűségi változók valós értékűek, és a (6) reláció alapján $EX_k X_{k+n} = EX_{n+k}\overline{X_k} = \int e^{inx} G(\,dx)$. Ez azt jelenti, hogy az e^{inx} függvényeknek $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, a Z_G véletlen spektrál mérték szerinti integráljának a segítségével elő tudtunk állítani egy olyan stacionárius Gauss sorozatot, amelynek spektrálmértéke a G mérték. Némi, itt nem részletezett plusz munkával be lehet látni, hogy egy adott G spektrálmértékű stacionárius Gauss sorozathoz lehet konstruálni olyan véletlen spektrál mértéket, amely magát az eredeti sorozatot állítja elő. Ezt fogalmazom meg az alábbi eredményben.

Tétel. *Legyen X_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, normális eloszlású stacionárius Gauss sorozat nulla várható értékű valószínűségi változókkal valamely G spektrál mértékkel. Ekkor lehet konstruálni a G spektrál mértéknek megfelelő normális véletlen Z_G spektrál mértéket* *úgy, hogy az e véletlen mérték szerinti integrál teljesíti a (7) képletet, azaz a kezdetben megadott X_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, sorozatot definiálja.*

Bizonyítás. Tekintsük a H teret, azaz az X_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, valószínűségi változók négyzetesen integrálható lineáris kombinációiból álló Hilbert teret, és definiáljuk a H tér I leképezését az $L_2([-\pi, \pi), \mathcal{B}, G(\,dx))$ térre, (ahol $\mathcal{B}$ jelöli a Borel σ-algebrát a $[-\pi, \pi)$ intervallum részhalmazain) a következő módon: Legyen $I\left(\sum\limits_{j=-N}^{N} c_j e^{ijx}\right) = \sum\limits_{j=-N}^{N} c_j X_j$ minden véges lineáris kombinációra. Nem nehéz belátni, hogy I normatartó leképezés. Ezért a fenti I leképezést ki tudjuk terjeszteni a véges lineáris kombinációkról azok lezártjára is. Ez az I leképezés az $L_2([-\pi, \pi)\mathcal{B}, G(\,dx))$ és a H tér között L_2 izomorfiát létesít. (Azt kell tudnunk, hogy a véges $\sum\limits_{j=-N}^{N} c_j e^{ijx}$ lineáris kombinációk az $L_2([-\pi, \pi)\mathcal{B}, G(\,dx))$ tér mindenütt sűrű részhalmazát alkotják.)

Definiáljuk a $Z_G(A)$ valószínűségi változót a $Z_G(A) = I(A)$ képlet segítségével. A $Z_G(\cdot)$ valószínűségi változók teljesítik az (i.)–(vi.) tulajdonságokat. Az (i), (ii), (iii) és (v) tulajdonságok teljesülése nyílvánvaló, a (iv) reláció következik az L_2 izomorfiából, a (vi) tulajdonság pedig az $I(-f) = \overline{I(f)}$ relációból. Továbbá az I transzformáció L_2 izomorfiája és a (6) reláció alapján $I(f) = \int f(x) Z_G(dx)$ minden $f \in L_2([-\pi, \pi), \mathcal{B}, G)$ függvényre. Tehát speciálisan $X_n = I(e^{inx}) = \int e^{inx} Z_G(\,dx)$.

A stacionárius sorozatok spekrtrálreprezentációja lehetővé teszi, hogy a komplex függvénytan mély eredményeinek a segítségével megoldjuk a predikciós problémát. Jelen leírásban csak rövid ismertetést tudok adni.

Be lehet bizonyítani, hogy egy reguláris stacionárius sorozat esetében a kovarianciafüggvénynek nemcsak spektrálmértéke van, hanem létezik $g(x)$ spektrálsűrűségfüggvénye is, amely a Lebesgue mérték szerint majdnem mindenütt pozitív. Érdemes ezt $g(x)$ sűrűségfüggvényt az egységkörvonalra "feltekerni", azaz tekinteni a $z = e^{i\lambda}$, $-\pi \le \lambda < \pi$, egységkörvonalat a komplex számsíkon, és az egységkörvonalon a $h(z) = h(e^{i\lambda}) = g(\lambda)$ a $z = e^{i\lambda}$ pontban tekinteni. A predikciós feladat megoldásához elegendő megtalálni a Wold féle reprezentáció explicit alakját, azaz meghatározni a benne szereplő c_n konstansokat, és kifejezni a ζ_n valószínűségi változókat a véletlen spektrálmérték segítségével.

A feladat fő nehézsége a következő analitikus problémára vezetődik vissza. Keressünk olyan $F(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j z^j$, $|z| < 1$, analitikus függvényeket a komplex egységkör belsejében amelyekre az $|F^2(z)|$ függvény határértéke a körvonal peremén megegyezik a $h(z)$ függvénnyel. Keressük ezen analitikus függvények között azt, amelyiknek a konstans a_0 együtthatója lehető legnagyobb.

Be lehet látni, hogy a keresett függvényosztály nem üres, és a keresett szélsőértéktulajdonsággal rendelkező függvénynek megvan az a tulajdonsága, hogy a körvonal belsejében sehol sem tűnik el. Ez a tény azért érdekes, mert ebből következik, hogy a keresett határértékproblémában (olyan analitikus függvényt keresünk, amelyiknek a határon előírt az abszolut értéke) vehetünk logaritmust. Olyan esetben, amikor egy analitikus függvény eltűnhet az értelmezési tartományban nem tudjuk a logaritmust egyértelmű függvényként definiálni. Emlékeztetek arra, hogy egy $z = |z|e^{i\lambda}$ komplex szám logaritmusa $\log z = \log |z| + i\lambda$ alakban írható, ahol a λ szám csak modulo 2π van meghatározva. Logaritmust véve, a minket érdeklő feladat úgy változik meg, hogy egy analitikus függvénynek (az eredeti analitikus függvény logaritmusának) ismerjük a reális részét a határon. Mivel egy analitikus függvény reális része harmónikus függvény, ezért az analízis néhány klasszikus eredményének a segítségével meg lehet oldani ezt a feladatot. Az így kapott megoldás lesz a keresett optimum tulajdonsággal rendelkező megoldás.

Az elvégzett analízis további értékes információkat is ad. Lehet például jellemezni a reguláris stacionárius folyamatokat. Egy stacionárius Gauss sorozat akkor és csak akkor reguláris, ha létezik $g(x)$ spektrálsűrűsége, amely teljesíti az $\int_{-\pi}^{\pi} \log g(x)\, dx > -\infty$ relációt.

Nem volt időnk a téma alaposabb áttekintésére. Ugyancsak elhagytam néhány fontos speciális eset tárgyalását. Az idősorok elméletében fontos szerepet játszó moving average és ARMA (autoregresszív moving average) folyamatok tanulmányozása is a fenti elveken alapul. A fő különbség az, hogy ezekben az esetekben a spektrál sűrűségfüggvény speciális alakú racionális törtfüggvény. A feladat itt is arra vezetődik vissza, hogy ezekből úgy vonjunk négyzetgyököt, hogy az így kapott függvény gyökei az egységkörön kívül essenek.