Markov láncok és Markov folyamatok

A valószínűségszámítás egyik fontos része a Markov folyamatok elmélete. Kissé informálisan a Markov folyamatokat úgy jellemezhetjük, mint azokat a sztochasztikus folyamatokat, amelyek jövőbeli viselkedéséről egy adott időpontig összegyüjtött információt a folyamat viselkedése a megfigyelt időintervallum végpontjában teljes mértékben tartalmazza. Ez azt jelenti, hogy annak feltételes valószínűsége, hogy valamely a folyamat jövőbeli viselkedésétől függő esemény bekövetkezik, feltéve, hogy a Markov folyamat a jelen időpontban egy adott értéket vesz fel, megegyezik ugyanennek az eseménynek a feltételes valószínűségével, feltéve a folyamat teljes múltbeli viselkedését. A pontos definició a következő.

Folytonos idejű Markov folyamat definiciója. *Legyen adva egy $X(t)$, $t \ge 0$, sztochasztikus folyamat valamely $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, amely értékeit valamely $(E, \mathcal{E})$ mérhető téren veszi fel. Azt mondjuk, hogy $X(t)$ $(E, \mathcal{E})$-térbeli értékű folytonos idejű Markov folyamat, ha minden $0 \le s \le t < \infty$ számpárra és $\mathcal{E}$-mérhető $A \in \mathcal{E}$ halmazra teljesül a*

$$P(X_t \in A | \mathcal{B}(X_s)) = P(X_t \in A | \mathcal{B}(X_u, u \le s))$$

azonosság, ahol $\mathcal{B}(X_s)$ az X_s valószínűségi változó, $\mathcal{B}(X_u, u \le s)$ pedig az összes X_u, $u \le s$, valószínűségi változó által generált σ-algebrát jelöli.

Kissé általánosabban legyen adva egy $(E, \mathcal{E})$ térbeli értékeket felvevő $X(t)$, $t \ge 0$, sztochasztikus folyamat, valamint σ-algebrák növekvő $\mathcal{F}_t$, $t \ge 0$, családja egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, azaz legyen $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, ha $s \le t$, és legyen X_t $\mathcal{F}_t$-mérhető valószínűségi változó, $t \ge 0$. Teljesüljön ezenkívül a $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}$ reláció minden $t \ge 0$ számra. Az $(X_t, \mathcal{F}_t)$, $t \ge 0$, rendszer folytonos idejű Markov folyamat, ha

$$P(X_t \in A | \mathcal{B}(X_s)) = P(X_t \in A | \mathcal{F}_s) \qquad \text{minden } 0 \le s \le t < \infty \text{ számra, és } A \in \mathcal{E} \text{ halmazra.}$$

Diszkrét idejű Markov folyamat definiciója. *Legyen adva egy X_n, $n = 1, 2, \dots$, sztochasztikus folyamat valamely $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, amely értékeit valamely $(E, \mathcal{E})$ mérhető téren veszi fel. Azt mondjuk, hogy X_n $(E, \mathcal{E})$-térbeli értékű diszkrét idejű Markov folyamat, ha minden $0 \le m \le n < \infty$ számra és $\mathcal{E}$-mérhető $A \in \mathcal{E}$ halmazra teljesül a*

$$P(X_n \in A | \mathcal{B}(X_m)) = P(X_n \in A | \mathcal{B}(X_k, k \le m))$$

azonosság, ahol $\mathcal{B}(X_m)$ az X_m valószínűségi változó, $\mathcal{B}(X_k, k \le m)$ pedig az összes X_k, $k \le m$, valószínűségi változó által generált σ-algebrát jelöli.

Kissé általánosabban tekintsünk egy $(E, \mathcal{E})$ térbeli értékeket felvevő X_n, $n = 1, 2 \dots$, sztochasztikus folyamatot, és ezenkívül σ-algebrák növekvő $\mathcal{F}_n$, $n = 1, 2, \dots$, családját egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, azaz legyen $\mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}_n$, ha $m \le n$, és legyen X_n $\mathcal{F}_n$-mérhető valószínűségi változó, $n = 1, 2, \dots$. Teljesüljön ezenkívül a $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{A}$ reláció *minden $n = 1, 2, \ldots$ számra. Az $(X_n, \mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2 \ldots$, rendszer diszkrét idejű Markov folyamat, ha*

$$P(X_n \in A|\mathcal{B}(X_m)) = P(X_n \in A|\mathcal{F}_m) \quad \textit{minden } 0 \le m \le n < \infty \textit{ számra, és } A \in \mathcal{E} \textit{ halmazra.}$$

1. megjegyzés: Az $\mathcal{F}_t = \mathcal{B}(X_u,\, u \le t)$ illetve $\mathcal{F}_n = \mathcal{B}(X_k,\, k \le n)$ választással tekinthetjük a Markov folyamatok időben folytonos illetve diszkrét definicióit az általános definició speciális eseteinek.

2. megjegyzés: A Markov folyamatok definiciójában szereplő $P(X_t \in A|\mathcal{B}(X_s))$ és $P(X_n \in A|\mathcal{B}(X_m))$ feltételes valószínűségek megadhatóak, mint az $X_s = x$ illetve $X_m = x$ feltételek valamint az s és t illetve m és n időpontok és $A \in \mathcal{E}$ halmazok függvényei. A $P(X_t \in A|X_s = x) = P_{s,t}(x, A)$ illetve $P(X_n \in A|X_m = x) = P_{m,n}(x, A)$, $x \in E$, $A \in \mathcal{E}$), $s \le t$ illetve $m \le n$ mennyiségeket átmenet valószínűségnek hívják. Szemléletes tartalmuk: Ez megadja annak valószínűségét, hogy a Markov folyamat a t illetve n időpontban az A halmaz valamely pontjába jut, feltéve, hogy az az $s < t$ illetve $m < n$ időpontban az x pontban tartózkodott. A Markov tulajdonság azt jelenti, hogy ha tudom milyen módon jutott a Markov folyamat az x pontba az s illetve m időpontban, akkor ez a plusz ismeret nem befolyásolja a fenti feltételes valószínűség értékét.

3. megjegyzés: A továbbiakban feltesszük, hogy a Markov folyamatok $P_{s,t}(x, A)$ vagy $P_{m,n}(x, A)$, $s \le t$ illetve $m \le n$ függvényei teljesítik a következő tulajdonságokat.

a) Rögzített $x \in E$ pontra $P_{s,t}(x, \cdot)$ illetve $P_{m,n}(x, \cdot)$ valószínűségi mérték az $(E, \mathcal{E})$ téren

b) Rögzített $A \in \mathcal{A}$ halmazra $P_{s,t}(\cdot, A)$ illetve $P_{m,n}(\cdot, A)$ mérhető függvény az $(E, \mathcal{E})$ téren.

c) $P_{s,s}(x, A) = 1$, ha $x \in A$ és $P_{s,s}(x, A) = 0$, ha $x \notin A$. Hasonlóan, $P_{m,m}(x, A) = 1$, ha $x \in A$ és $P_{m,m}(x, A) = 0$, ha $x \notin A$.

Ezek a tulajdonságok természetesek. Be lehet látni, hogy minden szép tulajdonságú téren definiált Markov folyamatra (például ez a helyzet, ha $(E, \mathcal{E})$ teljes szeparábilis metrikus tér a szokásos Borel σ-algebrával) meg lehet adni a feltételes átmenetvalószínűségeket úgy, hogy teljesítsék a fenti tulajdonságokat. Ennek a ténynek a bizonyítását, amely a reguláris feltételes eloszlás létezésének a bizonyításán alapul nem tárgyalom.

Lemma. *Legyen $(X_t, \mathcal{F}_t)$, $t \ge 0$, Markov folyamat valamely a $(E, \mathcal{E})$ mérhető téren valamely $P_{s,t}(x, A)$ a 3. megjegyzésban szereplő a) b) és c) tulajdonságot teljesítő átmenetvalószínűségekkel. Legyen $f(y)$, korlátos, mérhető függvény az $(E, \mathcal{E})$ téren. Ekkor*

$$E(f(X_u)|X_s = x) = \int f(y) P_{s,u}(x, dy) \quad \textit{ha } u \ge s \tag{d}$$

és

$$P_{s,t}(x,A)=\int P_{u,t}(y,A)P_{s,u}(x,\,dy)\quad ha\ s\le u\le t \tag{e}$$

Bizonyítás: Ha az f függvény egy A halmaz indikátor függvénye, akkor a (d) formula nyílván érvényes. Mivel a kifejezés mindkét oldala az f függvény lináris függvénye, ezért az azonosság érvényes halmazok indikátor függvényeinek lineáris kombinációira is. Ezután ilyen függvényekkel végrehajtott közelítések segítségével kapjuk, hogy a (d) reláció tetszőleges f függvényre érvényes.

Az e) formula bizonyításában felhasználhatjuk, hogy a Markov tulajdonság és a feltételes várható érték tulajdonságai miatt

$$\begin{aligned}P_{s,t}(x,A)&=P(X_t\in A|X_s=x)=E(E(X_t\in A|X_s,X_u)|X_s=x)\\&=E(E(X_t\in A|X_u)|X_s=x)=E(E(f(X_u)|X_s=x),\end{aligned}$$

ahol $f(y)=P(X_t\in A|X_u=y)=P_{u,t}(A,y)$. Ezért a d) reláció alapján

$$P_{s,t}(x,A)=\int P_{u,t}(A,y)P_{s,u}(dy,x),$$

amint állítottuk.

Kimondom e tétel diszkrét idejű megfelelőjét, amelyet hasonlóan bizonyíthatunk.

Lemma. *Legyen $(X_n,\mathcal{F}_n)$, $n=1,2,\dots,$ Markov folyamat valamely a $(E,\mathcal{E})$ mérhető téren valamely $P_{m,n}(x,A)$ a 3. megjegyzésban szereplő a) b) és c) tulajdonságot teljesítő átmenetvalószínűségekkel. Legyen $f(y)$, korlátos, mérhető függvény az $(E,\mathcal{E})$ téren. Ekkor*

$$E(f(X_n)|X_m=x)=\int f(y)P_{m,n}(x,dy)\quad ha\ n\ge m \tag{d$'$}$$

és

$$P_{m,n}(x,A)=\int P_{k,n}(y,A)P_{m,k}(x,\,dy)\quad ha\ m\le k\le n. \tag{e$'$}$$

Bizonyítás nélkül közlöm a következő eredményt.

Tétel. *Legyen adva egy a 3. megjegyzésben felsorolt a), b) és c) tulajdonságokat teljesítő $P_{s,t}(x,A)$ illetve $P_{m,n}(x,A)$ függvény amely teljesíti az (e) illetve (e$'$) tulajdonságot is. Legyen továbbá adva valamely P_0 valószínűségi mérték az $(E,\mathcal{E})$ téren. Ekkor létezik olyan időben folytonos Markov folyamat, amelyre $P(X_0\in A)=P_0(A)$ és $P(X_t\in A|X_s=x)=P_{s,t}(x,A)$, $x\in E$, $A\in\mathcal{E}$, $m\le n$ választással. Létezik olyan időben diszkrét Markov folyamat, amelyre $P(X_1\in A)=P_0(A)$, és $P(X_n\in A|X_m=x)=P_{s,t}(x,A)$ minden $x\in E$, $A\in\mathcal{E}$, $m\le n$ választással.*

Általában úgynevezett stacionárius Markov folyamatokkal foglalkoznak az irodalomban. Ha nem hangsúlyozzák külön az ellenkezőjét, akkor Markov folyamaton stacionárius Markov folyamatot értenek. Mi is így fogunk tenni a továbbiakban. A stacionárius Markov folyamatok definiciója a következő:

Stacionárius Markov folyamat definiciója. *Egy* X_t, $t \geq 0$, *(vagy* $X_t, \mathcal{F}_t$*) általánosított) folytonos idejű Markov folyamatot folytonos idejű stacionárius Markov folyamatnak nevezünk, ha az átmenetvalószínűségei teljesítik a* $Ps, t(x, A) = P_{t-s}(x, A)$ *azonosságot, minden* $0 \leq s \leq t$ *számpárra, azaz a* $P_{s,t}(x, A)$ *átmenetvalószínűség csak az* s *és* t *időpont között eltelt időtől függ.*

Egy X_n, $n = 1, 2, \ldots$, *(vagy* $X_n, \mathcal{F}_n$*) általánosított) diszkrét idejű Markov folyamatot diszkrét idejű stacionárius Markov folyamatnak nevezünk, ha az átmenetvalószínűségei teljesítik a* $P_{m,n}(x, A) = P_{n-m}(x, A)$ *azonosságot minden* $1 \leq m \leq n$ *számpárra, azaz a* $P_{m,n}(x, A)$ *átmenetvalószínűség csak az* m *és* n *időpont között eltelt időtől függ.*

Stacionárius Markov folyamatok átmenetvalószínűségeinek definiciója. *Egy értékeit valamely* $(E, \mathcal{E})$ *mérhető téren felvevő* X_t, $t \geq 0$, *folytonos idejű stacionárius Markov folyamat átmenetvalószínűségén a*

$$P(t, x, A) = P(X_{u+t} \in A | X_u = x) = P_{u,u+t}(x, A), \qquad t \geq 0, \quad x \in E, \quad A \in \mathcal{A},$$

feltételes valószínűségek rendszerét értjük, amely a stacionárius tulajdonság miatt nem függ az $u \geq 0$ *paramétertől.*

Hasonlóképpen egy értékeit valamely $(E, \mathcal{E})$ *mérhető téren felvevő* X_n, $n = 1, 2, \ldots$, *diszkrét idejű stacionárius Markov folyamat átmenetvalószínűségén a*

$$P(n, x, A) = P(X_{n+m} \in A | X_m = x) = P_{m,n+m}(x, A), \quad n = 1, 2, \ldots, \; x \in E, \; A \in \mathcal{A},$$

feltételes valószínűségek rendszerét értjük, amely a stacionárius tulajdonság miatt nem függ az $m = 1, 2, \ldots$ *paramétertől.*

Megjegyzés: *Stacionárius folyamatokra az (e) és (e′) tulajdonságok az előbb bevezetett* $P(t, x, A)$ *és* $P(n, x, A)$, $x \in E$, $A \in \mathcal{E}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, *átmenetvalószínűségekkel a következő formában írhatók fel.*

$$P(s + t, x, A) = \int P(t, y, A) P(s, x, dy) \quad \text{ha } s \geq 0 \text{ és } t \geq 0. \tag{1}$$

és

$$P(m + n, x, A) = \int P(n, y, A) P(m, x, dy) \quad \text{minden } m = 1, 2, \ldots \text{ és } n = 1, 2, \ldots \text{ számra.} \tag{2}$$

Ezenkívül a $P(t, x, A)$ *illetve* $P(n, x, A)$ *átmenetvalószínűségek teljesítik az alábbi tulajdonságokat: Minden rögzített* t *illetve* n *időpontra és* $x \in E$ *pontra* $P(t, x, \cdot)$ *illetve* $P(n, x, \cdot)$ *valószínűségi mérték. Minden* t *illetve* n *időpontra és* $A \in \mathcal{E}$ *halmazra* $P(t, \cdot, A)$ *illetve* $P(n, \cdot, A)$ *mérhető függvények az* $(E, \mathcal{E})$ *téren. Továbbá mind a folytonos mind a diszkrét idejű Markov folyamatok esetén teljesül a* $P(0, x, A) = 1$, *ha* $x \in A$ *és* $P(0, x, A) = 0$, *ha* $x \notin A$ *reláció. A felsorolt tulajdonságok jellemzik is a stacionárius Markov folyamatokat, azaz minden (értékeit szép topológiai tulajdonságokkal* *rendelkező téren, (például teljes szeparábilis metrikus téren) felvevő stacionárius Markov folyamathoz meg lehet adni a feltételes eloszlásokat a fenti tulajdonságokkal rendelkező átmenetvalószínűségekkel.*

A fent megfogalmazott (1) illetve (2) azonosságot az irodalomban Chapman–Kolmogorov egyenletnek nevezik.

Legyen adva egy diszkrét idejű Markov folyamat, amely értékeit valamely $(E,\mathcal{E})$ téren veszi fel. A (2) reláció szerint a Markov folyamat $P(x,A)$ átmenetvalószínűségei teljesítik a

$$P(n+1,x,A)=\int P(1,y,A)P(n,x,\,dy) \qquad \text{minden } n=1,2,\dots \text{ számra.} \tag{2a}$$

azonosságot. Ez azt jelenti, hogy ha megadjuk a $P(1,x,A)$ átmenetvalószínűségeket, akkor n szerinti indukcióval ki tudjuk számolni a $P(n,x,A)$ átmenetvalószínűségeket minden $n=1,2,\dots$ számra. A következő lemma ezen állítás megfordításaként tekinthető. Azt mondja ki, hogy amennyiben a $P(1,x,A)$ átmenet valószínűségeket tetszőleges, természetes feltételeket teljesítő módon definiáljuk, akkor a (2a) formula segítségével definiált $P(n,x,A)$ kifejezések teljesítik a (2) Chapman–Kolmogorov egyenletet.

Lemma. *Legyen adva egy $P(x,A)$, $x\in E$, $A\in\mathcal{E}$, függvényrendszer egy $(E,\mathcal{E})$ mérhető téren, amely minden rögzített $x\in E$ pontra valószínűségi mérték és minden $A\in\mathcal{A}$ halmazra mérhető függvény az $(E,\mathcal{E})$ téren. Vezessük be a $P(0,x,A)=1$, ha $x\in A$, $P(0,x,A)=0$, ha $x\notin A$, $P(1,x,A)=P(x,A)$, $x\in E$, $A\in\mathcal{E}$ függvényeket, majd definiáljuk a $P(n,x,A)$, $n=1,2,\dots,$ $x\in E$, $A\in\mathcal{E}$, $n=1,2,\dots,$ függvényeket n szerinti teljes indukcióval a (2a) képlet segítségével. Az így definiált $P(n,x,A)$ függvények teljesítik a következő tulajdonságokat.*

i.) *$P(n,x,\cdot)$ valószínűségi mérték az $E,\mathcal{E})$ téren minden $n=1,2,\dots$ számra és $x\in E$ pontra.*

ii.) *$P(n,\cdot,A)$ mérhető függvény az $(E,\mathcal{E})$ téren minden $n=1,2,\dots$ számra és $x\in E$ pontra.*

iii.) *A $P(n,x,A)$ függvények teljesítik a (2) Chapman–Kolmogorov egyenletet.*

Megjegyzés: A fent kimondott lemma fő mondanivalója az, hogy megadva az 1 lépéses $P(1,x,A)$ átmenetvalószínűségeket úgy, hogy azok teljesítsék a szükséges feltételeket természetes módon lehet definiálni egy olyan (stacionárius) Markov folyamatot, amelynek ezek az 1 lépéses átmenetvalószínűségei.

A lemma bizonyítása. Az n szám szerinti teljes indukcióval látható, (felhasználva az integrálok tulajdonságait), hogy a $P(n,x,A)$ függvények teljesítik az (1) és (2) tulajdonságokat. Továbbá m szerinti teljes indukcióval kapjuk, feltéve az indukciós feltevést, mely szerint a (2) azonosság teljesül valamely m egész és minden $n=1,2,\dots$ számra, hogy érvényes a következő azonosság:

$$\int f(y)P(n+m,x,\,dy)=\int\left[\int f(y)P(m,z,\,dy)\right]P(n,x,\,dz). \tag{3}$$

(A (3) azonosságba beleértjük azt is, hogy az $\int f(y)P(m,z,\,dy)$ függvény mérhető, ezért lehet az integráljáról beszélni.) Valóban, abban a speciális esetben, ha $f(y) = I_A(y)$, egy $A \in \mathcal{E}$ halmaz indikátor függvénye, akkor a (3) azonosság azt jelenti, hogy

$$P(n+m,x,A) = \int P(m,z,A)P(n,x,\,dz),$$

ami az indukciós feltevés szerint érvényes azonosság. Ezután kiterjeszthetjük ennek az azonosságnak az érvényességét indikátor függvények tetszőleges lineáris kombinációira, majd (egyenletes konvergencia segítségével végrehajtott) határátmenet segítségével tetszőleges mérhető és korlátos függvényre.

Alkalmazva a (3) formulát az $f(y) = P(1,y,A)$ függvényre valamely A mérhető halmaz segítségével azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
P(n+m+1,y,A) &= \int P(1,y,A)P(n+m,x,\,dy) \\
&= \int \left[\int P(1,y,A)P(m,z,\,dy)\right] P(n,x,\,dz) \\
&= \int P(m+1,z,A)P(n,x,\,dz).
\end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy az indukciós feltevésünk $m+1$-re is érvényes, és ezt kellett belátnunk.

A következő definicióban csak bizonyos az irodalomban elterjedt szóhasználatot vezetünk be.

Markov láncok definiciója. *Ha egy (folytonos vagy diszkrét idejű Markov folyamat egy $(E,\mathcal{E})$ mérhető téren veszi fel az értékeit, akkor ezt az $(E,\mathcal{E})$ teret a Markov folyamat állapotterének hívjuk. Egy olyan Markov folyamatot, amelynek állapottere egy véges vagy megszámlálható számosságú halmaz (a diszkrét topológiával) Markov láncnak nevezzük.*

A továbbiakban (stacionárius) Markov láncokkal fogunk foglalkozni, azokon belül is elsősorban diszkrét idejű Markov láncokkal. A következő jelölést fogom használni. Jelölje az állapotokat $E_1, E_2, \dots,$ és legyen $P(n,j,k) = P(X_{n+m} = E_k | X_m = E_j)$, $m = 1,2,\dots,$ $n = 0,1,2,\dots$ azaz $P(n,j,k)$ annak feltételes valószínűsége, hogy a Markov lánc az $n+m$ időpontban az E_k állapotba jut, feltéve, hogy az m időpontban az E_j állapotban volt. Használjuk továbbá a $P(j,k) = P(1,j,k)$ jelölést, azaz az 1-lépéses $P(1,j,k)$ átmenetvalószínűségekben hagyjuk el az 1 koordinátát. Felírom a Chapman–Kolmogorov egyenlőtlenséget Markov láncokra a fent bevezetett jelöléssel.

$$P(n+m,j,k) = \sum_l P(n,j,l)P(m,l,k) \tag{4}$$

ahol az összegzés végigfut az összes olyan l indexen, amelyre az E_l állapot létezik. Jelöléseink szerint vagy létezik egy olyan N pozitív egész szám, hogy $E_1,\dots,E_N$ az összes lehetséges állapotok halmaza, és ekkor $1 \le l \le N$ az összegzés a (4) formulában, vagy megszámlálható sok $E_1, E_2, \dots$ a lehetséges állapotok halmaza, és ekkor az összegezés $1 \le l < \infty$ indexelésre történik.

Ha adva van egy (véges sok), N állapotot felvevő Markov lánc, akkor ennek 1-lépéses átmenetvalószínűségeinek rendszerén a $P(j,k)$, $1 \le j,k \le N$, 1 lépéses átmenetvalószínűségeinek összességét, n-lépéses átmenetvalószínűségeinek rendszerén, $n = 1, 2, \dots$, pedig a $P(n,j,k)$ valószínűségeinek összességét értjük. Természetes módon hozzárendelhetjük egy ilyen véges sok, N állapotot felvevő Markov lánc átmenetvalószínűségeinek $P(j,k)$ rendszeréhez azt az $N \times N$ méretű négyzetes Π mátrixot, amelynek j-ik sorának és k-ik oszlopának a metszetében a $P(j,k)$ szám áll. Hasonlóan feleltessük meg egy ilyen mátrix n lépéses átmenet valószínűségei $P(n,j,k)$ rendszerének azt a Π_n mátrixot, amelynek j-ik sorának és l-ik oszlopának a metszetében a $P(n,j,k)$ szám áll. Érdemes bevezetni a sztochasztikus mátrix fogalmát, amely leírja az ily módon létrejövő mátrixokat.

Sztochasztikus mátrixok definiciója. *Egy $N \times N$ méretű $(P(j,k))$, $1 \le j,k \le N$, mátrixot sztochasztikus mátrixnak nevezünk, ha $P(j,k) \ge 0$, $1 \le j,k \le N$, a mátrix minden elemére, és $\sum\limits_{k=1}^{N} P(j,k) = 1$, $1 \le j \le N$, azaz a mátrix minden sorösszege eggyel egyenlő.*

A következő egyszerű észrevétel nagyon hasznos véges állapotterű Markov láncok vizsgálatában.

Fontos észrevétel. *A fent ismertetett megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít véges állapotterű Markov láncok 1-lépéses átmenetvalószínűségeinek rendszere és a sztochasztikus mátrixok között. Továbbá, a Markov láncokról szóló (4) formulában megfogalmazott Chapman–Kolmogorov azonosságából következik, hogy ha egy mátrix 1-lépéses átmenetvalószínűségeinek rendszeréhez hozzárendelt mátrix Π, és az n-lépéses átmenetvalószínűségeinek rendszeréhez hozzárendelt mátrix Π_n, akkor $\Pi_n = \Pi^n$, ahol Π^n a Π mátrix n-ik hatványát jelöli a szokásos mátrix szorzás értelmében.*

A 'Fontos észrevétel' lehetővé teszi, hogy mátrix elméleti eredmények segítségével fontos eredményeket állapítsunk meg véges állapotterű Markov láncok viselkedéséről. Ezt a módszert csak érintőlegesen fogom tárgyalni. A továbbiakban elsősorban a mind véges mind végtelen állapotterű Markov láncok viselkedéséről szóló alapvető eredmények ismertetésére fogok koncentrálni.

Mutatok néhány példát Markov láncokra és folyamatokra.

Néhány érdekes Markov folyamat és Markov lánc definiciója.

1.) Legyen $X_1, X_2, \dots,$ független egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata, amelyek értékeiket valamely E lineáris térben veszik fel. Tegyük fel továbbá, hogy ezek az $X_1, X_2, \dots,$ valószínűségi változók egy megszámlálható, $T = \{t_1, t_2, \dots\}$, halmazon veszik fel az értékeiket, azaz $P(X_1 \notin T) = 0$. Definiáljuk az $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} X_j$,

$n = 1, 2, \ldots,$ részletösszegeket, és a $S \subset E$ (megszámlálható) halmazt melynek elemei azok az $s \in E$ elemek, amelyek előállíthatóak $s = \sum\limits_{j=1}^{k} t_j$ $k = 1, 2, \ldots,$ $t_j \in T$, $1 \le j \le k$, alakban. Ekkor $S_1, S_2, \ldots,$ Markov lánc az S állapottéren, amelynek átmenetvalószínűségeit a $P(S_{n+1} = \bar{s} | S_n = s) = P(X_1 = \bar{s} - s)$, $s, \bar{s} \in S$, képlet adja meg. Ugyancsak Markov láncot alkotnak ugyanezen a téren és ugyanezekkel az átmenetvaószínűségekkel az $\bar{S}_n = S_n + t_j$, $n = 1, 2, \ldots,$ sorozatok is, ahol $t_j \in T$ tetszőleges szám.

Valóban,

$$
\begin{aligned}
P(S_{n+1} = s_{n+1} | S_n = s_n, \ldots, S_1 = s_1) &= \frac{P(S_{n+1} = s_{n+1}, S_n = s_n, \ldots, S_1 = s_1)}{P(, S_n = s_n, \ldots, S_1 = s_1)} \\
&= \frac{P(X_{n+1} = s_{n+1} - s_n, X_n = s_n - s_{n-1}, \ldots, X_1 = s_1)}{P(X_n = s_n - s_{n-1}, \ldots, X_1 = s_1)} \\
&= P(X_{n+1} = s_{n+1} - s_n) = P(X_1 = s_{n+1} - s_n).
\end{aligned}
$$

Feladat: Ha $(X_1, X_2, \ldots)$ olyan a természetes számokkal indexelt sztochasztikus folyamat egy megszámlálható számosságú $(E, \mathcal{E})$ állapottéren, amely teljesíti az

$$
\begin{aligned}
P(X_{n+1} = E_{j_{n+1}} | X_n = E_{j_n}, \ldots, X_1 = E_{j_1}) &= P(X_{n+1} = E_{j_{n+1}} | X_n = E_{j_n}) \\
P(X_2 = E_{j_{n+1}} | X_1 = E_{j_n})
\end{aligned}
$$

azonosságot, akkor $(X_1, X_2, \ldots)$ (stacionárius) Markov lánc, amelynek egy lépéses átmenetvalószínűségeit a $P(j, k) = P(X_2 = E_j | X_1 = E_k)$ képlet adja meg.

Érvényes az 1.) példa alábbi természetes általánosítása tetszőleges (nem feltétlenül megszámlálható sok értéket felvevő) valószínűségi változók részletösszegeire. Az általánosítás bizonyítása annyiban nehezebb, hogy abban általános értelemben vett feltételes valószínűségekkel kell számolni.

2.) Legyenek $X_1, X_2, \ldots,$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, amelyek értékeiket valamely $(E, \mathcal{E})$ lineáris térben veszik fel. Ekkor az $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} X_j$, $j = 1, 2, \ldots,$ részletösszegek (stacionárius) Markov folyamatot alkotnak az $(E, \mathcal{E})$ téren, amelynek 1 lépéses átmenetvalószínűségeit a $P(1, x, A) = P(S_{n+1} \in A | S_n = x) = P(X_1 \in A - x)$ képlet adja meg.

Nem kötelező feladat. Bizonyítsuk be, hogy a 2. példa állítása valóban igaz.

Külön feladatban megfogalmazom azt a feltételes eloszlásokról szóló állítást, amely az előző feladat megoldásának a lényege.

Feladat: Legyenek $X_1, \ldots, X_k, Y$ független valószínűségi változók, amelyek értékeiket valamely $(E, \mathcal{E})$ téren veszik fel, $f(x_1, \ldots, x_{k+1})$ egy k-változós mérhető (korlátos) függvény az $(E, \mathcal{E})$ téren. Ekkor

$$E(f(X_1, \ldots, X_k, Y) | X_1 = x_1, \ldots, X_k = x_k) = Ef(x_1, \ldots, x_k, Y).$$

Vegyük észre, hogy az előző feladat eredményéből, (amely egyébként tekinthető a Fubini tétel egy verziójának) következik a 2. példa állítása. Valóban, ezt felhasználva meg lehet mutatni, hogy

$$\begin{aligned}
&P(S_{n+1} \in A | S_1 = x_1, S_2 = x_2, \dots, S_n = x_n) \\
&\quad = P(X_1 + \dots + X_n + Y \in A | X_1 = x_1, X_2 = x_2 - x_2, \dots, X_n = x_n - x_{n-1}) \\
&\quad = P(x_1 + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1}) + Y \in A) = P(X_1 \in A - x_n)
\end{aligned}$$

ahol, $X_1, \dots, X_n, Y)$ független egyforma eloszlású valószínűségi változók, melyek értékeiket valamely $(E, \mathcal{E})$ lineáris térben veszik fel.

A következő állítás a 2. példa természetes megfelelője folytonos idejű sztochasztikus folyamatokra.

3.) Legyen $X(t)$, $t \ge 0$, független és stacionárius növekményű sztochasztikus folyamat. Ekkor $X(t)$ (stacionárius) Markov folyamat. Speciálisan, Markov folyamat a Wiener folyamat és a Poisson folyamat. Ugyancsak stacionárius Markov folyamat a d-változós Wiener folyamat. Ez utóbbit úgy definiáljuk, mint egy $(W_1(t), \dots, W_k(t))$ értékeit a d-dimenziós térben felvevő sztochasztikus folyamatot, amelynek koordinátái, $W_1(\cdot)$, …, $W_k(t)$ független Wiener folyamatok.

4.) A $Z(t) = \frac{W(e^t)}{e^{t/2}}$, úgynevezett Ornstein-Uhlenbeck folyamat, ahol $W(\cdot)$ Wiener folyamat, stacionárius Markov folyamat. Az, hogy ez Markov folyamat, következik abból a tényből, hogy a Wiener folyamat is Markov folyamat. Másrészt láttuk korábban, hogy az Ornstein–Uhlenbeck folyamat stacionárius, és ennek a ténynek a segítségével nem nehéz belátni, hogy stacionárius Markov folyamat.

Fontossága miatt érdemes külön példaként felsorolni az 1. példa egy speciális esetét, amelyben úgynevezett véletlen bolyongásokat tekintünk.

5.) Tekintsünk egy véletlen bolyonást a d-dimenziós rácson, azaz a

$$Z = \{(j_1, \dots, j_d)\colon -\infty < j_s < \infty,\ j_s \text{ egész szám}, \quad 1 \le s \le d\}$$

halmazon. Ezt úgy definiáljuk, hogy ha a bolyongást végző részecske az n-ik időpontban a Z rács valamelyik pontjában tartózkodik, akkor a múltbeli viselkedéstől függetlenül egyforma, azaz $\frac{1}{2d}$ valószínűséggel átugrik valamelyik szomszédos rácspontba. Azaz, ha S_n-nel jelöljük a részecske tartozkódási helyét az n időpntban, akkor az $S_n - S_{n-1}$ valószínűségi változók, $n = 1, 2, \dots$, függetlenek, és $P(S_n - S_{n-1} = e_j) = P(S_n - S_{n-1} = -e_j) = \frac{1}{2d}$ minden $n = 1, 2, \dots$, $1 \le j \le d$ számra, ahol e_j jelöli azt a vektort, amelynek j-ik koordinátája 1, és az összes többi koordinátája nulla. A definició teljessége érdekében még definiálnunk kell az S_0 mennyiséget is. Legyen $P(S_0 = x) = 1$, ahol $x \in Z$ a d-dimenziós tér valamely rögzített rácspontja.

6.) *Véletlen bolyongás a nem negatív egész számokon, a 0-val, mint elnyelő fallal.* Az előző példához hasonló modell a $d = 1$ esetben, amely bolyongást valamely $x \ge 0$

pontban indítunk el, azzal a különbséggel, hogy amennyiben a bolyongás elér a nullába, akkor örökre ottmarad. Ez képletekben azt jelenti, hogy az átmenetvalószínűségek a $P(j, j+1) = P(j, j-1) = \frac{1}{2}$, ha $j \geq 1$, és $P(0,0) = 1$ képletekkel adhatóak meg.

7.) *Véletlen bolyongás a nem negatív egész számokon, a 0-val, mint visszaverő fallal.* Az előző példához hasonló modell azzal a különbséggel, hogy amennyiben a bolyongás elér a nullába, akkor onnan visszaverődik. Ez képletekben azt jelenti, hogy az átmenetvalószínűségek a $P(j, j+1) = P(j, j-1) = \frac{1}{2}$, ha $j \geq 1$, és $P(0,1) = 1$ képletekkel adhatóak meg.

8.) *A diffuzió Ehrenfest modellje.* Ez véges állapotterű Markov lánc. E Markov lánc függ egy N paramétertől, amely pozitív egész szám. Ha ez a paraméter N, akkor a modellben $N+1$ állapot van, $E_0, E_1, \dots, E_N$, és az átmenetvalószínűségek $P(k, k-1) = \frac{k}{N}$, $P(k, k+1) = \frac{N-k}{N}$, ha $1 \leq k \leq N$, és $P(0,1) = 1$, $P(N, N-1) = 0$. E képletek szemléletes tartalma a következő: Legyen N részecske, amelyek mindegyike két urna valamelyikében van, és jelölje E_k azt az eseményt, hogy az első urnában k részecske, a második urnában $N-k$ részecske van. Minden egyes időpontban, kiválasztunk véletlenül egy részecskét, mindegyik részecskét egyforma valószínűséggel, és azt áthelyezzük a másik urnába. Ekkor, ha az első urnában k golyó van, akkor $P(k, k-1) = \frac{k}{N}$ annak a valószínűsége, hogy az áthelyezendő részecskét az első urnából választottuk, ezért az első urnában levő részecskék száma eggyel csökken, és $P(k, k+1) = \frac{N-k}{N}$, annak a valószínűsége, hogy az áthelyezendő részecskét a második urnából választottuk, ezért az első urnában levő részecskék száma eggyel nő.

9.) *Modell egy szerkezet élettartamára.* Legyen adva egy Markov lánc a végtelen E_1, E_2, ... állapottéren, amelynek átmenetvalószínűségeit valamely $p_1, p_2, \dots$, $0 \leq p_k \leq 1$, és $q_k = 1 - p_k$, $k = 1, 2, \dots$, számsorozat segítségével határozzuk meg a következő módon: $P(k, k+1) = p_k$, $P(k, 1) = q_k$, $k = 1, 2, \dots$. E modell szemléletes tartalma a következő: Legyen adva egy szerkezet, amelyet minden időpontban, ha nem romlik el, akkor tovább használunk, és életkora egy egységgel nő. Ha elromlik, akkor kicseréljük egy új szerkezetre, amelynek életkora 1. Jelölje X_n azt a valószínűségi változót, amely megadja azt, hogy mennyi az n időpontban használt szerkezet életkora.

10.) Végül mutatok példát valószínűségi változók olyan sorozatára, amely nem alkot Markov láncot. Legyen adva egy urna és benne mondjuk 5 piros és 3 fehér golyó. Kihúzunk az urnából egy golyót véletlenszerűen, majd dobjuk vissza azt az urnába egy ugyanolyan színű golyóval együtt. Folytassuk ezt a procedurát a végtelenségig, és definiáljuk az $X_1, X_2, \dots$ valószínűségi változókat úgy, hogy $X_n = 1$, ha a n-ik húzáskor kihúzott golyó színe piros, és $X_n = 0$, ha az n-ik húzáskor kihúzott golyó színe fehér. Ekkor nyílvánvalóan $P(X_n = 1 | X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_{n-1} = 1) > P(X_n = 1 | X_{n-1} = 1)$, mert ha minden eddigi húzás eredménye piros színű golyó volt, akkor az urnában levő piros golyók számát növeltük, ezért nagyobb annak a valószínűsége, hogy a következő húzásban is piros golyót húzunk.