Feltételes várható érték fogalma és martingálok.

Először ismertetem a martingálok és szemimartingálok definicióját.

Martingál és szemimartingál definiciója. *Legyen adva σ-algebrák $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3 \subset \cdots$ növekvő sorozata egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, amelyre teljesül a $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{A}$ tulajdonság minden $n = 1, 2, \dots$ számra. Legyen adva ezen kívül $\mathcal{F}_n$ mérhető $\xi_n(\omega)$, $E|\xi_n(\omega)| < \infty$, valószínűségi változók sorozata. Azt mondjuk, hogy a $\xi_n(\omega)$, $n = 1, 2, \dots,$ valószínűségi változók sorozata (diszkrét időben definiált) martingált alkot a $\mathcal{F}_n$ σ-algebra sorozatra nézve, ha teljesül az*

$$E(\xi_{n+1}(\omega)|\mathcal{F}_n) = \xi_n(\omega) \qquad \text{1 valószínűséggel minden } n = 1, 2, \dots \text{ számra} \tag{D1}$$

azonosság. A fent definiált sorozat (diszkrét időben definiált) szemimartingált definiál, ha teljesül az

$$E(\xi_{n+1}(\omega)|\mathcal{F}_n) \ge \xi_n(\omega) \qquad \text{1 valószínűséggel minden } n = 0, 1, \dots \text{ számra} \tag{D2}$$

egyenlőtlenség.

Legyen adva egymásba skatulyázott $\mathcal{F}_t$ σ-algebrák, $t \ge 0$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, ha $s \le t$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}$ valós számokkal indexelt rendszere egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Legyen továbbá adva $\mathcal{F}_t$ mérhető $\xi_t(\omega)$ valószínűségi változók rendszere, amelyre $E|\xi_t(\omega)| < \infty$. Azt mondjuk, hogy a $\xi_t(\omega)$ valószínűségi változók időben folytonos martingált alkotnak a $\mathcal{F}_t$ σ-algebrára nézve, ha teljesül az

$$E(\xi_t)(\omega)|\mathcal{F}_s) = \xi_s(\omega) \qquad \text{1 valószínűséggel minden } 0 \le s \le t < \infty \text{ számpárra} \tag{D1$'$}$$

azonosság. A fent definiált sorozat (folytonos időben definiált) szemimartingált alkot, ha teljesül az

$$E(\xi_t(\omega)|\mathcal{F}_s) \ge \xi_s(\omega) \qquad \text{1 valószínűséggel minden } 0 \le s \le t < \infty \text{ számpárra} \tag{D2$'$}$$

egyenlőtlenség.

1. megjegyzés. Hasonlóan definiálhatjuk egy véges sok elemből álló $(x_n, \mathcal{F}_n)$, $1 \le k \le N$, martingált vagy szemimartingált. Az egyetlen különbség az, hogy a (D1) illetve (D2) formulát csak $1 \le n < N$ indexekre követeljük meg. Hasonlóan definiálhatjuk egy folytonos paraméterű martingál fogalmát egy $[a, b]$ intervallumban a (D1$'$) és (D2$'$) tulajdonságot csak $a \le s \le t \le b$ paraméterekre követelve meg.

2. megjegyzés. Ha adva van valószínűségi változók egy $\xi_0(\omega), \xi_1(\omega), \dots,$ sorozata, akkor $\mathcal{F}_n^{(0)} = \mathcal{B}(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$ a legszűkebb a diszkrét idejű martingálok és szemimartingálok definicójában szereplő feltételeket teljesítő σ-algebrák. Vegyük észre, hogy amennyiben a (D1) feltétel teljesül akkor

$$E(\xi_{n+1}(\omega)|\mathcal{F}_n^{(0)}) = E\left(E(\xi_{n+1}(\omega)|\mathcal{F}_n)\mathcal{F}_n^{(0)}\right) = \xi_n(\omega)$$
$$\text{1 valószínűséggel minden } n = 0, 1, \dots \text{ számra}$$

azonosság is teljesül, azaz ha a $\xi_n(\omega)$ sorozat martingált alkot a $\mathcal{F}_n$, $n=1,2,\dots$, σ-algebra sorozatra nézve, akkor martingált alkot a $\mathcal{F}_n^{(0)}$, $n=1,2,\dots$, σ-algebra sorozatra nézve is. Hasonlóan állíthatjuk, hogy ha a $\xi_n(\omega)$ sorozat szemimartingált alkot a $\mathcal{F}_n$ σ-algebrák sorozatára nézve, akkor szemimartingált alkot a $\mathcal{F}_n^{(0)}$ σ-algebrák sorozatára nézve is.

Folytonos idejű martingálok és szemimartingálok esetén definiálhatjuk a $\mathcal{F}_s^{(0)} = \mathcal{B}(\xi_0,\xi_u,\, 0\le u\le s)$ σ-algebrákat, és ezekkel helyettesítve a $\mathcal{F}_s$ σ-algebrákat a folytonos idejű martingálokra és szemimartingálokra is állíthatjuk, hogy az $\xi_t(\omega)$ sztochasztikus folyamatok martingálok illetve szemi-martingálok maradnak. Ezért jogunk van valószínűségi változók egy sorozatát diszkrét idejű martingálnak vagy szemimartingálnak hívni, ha martingál illetve szemimartingál a most definiált $\mathcal{F}_n^{(0)}$ σ-algebrák sorozatára nézve. Az irodalomban használják ezt a konvenciót, és mi is élni fogunk ezzel a lehetőséggel. Hasonlóan, egy $\xi_t(\omega)$ sztochasztikus folyamatot martingálnak illetve szemimartingálnak hívunk, ha az martingál illetve szemimartingál a $\mathcal{F}_t^{(0)}$, $t\ge 0$, σ-algebrák rendszerére nézve.

A martingálok az igazságos, a szemimartingálok pedig az előnyös játékoknak a természetes modelljei. Tekintsünk ugyanis egy játékot, amelynek minden egyes időpontban van egy fordulója, és ennek során nyereményünk értéke (véletlenszerűen) megváltozik. Jelölje $\mathcal{F}_n$ azt a σ-algebrát, amely tartalmazza az n-időpontig összegyüjtött összes információnkat, $\xi_n(\omega)$ pedig a nyereményünk értékét az n időpontban. Ekkor az $n+1$-ik forduló utáni időpontbeli várható nyereményünk az n-ik fordulóban rendelkezésünkre álló ismeretek alapján $E(\xi_{n+1}(\omega)|\mathcal{F}_n)$. A játék akkor igazságos, ha ez a várható nyeremény megegyezik az n-ik időpontbeli $\xi_n(\omega)$ nyereményünkkel, és akkor előnyös, ha nagyobb nála. Több a martingálok elméletében fontos eredmény ezen kép alapján érthető meg. Mielőtt ezeknek az eredményeknek a tárgyalását elkezdenénk, idézzük fel a már tanult feltételes várható érték definicióját és legfontosabb tulajdonságait.

A feltételes várható érték definiciója felhasználja az alább felidézendő Radon–Nikodym tételt. E tétel megfogalmazásának érdekében először be kell vezetni (előjeles) mértékek egy más mérték szerinti abszolut folytonosságának a definicióját.

Egy előjeles mérték abszolut folytonosságának a definiciója egy másik mérték szerint. *Legyen μ (esetleg σ)-véges (σ-additív) mérték és ν véges (σ-additív) előjeles mérték egy Ω téren értelmezett $\mathcal{F}$ σ-algebrán. Azt mondjuk, hogy a ν előjeles mérték abszolut folytonos a μ mérték szerint, ha minden olyan $C\in\mathcal{F}$ halmazra, melyre $\mu(C)=0$, a $\nu(C)=0$ reláció is teljesül.*

Radon–Nikodym tétel. *Legyen adva egy Ω tér, rajta egy $\mathcal{F}$ σ-algebra, továbbá ezen a $\mathcal{F}$ σ-algebrán egy μ (σ-véges) mérték és ν (véges) előjeles mérték. Tegyük fel, hogy a ν előjeles mérték abszolut folytonos a μ mértékre nézve. Akkor létezik olyan az Ω téren definiált valós értékű $\mathcal{F}$ mérhető $f(\omega)$ függvény, melyre $\int |f(\omega)|\,d\mu(\omega)<\infty$, és $\int_C f(\omega)\,d\mu(\omega)<\infty$ minden $C\in\mathcal{F}$ halmazra. Továbbá ez az $f(\omega)$ függvény egyértelmű a következő értelemben. Ha két $f_1(\omega)$ és $f_2(\omega)$ $\mathcal{F}$ mérhető függvény teljesíti a fenti relációt minden $C\in\mathcal{F}$ halmazra, akkor $f_1(\omega)=f_2(\omega)$ a μ mérték szerint majdnem* *minden $\omega \in \Omega$ pontban.*

Megjegyzés: A Radon–Nikodym tétel tipikus egzisztencia tétel. Az általános esetben nem ad módszert arra, hogyan lehet a keresett $f(\omega)$ Radon–Nikodym deriváltat effektive kiszámolni. Ez a probléma a feltételes eloszlás és feltételes várható érték fogalmában is megjelenik, és ez teszi a feltételes várható érték fogalmát nehézzé.

Tekintsünk egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőt, azon egy integrálható ξ valószínűségi változót (azaz legyen $E|\xi(\omega)| = \int_\Omega |\xi(\omega)| P(\,d\omega) < \infty$) és egy $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ σ-algebrát. Definiáljuk a $\mu(A) = \int_A \xi(\omega) P(\,d\omega)$, $A \in \mathcal{A}$, előjeles mértéket. (Honnan tudjuk, hogy ez valóban előjeles *mérték*?) Ekkor μ nyílvánvalóan abszolut folytonos mérték az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ téren a P mértékre nézve. Ha tekintjük a P mérték és μ előjeles mérték megszorítását a $\mathcal{F}$ σ-algebrára, akkor a μ előjeles mérték továbbra is abszolut folytonos marad a P mértékre. Ezért bevezethetjük a feltételes várható érték alábbi definicióját.

Feltételes várható érték definiciója. *Legyen adva egy $\xi(\omega)$ integrálható valószínűségi változó és egy $\mathcal{F}$ σ-algebra egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Definiáljuk a $\mu = \mu(\xi)$ előjeles mértéket a $\mathcal{F}$ σ-algebrán a $\mu(B) = \int_B \xi(\omega) P(\,d\omega)$, $B \in \mathcal{F}$, képlet segítségével. A $\xi(\omega)$ valószínűségi változó $E(\xi(\omega)|\mathcal{F})$ feltételes várható értéke az $\mathcal{F}$ σ-algebrára nézve egyenlő a μ előjeles mérték ($\mathcal{F}$-mérhető) Radon-Nykodim deriváltjával a P valószínűségi mértéknek a $\mathcal{F}$ σ-algebrára vett megszorítására nézve.*

Feltételes valószínűség általános definiciója. *Legyen adva egy A mérhető halmaz és egy $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ σ-algebra egy $\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Az A halmaz $P(A|\mathcal{F})$ feltételes valószínűségén feltéve az $\mathcal{F}$ σ-algebrát az A halmaz $I_A(\omega)$ indikátorfüggvényének (azaz $I_A(\omega) = 1$, ha $\omega \in A$, $I_A(\omega) = 0$, ha $\omega \notin A$) $E(I_A(\omega)|\mathcal{F})$ feltételes várható értéket értjük.*

1. megjegyzés: Legyenek adva valamely $\eta_1, \dots, \eta_k$ valószínűségi változók egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. A $\mathcal{B}(\eta_1, \dots, \eta_k)$ σ-algebrán a legszűkebb olyan σ-algebrát értjük, amelyre nézve az $\eta_1, \dots, \eta_k$ valószínűségi változók mindegyike mérhető, és adva egy integrálható ξ valószínűségi változó használjuk az

$$E(\xi|\eta_1, \dots, \eta_k) = E(\xi|\mathcal{B}(\eta_1, \dots, \eta_k))$$

jelölést is. (Az egyszerűbb jelölés érdekében véges sok η valószínűségi változót írtam, de vehetünk végtelen, akár kontinum sok η valószínűségi változót.

2. megjegyzés: Gyakran használják (az előző megjegyzés fogalomrendszerét alkalmazva az $E(\xi|\eta_1 = x_1, \dots, \eta_k = x_k)$ jelölést is, és beszélnek egy $\xi(\omega)$ valószínűségi változó feltételes várható értékéről feltéve, hogy valamely $\eta_1, \dots, \eta_k$ valószínűségi változók $x_1, \dots, x_k$ értékeket vesznek fel. Ez a következőt jelenti. Azt mondjuk, hogy $E(\xi|\eta_1 = x_1, \dots, \eta_k = x_k) = g(x_1, \dots, x_k)$, ha a g függvény teljesíti a következő tulajdonságot. $E(\xi|\eta_1, \dots, \eta_k) = g(\eta_1, \dots, \eta_k)$. (Ez az azonosság úgy értendő, hogy a két oldal 1 valószínűséggel megegyezik.) Természetesen e jelölés jogosságának érdekében meg kell mutatni, hogy a kívánt tulajdonságú g függvény mindig létezik, illetve tisztázni kell azt, hogy tekinthetjük-e ezt a g függvényt egyértelműen definiáltnak. A kívánt tulajdonságú g függvény létezését biztosítja az alábbi (bizonyítás nélkül közölt) mértékelméleti eredmény.

Tétel. *Legyen adva egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, azon $\eta_1(\omega), \dots, \eta_k(\omega)$ valószínűségi változók. Jelölje $\mathcal{F}$ a $\eta_1(\omega), \dots, \eta_k(\omega)$ valószínűségi változók által generált σ-algebrát. Egy ζ valószínűségi változó akkor és csak akkor mérhető erre az $\mathcal{F}$ σ-algebrára, ha létezik a k-dimenziós R^k euklideszi térben olyan Borel mérhető $g(x_1, \dots, x_k)$ függvény, amelyre $\zeta(\omega) = g(\eta_1(\omega), \dots, \eta_k(\omega))$.*

Egy $\zeta(\omega)$ valószínűségi változó fenti tételben megadott reprezentációjában az ott szereplő g függvény nincs egyértelműen meghatározva. Valóban, gondoljuk meg, hogy olyan $(x_1, \dots, x_k)$ pontokban, amelyeket az $(\eta_1(\omega), \dots, \eta_k(\omega))$ semmilyen $\omega \in \Omega$ helyen nem vesz fel a $g(x_1, \dots, x_k)$ függvényt tetszőleges módon definiálhatjuk. Viszont igaz (és egyszerűen bizonyítható) a következő gyengébb értelemben vett egyértelműség, amely elegendő a számunkra. Ha μ jelöli az $(\eta_1(\omega), \dots, \eta_k(\omega))$ véletlen vektor eloszlását (az R^k tér k-dimenziós Borel mérhető halmazain), és $g(\eta_1(\omega), \dots, \eta_k(\omega)) = \bar{g}(\eta_1(\omega), \dots, \eta_k(\omega))$ 1 valószínűséggel, akkor $g(x_1, \dots, x_k) = \bar{g}(x_1), \dots, x_k)$ a μ mérték szerint majdnem minden $(x_1, \dots, x_k)$ pontban.

Felsorolom a feltételes várható érték legfontosabb tulajdonságait. Az alább felsorolt azonosságok úgy értendők, hogy az azok két oldalán szereplő kifejezések egy valószínűséggel megegyeznek.

Tétel a feltételes várható érték tulajdonságairól.

1. *Ha $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k| E|\xi_k| < \infty$, $\mathcal{F} \subset A$ tetszőleges σ-algebra, akkor*
$$E\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi_k \middle| \mathcal{F}\right)(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k E(\xi_k|\mathcal{F})(\omega) \quad \textit{majdnem minden } \omega \in \Omega \textit{ pontban.}$$
2. *Ha $E|\xi| < \infty$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ tetszőleges σ-algebrák, akkor $E\left(E(\xi|\mathcal{F})|\mathcal{G}\right)(\omega) = E(\xi|\mathcal{G})(\omega)$ majdnem minden $\omega \in \Omega$ pontban. Speciálisan $E\left(E\xi|\mathcal{F}\right) = E\xi$.*
3. *Ha ξ olyan valószínűségi változó, melyre $P(a \le \xi \le b) = 1$ alkalmas $-\infty < a < b < \infty$ számokkal, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ σ-algebra, akkor $a \le E(\xi|\mathcal{F})(\omega) \le b$ majdnem minden $\omega \in \Omega$ pontban. Általánosabban, ha $\xi(\omega) \ge \eta(\omega)$ majdnem minden $\omega \in \Omega$ pontban, akkor $E(\xi|\mathcal{F})(\omega) \ge E(\eta|\mathcal{F})(\omega)$ majdnem minden $\omega \in \Omega$ pontban.*
4. *$E(\xi|\mathcal{A})(\omega) = \xi(\omega)$, ahol $\mathcal{A}$ a valószínűségi mező definiciójában szereplő „legnagyobb" σ-algebra. Ha $\mathcal{A}_0$ jelöli a triviális σ-algebrát, amelyik csak az Ω és $\emptyset$ üres halmazból áll, akkor $E(\xi|\mathcal{A}_0)(\omega) = E\xi$.*
5. *Ha $E|\xi| < \infty$, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$, a ξ valószínűségi változó független az $\mathcal{F}$ σ-algebrától, azaz ha tetszőleges $F \in \mathcal{F}$ és a számegyenesen lévő Borel mérhető $B \subset R^1$ halmazokra, $P(\{\omega\colon \xi(\omega) \in B\} \cap F) = P(\{\omega\colon \xi(\omega) \in B\}) P(F)$, akkor $E(\xi|\mathcal{F})(\omega) = E\xi$.*
6. *Ha $E\xi^2 < \infty$, $E\eta^2 < \infty$, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$, a ξ valószínűségi változó $\mathcal{F}$ σ-algebrára mérhető valószínűségi változó, azaz tetszőleges a számegyenesen lévő Borel mérhető $B \subset R^1$*

halmazra, $\{\omega\colon \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$*, akkor* $E(\xi\eta|\mathcal{F})(\omega) = \xi(\omega)E(\eta|\mathcal{F})(\omega)$ *majdnem minden* $\omega \in \Omega$ *pontban.*

Megadok még két a feltételes várható értékről szóló fontos eredményt, amelyeket itt nem fogunk használni, viszont hasznos tudni őket. Ezek közül az első (nehezebb) eredmény azt fejezi ki, hogy minden $\mathcal{F}$ σ-algebrára és $\xi(\omega)$ valószínűségi változóra létezik a $\xi(\omega)$ valószínűségi változónak olyan feltételes eloszlása, amely minden $\omega \in \Omega$-ra valódi az (ω-tól függő) valószínűségi mérték. A második eredmény arról szól, hogy a feltételes várható értékeket ki lehet fejezni a feltételes eloszlások segítségével hasonlóan ahhoz, ahogy a várható értékeket ki tudjuk fejezni az eloszlások segítségével. Ebből következik, hogy sok a várható értékekről szóló eredményt általánosítani tudunk feltételes várható értékekre is. Az első eredmény a következő.

Tétel a feltételes reguláris eloszlás létezéséről. *Legyen* $(\xi_1(\omega), \dots, \xi_k(\omega))$ *egy* k*-dimenziós valószínűségi vektor egy* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *valószínűségi mezőn,* $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ σ*-algebra. Jelölje* $\mathcal{B}$ *a Borel* σ*-algebrát az* R^k k*-dimenziós euklideszi téren. A* $(\xi_1(\omega), \dots, \xi_k(\omega))$ *véletlen vektornak létezik az* $\mathcal{F}$ σ*-algebra szerinti reguláris feltételes eloszlása, azaz meg lehet adni egy olyan* $F(B, \omega)$*,* $F(B,\omega)\colon \mathcal{B} \times \Omega \to R^1$*, függvényt, melyre*

i.) $F(B, \cdot)$ *minden* $B \in \mathcal{B}$ *halmazra* $\mathcal{F}$ *mérhető valószínűségi változó.*

ii.) $F(\cdot, \omega)$ *minden* $\omega \in \Omega$ *pontra valószínűségi mérték az* R^k k*-dimenziós euklideszi tér* $\mathcal{B}$ σ*-algebráján, azaz* $F(R^k, \omega) = 1$*,* $0 \le F(B, \omega) \le 1$ *minden* $B \in \mathcal{B}$ *halmazra,* $F\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k, \omega\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} F(B_k, \omega)$ *minden diszjunkt* $B_k \in \mathcal{B}$*,* $k = 1, 2, \dots$*, halmazokból álló rendszerre.*

iii.) $F(B, \omega) = P\left((\xi_1(\omega), \dots, \xi_k(\omega)) \in B|\mathcal{F}\right)(\omega)$ *minden* $B \in \mathcal{B}$ *halmazra. Ez azt jelenti, hogy az* $F(B, \omega)$ *függvény tekinthető mint a csak majdnem minden* $\omega \in \Omega$ *pontban meghatározott* $P\left((\xi_1(\omega), \dots, \xi_k(\omega)) \in B|\mathcal{F}\right)(\omega)$ *feltételes valószínűség egyik verziója.*

Legyen adva egy $\mathcal{F}$ σ-algebra, két véletlen vektor, amelyek közül az egyik $\mathcal{F}$ mérhető, és tekintsük ezen véletlen vektorok valamely függvényének a feltételes várható értékét feltéve a $\mathcal{F}$ σ-algebrát. A következő eredmény tartalma az, hogy ezt a feltételes várható értéket természetes módon ki lehet számolni a feltételes eloszlás szerinti integrál segítségével.

Tétel. *Legyen adva egy* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ σ*-algebra, azon egy* $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ σ*-algebra, egy* $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ k*-dimenziós és* $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_l)$ l*-dimenziós véletlen véletlen vektor. Legyen továbbá az* $(\eta_1, \dots, \eta_k)$ *véletlen vektor* $\mathcal{F}$ *mérhető, és jelölje* $F(B, \omega)$*,* $B \subset R^k$ *Borel mérhető függvény,* $\omega \in \Omega$ *a* $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ *véletlen vektor reguláris feltételes eloszlása feltéve az* $\mathcal{F}$ σ*-algebrát. Legyen* $h(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l)$ *egy* $k+l$ *változós Borel mérhető függvény, melyre* $E|h(\xi_1, \dots, \xi_k, \eta_1, \dots, \eta_l)| < \infty$*. Az* $E\left(h(\xi_1, \dots, \xi_k, \eta_1, \dots, \eta_l)|\mathcal{F}\right)(\omega)$ *feltételes várható értéket ki lehet számítani a következő képlet segítségével:*

$$
\begin{aligned}
&E\left(h(\xi_1, \dots, \xi_k, \eta_1, \dots, \eta_l)|\mathcal{F}\right)(\omega) \\
&\qquad = \left[\int h(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l) F(dx_1, \dots, dx_k, \omega)\right]_{y_1 = \eta_1(\omega), \dots, y_l = \eta_l(\omega)} .
\end{aligned}
$$

A következő feladatokban megfogalmazok néhány fontos példát martingálokra. A feladat állításai ellenőrízhetőek a feltételes várható érték előbb felsorolt tulajdonságainak segítségével.

1. feladat. Legyenek $\xi_1, \xi_2 \dots,$ független valószínűségi változók, amelyekre $E|\xi_n| < \infty$ minden $n = 1, 2, \dots$ számra. Ha $E\xi_n = 0$ minden $n = 1, 2, \dots,$ számra, akkor az $S_k = \sum_{j=1} \xi_k$, $k = 1, 2, \dots,$ részletösszegek martingált alkotnak. Ha $E\xi_n \geq 0$ minden $n = 1, 2, \dots$ számra, akkor az S_k, $k = 1, 2, \dots,$ részletösszegek szemimartingált alkotnak.

2. feladat. Legyen adva az $\mathcal{A}$ σ-algebra rész-σ-algebráinak növekvő $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots \subset A$ az sorozata és egy ξ valószínűségi változó, $E|\xi| < \infty$, egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Ekkor az $X_n = E(\xi|\mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2, \dots,$ sorozat martingált alkot.

3. feladat. Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$ független valószínűségi változók, $T_n = \prod_{k=1}^{n} \xi_k$, $n = 1, 2, \dots$. Ha $E\xi_j = 1$ minden $j = 1, 2, \dots$ számra, akkor a T_n, $n = 1, 2, \dots,$ sorozat martingál. Ha $E\xi_j \geq 1$, és $P(\xi_j \geq 0) = 1$, $j = 1, 2, \dots,$ akkor T_n szemimartingál.

4. feladat. Legyen $W(t, \omega)$, $t \geq 0$ egy Wiener folyamat. Ekkor mind a $W(t, \omega)$, mind a $W^2(t, \omega) - t$, $t \geq 0$, sztochasztikus folyamat martingál. (Érdemes mind a két sztochasztikus folyamat esetében a $\mathcal{F}_t = \mathcal{B}(W(s);\ s \leq t)$, σ-algebrát társítani a $W(t)$ illetve $W^2(t) - t$ valószínűségi változóhoz.

4′. feladat. Legyen $P(t, \omega)$, $t \geq 0$ egy Poisson folyamat, $\lambda = 1$ paraméterrel. Ekkor mind a $P(t, \omega) - t$, mind a $(P(t, \omega) - t)^2 - t$, $t \geq 0$, sztochasztikus folyamat martingál. Általában, ha $X(t, \omega)$ egy független és stacionárius növekményű sorozat $EX(t, \omega) = 0$ és $EX^2(t, \omega) = t$, akkor $X(t, \omega)$ és $X^2(t, \omega) - t$ martingál.

A 4. feladat felsorolja egy Wiener folyamat bizonyos tulajdonságait. Ezenkívül tudjuk, hogy a Wiener folyamat trajektóriái folytonosak. Megfogalmazom a Wiener folyamat egy korábbi jellemzésének általánosabb, martingál-tulajdonságokkal megadott jellemzését.

Tétel a Wiener folyamatok egy jellemzéséről. *Legyen $X(t, \omega)$, $EX(t, \omega) = 0$, $0 \leq t < \infty$, olyan sztochasztikus folyamat, amelyre $EX^2(t, \omega) < \infty$ minden $t \geq 0$ számra, $X(0, \omega) = 0$ egy valószínűséggel, és az $X(t, \omega)$ és $X^2(t, \omega) - t$, $t \geq 0$ sztochasztikus folyamatok martingálok (az $\mathcal{F}_t = \{X(s, \omega),\ s \leq t\}$, $t \geq 0$ σ-algebrák rendszerére nézve.) Ha ezenkívül az $X(t, \omega)$ sztochasztikus folyamat minden trajektóriája folytonos, akkor ez Wiener folyamat.*

A fenti tétel bizonyítását elhagyom. Megjegyzem, hogy a tétel bizonyításának lényege az, hogy a független valószínűségi változók összegeire szóló centrális határeloszlástétel általánosítható martingálokra is, és ennek az itt nem ismertetett eredménynek a segítségével belátható, hogy tetszőleges $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \infty$ számokra a tétel feltételeinek teljesülése esetén az $X(t_j, \omega) - X(t_{j-1}, \omega)$, $1 \leq j \leq k$, valószínűségi változók függetlenek, és normális eloszlásúak 0 várható értékkel és $t_j - t_{j-1}$ szórásnégyzettel.

Ismertetek néhány a martingálokról és szemimartingálokról szóló fontos eredményt. Nem adom meg mindegyikük részletes bizonyítását. Néhány esetben a bizonyítás fontos lépéseit (némi magyarázattal ellátott) feladat formájában fogalmazom meg. Viszont igyekszem elmagyarázni, hogy a bizonyítások hátterében ott van az igazságos és előnyös játékok tulajdonságairól szóló természetes gondolat. Az első eredmény azt fejezi ki, hogy egy igazságos játék esetén nem tudom a játékot úgy abbahagyni, hogy az számomra szigorúan előnyös legyen, egy előnyös játék esetén pedig a legelőnyösebb stratégia az, ha a játékban végig részt veszek. Természetesen, amikor arra gondolok, hogy milyen szabály szerint hagyjam abba a játékot, akkor olyan szabályra gondolok, amelyet effektíve végre is tudok hajtani. Ennek pontos megfogalmazása érdekében bevezetem a következő fogalmat.

Megállási szabály definiciója. *Legyen adva σ-algebrák növekvő $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3 \subset \cdots \subset \mathcal{A}$ sorozata egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Azt mondjuk, hogy egy pozitív egész értékeket (és esetleg a ∞) értéket) felvevő $\tau(\omega)$ valószínűségi változó megállási szabály e σ-algebrák rendszerére nézve, ha $\{\omega\colon \tau(\omega) = n\} \in \mathcal{F}_n$ minden $n = 1, 2, \dots$ számra.*

E fogalom időben folytonos megfelelője a következő: Legyen adva $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}$, $0 \le t < \infty$, σ-algebráknak egy növekvő rendszere (azaz legyen $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, ha $s \le t$) egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Azt mondjuk, hogy egy nem negatív értékeket (és esetleg a ∞) értéket) felvevő $\tau(\omega)$ valószínűségi változó megállási szabály e σ-algebrák rendszerére nézve, ha $\{\omega\colon \tau(\omega) \le t\} \in \mathcal{F}_t$ minden $t \ge 0$ számra.

Megadom a definició változatát abban az esetben, ha σ algebrák helyett valószínűségi változók egy sorozata vagy egy sztochasztikus folyamat van adva.

Megállási szabály definiciója. *Legyen valószínűségi változók $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots$ sorozata egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Egy pozitív egész értékeket (és esetleg a ∞) értéket) felvevő $\tau(\omega)$ valószínűségi változó megállási szabály e valószínűségi változók sorozatára nézve, ha megállási szabály a $\mathcal{F}_n = \mathcal{B}(\xi_k(\omega), 1 \le k \le n)$ σ-algebrák növekvő rendszerére nézve.*

E fogalom időben folytonos megfelelője a következő: Legyen adva egy $X(t, \omega)$, $t \ge 0$, egy a pozitív félegyesen definiált sztochasztikus folyamat egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Azt mondjuk, hogy egy nem negatív értékeket (és esetleg a ∞) értéket) felvevő $\tau(\omega)$ valószínűségi változó megállási szabály e sztochasztikus folyamatra nézve, ha megállási szabály a $\mathcal{F}_t = \mathcal{B}(\xi_s\colon 0 \le s \le t)$, $t \ge 0$, σ-algebrák növekvő rendszerére nézve.

Érdemes bevezetni a $\tau(\omega)$ (véletlen) megállási időpontig összegyüjtött információt tartalmazó $\mathcal{F}_\tau$ σ-algebrát is. Egy B halmaz akkor és csak akkor tartozik a $\mathcal{F}_\tau$ σ-algebrába, ha a τ időpontig tett megfigyelések alapján el tudjuk dönteni, hogy a B esemény bekövetkezett-e vagy sem. A pontos definició a következő.

Egy megállási szabály által generált σ-algebra definiciója. *Legyen adva σ-algebrák növekvő $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3 \subset \cdots \subset \mathcal{A}$ sorozata egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, és legyen $\tau(\omega)$ megállási szabály erre a rendszerre nézve. A $\mathcal{F}_\tau$ σ-algebra a következő halmazokból áll: Egy $B \subset \Omega$ halmazra $B \in \mathcal{F}_\tau$ akkor és csak akkor, ha $B \cap \{\omega\colon \tau(\omega) \le n\} \in \mathcal{F}_n$ minden $n = 1, 2, \dots$ számra.*

E fogalom időben folytonos megfelelője a következő: Legyen adva és σ-algebrák növekvő $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}$, $0 \le t < \infty$, rendszere (azaz legyen $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, ha $s \le t$) egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, és legyen $\tau(\omega)$ megállási szabály erre a rendszerre nézve. A $\mathcal{F}_\tau$ σ-algebra a következő halmazokból áll: $B \subset \Omega$ halmazra $B \in \mathcal{F}_\tau$ akkor és csak akkor, ha $B \cap \{\omega\colon \tau(\omega) \le t\} \in \mathcal{F}_t$ minden $t \ge 0$ számra.

Feladat 1: Lássuk be, hogy a fenti definició értelmes, azaz a $\mathcal{F}_\tau$ rendszer valóban σ-algebra.

Feladat 2: Legyen adva σ-algebrák növekvő $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots \mathcal{A}$ sorozata egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, valamint egy $\tau(\omega)$ megállási szabály erre a rendszerre nézve, és valószínűségi változók olyan $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots$ sorozata, amelyre a ξ_n valószínűségi változó $\mathcal{F}_n$ mérhető minden $n = 1, 2, \dots$ számra. Mutassuk meg, hogy $\xi_{\tau(\omega)}(\omega)$ $\mathcal{F}_\tau$ mérhető.

Feladat 3: (nem kötelező) Tekintsük növekvő $\mathcal{F}_t$ σ-algebráknak a $t \ge 0$ számokkal paraméterezett növekvő rendszerét, és egy ezekre nézve természetes módon adaptált $X(t, \omega)$ *folytonos trajektóriájú* sztochasztikus folyamatot. Fogalmazzuk meg és bizonyítsuk be egy ilyen rendszerre a feladat 2 természetes megfelelőjét. (Miért kellett feltenni azt, hogy a sztochasztikus folyamat trajektóriái folytonosak?

Tétel véletlenül megállított (szemi)martingálok várható értékének becsléséről. *Legyen adva egy $(\xi_k(\omega), \mathcal{F}_k)$, $k = 1, 2, \dots$, martingál és egy $\tau(\omega)$ megállási szabály a $\mathcal{F}_k$, $k = 1, 2, \dots$ σ-algebrák rendszerére nézve, amelyre $P(n \le \tau(\omega) \le N) = 1$ valamilyen $1 \le n \le N < \infty$ számokra. Ekkor*

$$E(\xi_{\tau(\omega)}(\omega)|\mathcal{F}_n) = \xi_n(\omega) \quad \text{és} \quad E(\xi_N(\omega)|\mathcal{F}_{\tau(\omega)}) = \xi_{\tau(\omega)}(\omega) \quad \text{1 valószínűséggel.} \tag{D3}$$

Speciálisan

$$E\xi_n(\omega) = E\xi_{\tau(\omega)}(\omega) = E\xi_N(\omega) = E\xi_1(\omega). \tag{D4}$$

Ha $(\xi_k(\omega), \mathcal{F}_k)$, $k = 1, 2, \dots$, szemimartingál, akkor

$$E(\xi_{\tau(\omega)}(\omega)|\mathcal{F}_n) \ge \xi_n(\omega) \quad \text{és} \quad E(\xi_N(\omega)|\mathcal{F}_{\tau(\omega)}) \ge \xi_{\tau(\omega)}(\omega) \quad \text{1 valószínűséggel,} \tag{D3$'$}$$

ezért

$$E\xi_n(\omega) \le E\xi_{\tau(\omega)}(\omega) \le E\xi_N(\omega). \tag{D4$'$}$$

Bizonyítás. Először a (D3) és (D3′) formulák baloldali azonosságát bizonyítjuk be. Ennek érdekében vegyük észre, hogy az $\eta_k(\omega) = \xi_{k+1}(\omega) - \xi_k(\omega)$, $n \le k < N$, valószínűségi változók $\mathcal{F}_{k+1}$ mérhetőek, és a $(\xi_k(\omega), \mathcal{F}_k)$, $n \le k \le N$, rendszer martingál volta ekvivalens azzal, hogy $E(\eta_k(\omega)|\mathcal{F}_k) = 0$, szemiszemimartingál volta pedig azzal, hogy $E(\eta_k(\omega)|\mathcal{F}_k) \ge 0$ 1 valószínűséggel minden $n \le k < N$ indexre. Vezessük be az $\tilde{\eta}_k(\omega) = \eta_k(\omega) I_{\{\omega\colon \tau(\omega) \ge k+1\}}$, $n \le k < N$ valószínűségi változókat. Mivel $E(\xi_{\tau(\omega)}(\omega)|\mathcal{F}_n) - \xi_n(\omega) = \sum\limits_{k=n}^{N-1} \tilde{\eta}_k(\omega)$, a (D3) és (D3′) formulák első részének az igazolásához elég azt bebizonyítani, hogy $E\tilde{\eta}_k(\omega)|\mathcal{F}_n) = 0$, $k \le n < N$, ha $(\xi_k, \mathcal{F}_k)$,

$n \le k \le N$, martingál, és $E\tilde\eta_k(\omega)|\mathcal{F}_n) \ge 0$, $n \le k < N$, ha $(\xi_k, \mathcal{F}_k)$, $n \le k \le N$, szemimartingál. Viszont az $\{\omega\colon \tau(\omega) \ge k+1\} \in \mathcal{F}_k$, (mert komplementere az $\{\omega\colon \tau(\omega) \le k\} \in \mathcal{F}_k$ halmaznak.) Ezért a feltételes várható érték tulajdonságai alapján $E(\tilde\eta_k(\omega)|\mathcal{F}_n) = E(\eta_k(\omega)I_{\{\omega\colon\, \tau(\omega)\ge k+1\}}|\mathcal{F}_n) = E(I_{\{\omega\colon\, \tau(\omega)\ge k+1\}}E(\eta_k(\omega)|\mathcal{F}_k))|\mathcal{F}_n)$. Innen $E(\tilde\eta_k(\omega)|\mathcal{F}_n) = 0$, ha $(\xi_k(\omega), \mathcal{F}_k)$ martingál, azaz $E(\eta_k(\omega)|\mathcal{F}_k) = 0$. Hasonlóan, $E(\tilde\eta_k(\omega)|\mathcal{F}_n) \ge 0$, ha $(\xi_k(\omega), \mathcal{F}_k)$ szemimartingál.

A (D3) és (D3$'$) formulák első azonosságából megkapjuk a (D4) és (D4$'$) képletek első állítását, ha várható értéket veszünk mind a két oldalon.

A (D3) azonosság második relációjának a bizonyítása hasonló elven alapul. Elég belátni azt, hogy $E(\xi_N(\omega)I_{\{\omega\colon\, \tau(\omega)=k\}}|\mathcal{F}_\tau) = \xi_k(\omega)I_{\{\omega\colon\, \tau(\omega)=k\}}$ tetszőleges $n \le k \le N$ számra, mert ezt az azonosságot összegezve minden $n \le k \le N$ számra megkapjuk a kívánt állítást. Viszont tekintve egy tetszőleges $B \in \mathcal{F}_{\tau(\omega)}$ halmazt $B \cap \{\omega\colon\, \tau(\omega) = k\} \in \mathcal{F}_k$, ezért felhasználva a tekintett sorozat martingál tulajdonságát és azt a tényt, hogy az $\xi_N(\omega)I_{\{\omega\colon\, \tau(\omega)=k\}}$ függvény nullával egyenlő az $\{\omega\colon\, \tau(\omega) \ne k\}$ halmazon, kapjuk a következő azonosságot: Ha $B \in \mathcal{F}_{\tau(\omega)}$, akkor

$$\int_B \xi_N(\omega)I_{\{\omega\colon\, \tau(\omega)=k\}}P(\,d\omega) = \int_{B\cap\{\omega\colon\, \tau(\omega)=k\}} \xi_N(\omega)dP(\,d\omega)$$
$$= \int_{B\cap\{\omega\colon\, \tau(\omega)=k\}} \xi_k(\omega)dP(\,d\omega) = \int_B \xi_k(\omega)I_{\{\omega\colon\, \tau(\omega)=k\}}P(\,d\omega).$$

Valójában ezt az állítást kellett bizonyítanunk.

A (D3$'$) egyenlőtlenség második relációjának a bizonyítása hasonló. Mindössze azt kell észrevenni, hogy a szemimartingál tulajdonság az $E(\xi_N(\omega)I_{\{\omega\colon\, \tau(\omega)=k\}}|\mathcal{F}_\tau) \ge \xi_k(\omega)I_{\{\omega\colon\, \tau(\omega)=k\}}$ egyenlőtlenség bizonyítását teszi lehetővé tetszőleges $n \le k \le N$ számra. Végül a (D4) és (D4$'$) még nem bizonyított része következik a (D3) és (D3$'$) relációk második felének az integrálásából.

A fenti tételben feltételeztük, hogy a τ megállási szabály 1 valószínűséggel véges. Ezt a feltételt lehet gyengíteni, de teljesen elhagyni nem lehet, mint a következő híres példa mutatja. Tegyük fel, hogy a következő játékot játszhatjuk. Feldobnak egy pénzdarabot, amely $\frac12$ valószínűséggel esik a fej, $\frac12$ valószínűséggel az írás oldalra. Feltehetünk tetszőleges tétet, és fej dobás esetén tétünk megduplázodik, írás dobás esetén pedig elvész. Tegyük fel, hogy célunk a következő: Biztosan akarunk nyerni 1 forintot. Ennek érdekében felteszünk 1 forintot, és ha nyertünk hazamegyünk. Ha nem, duplázunk, 2 forintot teszünk fel, ha nyerünk hazamegyünk, ha nem duplázunk és 4 forintot teszünk fel. Ha nyerünk hazamegyünk, ha nem duplázunk és 8 forintot teszünk fel, és így tovább. Előbb vagy utóbb 1 valószínűséggel megjelenik a fej dobás, és ilyen módon ebben az igazságos játékban 1 valószínűséggel megnyerjük a kívánt 1 forintot. Ezek szerint mégis lehet egy igazságos játékban biztosan nyerni? Beszéljük meg ezt a példát részletesebben, fogalmazzuk meg a hozzátartozó matematikai modellt.

Egy érdekes matematikai modell. Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots,$ független valószínűségi változók, amelyekre $P(\xi_n = 2^{n-1}) = P(\xi_n = -2^{n-1}) = \frac12$, $n = 1, 2, \dots$, és legyen $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$.

Ekkor S_n, $n=1,2,\dots$, martingál. Definiáljuk a következő megállási szabályt. $\tau(\omega)=\min\{n\colon n\ge 1,\ S_n\ge 1\}$, és vezessük be a $\tau_N(\omega)=\min(\tau(\omega),N)$ megállási szabályokat is minden $N=1,2,\dots$ számra. Ekkor $P(\tau(\omega)=k)=2^{-k}$, $k=1,2,\dots$, (a $\tau(\omega)=k$ esemény akkor következik be, ha a ξ_n, $n=1,2,\dots$, változók közül a k-ik az első pozitív értékű valószínűségi változó), ezért $P(\tau(\omega)<\infty)$ 1 valószínűséggel, és $P(S_\tau=1)=1$. Ez felel meg az előbbi játéknak, és annak az állításnak, hogy 1 valószínűséggel 1 forintot nyerünk. Tekintsük a τ_N megállási szabályokat, és a hozzátartozó nyereményeket. Ekkor $P(\tau_N(\omega)=k)=2^{-k}$ minden $1\le k<N$ számra, $P(\tau_N=2\cdot 2^{-N}$, $P(S_{\tau_N(\omega}(\omega)=1)=1-2^{-N}$, $P(S_{\tau_N(\omega}(\omega)=-(1+2+\cdots 2^{N-1})=P(S_{\tau_N(\omega}(\omega)=-(2^N-1))=2^{-N}$. Ez azt jelenti, hogy $ES_{\tau_N(\omega)}(\omega)=0$, ahogy a fenti tétel is állítja, de $ES_{\tau(\omega)}(\omega)=1$. Igaz ugyan, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}S_{\tau_N(\omega)}(\omega)=S_{\tau(\omega)}(\omega)$ 1 valószínűséggel, ezért $E\left(\lim\limits_{n\to\infty}S_{\tau_N(\omega)}(\omega)\right)=E(S_{\tau(\omega)}(\omega))$. De nem lehet felcserélni a limesz és várható érték képzés sorrendjét a fenti azonosság bal oldalán. Megjegyzem, hogy a fenti példa azt mutatja, hogy valóban lehet egy ilyen játékban 1 valószínűséggel nyerni, de ehhez végtelen sok tőkével kell rendelkeznünk, ami lehetővé teszi, hogy a játékot ne kelljen idő előtt befejeznünk.

Megmutatom, hogy a fent megfogalmazott tételnek véletlenül megállított martingálok és szemimartingálok várható értékéről fontos következményei vannak. Többek között ebből következik a független valószínűségi változók részletösszegeiről szóló egyik fontos eredmény, a Kolmogorov egyenlőtlenség. A martingálelméleti tárgyalás egyben megvilágítja ennek az eredménynek a mélyebb hátterét.

Először bebizonyítok egy becslést martingálok és szupermartingálok maximumáról.

Becslés szemimartingálok maximumáról. *Legyen* $(\xi_n,\mathcal{F}_n)$, $n=1,2,\dots$, *szemimartingál. Ekkor*

$$P\left(\max_{1\le k\le N}\xi_k(\omega)\ge\lambda\right)\le\frac{1}{\lambda}\int_{\{\omega\colon\ \max\limits_{1\le k\le N}\xi_k(\omega)\ge\lambda\}}\xi_N(\omega)P(\,d\omega)\le\frac{E|\xi_N(\omega)|}{\lambda}\tag{D5}$$

minden $N=1,2,\dots$ *egész és* $\lambda>0$ *valós számra.*

A becslés bizonyítása. Vezessük be a $\bar\tau(\omega)=\min(j\colon \xi_j(\omega)\ge\lambda)$ és $\tau(\omega)=\min(\bar\tau(\omega),N)$ megállási szabályokat. Alkalmazzuk a (D3′) reláció második felét a véletlenül megállított (szemi)martingálok várható értékének becsléséről szóló tételnek $n=1$ és N paraméterrel. Azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\lambda P\left(\max_{1\le k\le N}\xi_k(\omega)\ge\lambda\right)&\le\int_{\{\omega\colon\ \max\limits_{1\le k\le N}\xi_k(\omega)\ge\lambda\}}\xi_{\tau(\omega)}(\omega)P(\,d\omega)\\&\le\int_{\{\omega\colon\ \max\limits_{1\le k\le N}\xi_k(\omega)\ge\lambda\}}E(\xi_N(\omega)|\mathcal{F}_{\tau(\omega)})P(\,d\omega)=\int_{\{\omega\colon\ \max\limits_{1\le k\le N}\xi_k(\omega)\ge\lambda\}}\xi_N(\omega)P(\,d\omega),\end{aligned}$$

mert $\{\omega\colon \max\limits_{1\le k\le N}\xi_k(\omega)\ge\lambda\}$, és ez a (D5) formula első egyenlőtlensége. A (D5) formula második egyenlőtlensége nyílvánvaló.

A Kolmogorov egyenlőtlenség egyszerűen bizonyítható az előző becslés és a következő lemma segítségével.

Lemma. *Legyen adva egy $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ σ-algebra és egy az $E\xi^2 < \infty$ feltételt teljesítő ξ valószínűségi változó egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Ekkor teljesül a*

$$E(\xi^2|\mathcal{F}) \geq (E\xi|\mathcal{F}))^2 \quad \text{1 valószínűséggel.}$$

egyenlőtlenség. Ebből az egyenlőtlenségből következik, hogy amennyiben $(\xi_n, \mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2, \dots$, martingál, és $E\xi_n^2 < \infty$ minden $n = 1, 2, \dots$ számra, akkor $(\xi_n^2, \mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2, \dots$, szemimartingál.

A lemma bizonyítása. Azt állítom, hogy $E(\xi^2|\mathcal{F}) - (E\xi|\mathcal{F}))^2 = E(\xi - E(\xi|\mathcal{F}))^2|\mathcal{F})$, ahonnan $E(\xi^2|\mathcal{F}) - (E\xi|\mathcal{F}))^2 \geq 0$, tehát a lemma egyenlőtlensége igaz. Az előző azonosság következik az $E((\xi - E(\xi|\mathcal{F}))^2|\mathcal{F}) = E(\xi^2|\mathcal{F}) - 2E(\xi E(\xi|\mathcal{F})|\mathcal{F}) + (E(\xi|\mathcal{F}))^2 = E(\xi^2|\mathcal{F}) - (E(\xi|\mathcal{F}))^2$, mert $E(\xi E(\xi|\mathcal{F})|\mathcal{F}) = (E(\xi|\mathcal{F}))^2$ számolásból.

Ezért, ha $(\xi_n, \mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2, \dots$, martingál, $E\xi_n^2 < \infty$ minden $n = 1, 2, \dots$ számra, akkor $E(\xi_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) \geq (E(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n))^2 = \xi_n^2(\omega)$, $n = 1, 2, \dots$, és ezt kellett bizonyítanunk.

Megjegyzés: Az előző lemma bizonyításában használt azonosság hátterében az a jól ismert tény áll, hogy az $E(\xi|\mathcal{F})$ feltételes várható érték a ξ valószínűségi változó ortogonális vetülete a $\mathcal{F}$ σ-algebrára, ezért alkalmazhatjuk a Pythogorász tételt a megfelelő valószínűségi változókra. Az így kapott az $\xi(\omega)^2 = (\xi(\omega) - E(\xi(\omega)|\mathcal{F})^2 + E(\xi(\omega)|\mathcal{F})^2$ azonosság két oldalán véve a $\mathcal{F}$ σ-algebra szerinti feltételes várható értékét megkapjuk a lemma bizonyításában felírt azonosságot.

A fenti eredmények egyszerű következménye a Kolmogorov egyenlőtlenség.

Kolmogorov egyenlőtlenség. *Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_N$ független valószínűségi változók, amelyekre $E\xi_n = 0$, $\sigma_n^2 = E\xi_n^2 < \infty$ minden $1 \leq n \leq N$ számra. Vezessük be az $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$, $1 \leq n \leq N$, részletösszegeket. Érvényes a*

$$P\left(\max_{1 \leq n \leq N} |S_n| > x\right) \leq \frac{\operatorname{Var} S_N}{x^2} = \frac{\sum\limits_{n=1}^{N} \sigma_n^2}{x^2} \quad \text{minden } x > 0 \text{ számra}$$

reláció, amelyet Kolmogorov egyenlőtlenségnek hívnak.

Bizonyítás. Az $S_n(\omega)$, $n = 1, \dots, N$, sorozat martingált, ezért az előző lemma alapján az $S_n^2(\omega)$, $n = 1, \dots, N$, sorozat szemimartingált alkot. Alkalmazva erre a szemimartingálok maximumáról szóló becslést kapjuk, hogy

$$P\left(\max_{1 \leq n \leq N} |S_n| > x\right) \leq \frac{ES_N^2}{x^2} = \frac{\operatorname{Var} S_n}{x^2} = \frac{\sum\limits_{n=1}^{N} \sigma_n^2}{x^2},$$

amint állítottuk.

1. megjegyzés. Érdemes megjegyezni, hogy a Kolmogorov egyenlőtlenség ugyanazt a becslést adja a $P\left(\max\limits_{1\le n\le N}|S_n|>x\right)$ valószínűségre, mint amit a Csebisev egyenlőtlenség ad a $P\left(|S_N|>x\right)$ valószínűségre. Ez az eredmény olyan tényt fejez ki, hogy független, nulla várható értékű valószínűségi változók részletösszegeinek a maximuma nem sokkal nagyobb, mint az utolsó részletösszeg. Több ilyen jellegű eredmény van a valószínűségszámításban, (lásd például a következő 2. megjegyzést). A Kolmogorov egyenlőtlenség hasznos például a nagy számok erős törvényének a bizonyításában. Ha a nagy számok törvényét a lehető legáltalánosabb feltételek mellett akarjuk bizonyítani, akkor minél enyhébb momentum feltételek mellett kell jó becslést adni független valószínűségi változók részletösszegeinek a maximumára. Ilyenkor a Kolmogorov egyenlőtlenség tesz jó szolgálatot.

A Kolmogorov egyenlőtlenség bizonyításában szereplő lemmának érvényes a következő általánosítása.

Lemma martingálok konvex függvényeiről. *Legyen adva egy $\xi(\omega)$ valószínűségi változó és egy $\Phi(x)$, $-\infty<x<\infty$, konvex függvény, amelyekre teljesülnek az $E|\xi(\omega)|<\infty$ és $E|\Phi(\xi(\omega)|<\infty$ feltételek egy $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mezőn, és egy $\mathcal{F}\subset\mathcal{A}$ σ-algebra. Ekkor teljesül az*

$$E(\Phi(\xi(\omega)|\mathcal{F}))\ge\Phi\left(E(\xi(\omega)|\mathcal{F})\right)\quad \textit{1 valószínűséggel}$$

egyenlőtlenség. Ezért, ha $(\xi_n,\mathcal{F}_n)$, $n=1,2,\dots$, martingál, $\Phi(x)$ konvex függvény, és $E|\Phi(\xi_n)|<\infty$ minden $n=1,2,\dots$ számra, akkor $(\Phi(\xi_n),\mathcal{F}_n)$, $n=1,2,\dots$, szemimartingál.

A lemma indoklása. A Jensen egyenlőtlenség alapján tudjuk, hogy a ξ valószínűségi változóra érvényes az

$$E\Phi(\xi(\omega))=\int\Phi(x)F(\,dx)\ge\Phi\left(\int xF(\,dx)\right)=\Phi\left(E(\xi(\omega))\right)$$

egyenőtlenség, ahol $F(x)$ jelöli a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. Tudván, hogy létezik a ξ valószínűségi változó $F(B,\omega)$, feltételes eloszlása $\mathcal{F}$ σ-algebrára nézve, ahol $\omega\in\Omega$, és B a számegyenes Borel mérhető részhalmaza, és azt, hogy hogyan lehet a feltételes várható értéket a feltételes eloszlás segítségével kiszámítani, kapjuk, ismét a Jensen egyenlőtlenség segítségével, hogy

$$E\Phi(\xi(\omega)|\mathcal{F})=\int\Phi(x)F(\,dx,\omega)\ge\Phi\left(\int xF(\,dx,\omega)\right)=\Phi\left(E(\xi(\omega)|\mathcal{F}\right)$$
$$\text{1 valószínűséggel,}$$

ahol $F(\cdot,\omega)$ jelöli a ξ valószínűségi változó feltételes eloszlását feltéve a $\mathcal{F}$ σ-algebrát. Ennek az egyenlőtlenségnek a segítségével belátható, hogy $(\Phi(\xi_n),\mathcal{F}_n)$ $n=1,2,\dots$, szemimartingál az adott feltételek mellett.

Feladat. Lássuk be elemi módszerekkel (a feltételes eloszlás létezéséről szóló eredmény ismerete nélkül), hogy $|E(\xi(\omega)|\mathcal{F})| \le E(|\xi(\omega)|\,|\mathcal{F})$ és $(E(\xi(\omega)|\mathcal{F}))^+ \le E(\xi(\omega)^+|\mathcal{F})$, ahol $x^+ = \max(x, 0)$. Mutassuk meg, hogy ha $(\xi_n(\omega), \mathcal{F}_n)$ martingál, akkor $(|\xi_n(\omega)|, \mathcal{F}_n)$ és $(\xi_n^+(\omega), \mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2, \dots$, szemimartingál.

Felhasználva a martingálok konvex függvényeiről szóló lemmát az $\Phi(x) = |x|^\alpha$, $1 \le \alpha < \infty$ konvex függvényekkel valamint a (D5) formula első egyenlőtlenségét be lehet látni az alábbi eredményt, amelynek bizonyítását elhagyom.

Tétel martingálok maximumának a momentumairól. *Legyen* $(\xi_n, \mathcal{F}_n)$, $1 \le n \le N$ *martingál. Ekkor*

$$E\left(\max_{1\le n\le N} |\xi_n|\right)^\alpha \le \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^\alpha E|\xi_N|^\alpha \quad \text{ha } \alpha > 1,$$

és

$$E\left(\max_{1\le n\le N} |\xi_n|\right) \le \frac{e}{e-1} + \frac{e}{e-1} E|\xi_N| \log^+ |\xi_N|$$

az $\alpha = 1$ *esetben, ahol* $\log^+ x = \max(\log x, 0)$.

2. megjegyzés. Az előző eredmény azt jelenti, hogy egy martingálnak (például nulla várható értékű valószínűségi változók részletösszegeinek) az abszolut értékét, akkor az így kapott sorozat maximumának a momentumai csak konstans számszor nagyobbak, mint az utolsó tag maximuma. Ez az egyenlőtlenség is olyan tényt fejez ki, hogy egy martingál maximuma nem sokkal nagyobb, mint az utolsó tagja.

Konvergencia tételek martingálokra.

Fontos eredmények érvényesek martingálok 1 valószínűségi konvergenciájáról. Itt csak a legfontosabb eredményt ismertetem. Ezenkívül megmutatom ennek az eredménynek egy érdekes alkalmazását, amely lehetővé teszi bizonyos esetekben a Radon–Nikodym derivált többé-kevésbé explicit kiszámolását. Ezeknek az eredményeknek a bizonyításában is azt használjuk ki, hogy a martingálok az igazságos, a szemimartingálok pedig az előnyös játékok modelljei.

Tétel martingálok 1 valószínűségi konvergenciájáról. *Legyen* $(\xi_n(\omega), \mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2, \dots$, *martingál egy* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *valószínűségi mezőn. Ekkor az* $E|\xi_n(\omega)|$, $n = 1, 2, \dots$, *sorozat monoton növekszik. Ha ez a sorozat korlátos, azaz létezik olyan* $K > 0$ *szám, amelyre* $E|\xi_n(\omega)| \le K$ *minden* $K = 1, 2, \dots$ *számra, akkor létezik 1 valószínűséggel a* $\xi_\infty(\omega) = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n(\omega)$ *határérték. Ezenkívül érvényes az* $E|\xi_\infty(\omega)| \le K$ *egyenlőtlenség is ugyanazzal a* $K > 0$ *konstanssal.*

A tétel bizonyítása. Abból, hogy $(\xi_n(\omega), \mathcal{F}_n)$ martingál következik, hogy az $(|\xi_n(\omega)|, \mathcal{F}_n)$ sorozat $n = 1, 2, \dots$, szemimartingál. Ezért az $E|\xi_n(\omega)|$ sorozat monoton növekszik, amint azt a tételben állítjuk. Az, hogy a $\xi_n(\omega)$, $n = 1, 2, \dots$, sorozat 1 valószínűséggel konvergál ekvivalens azzal a ténnyel, hogy nulla annak a valószínűsége, hogy az $\xi_n(\omega)$,

$n = 1, 2, \ldots$, sorozat limesz szuperiora szigorúan nagyobb, mint annak limesz inferiora. Ezért annak érdekében, hogy megmutassuk azt, hogy a $\xi_n(\omega)$ sorozat 1 valószínűséggel konvergál, elég megmutatni, hogy

$$P(\liminf_{n\to\infty} \xi_n(\omega) \le r_1 < r_2 \le \limsup_{n\to\infty} \xi_n(\omega)) = 0$$

minden (r_1, r_2), $r_1 < r_2$, racionális számpárra. Ezt meg tudjuk mutatni úgy, hogy definiáljuk természetes módon azt, hogy az $(\xi_n(\omega), n)$, $n = 1, 2, \ldots$, pontokon keresztülmenő (véletlen) töröttvonal függvény hányszor metszi át az $[r_1, r_2] \times [1, \infty]$ sávot, és bebizonyítjuk, hogy ez a metszésszám 1 valószínűséggel véges.

Rögzítsünk valamilyen $1 \le N < \infty$ számot és az $1 \le n \le N$ időintervallumban történt átmetszések számának definiciója érdekében vezessük be a következő $\zeta_k(\omega)$, $k = 1, 2, \ldots$ (véletlen) időpontokat:

$\zeta_1(\omega) = \min\{k : 1 \le k \le N, \xi_k(\omega) \le r_1\}$, ha létezik ilyen k index, $\zeta_2(\omega) = \min\{k : \zeta_1(\omega) \le k \le N, \xi_k(\omega) \ge r_2\}$, ha létezik ilyen k index. A további $\zeta_j(\omega)$, $j = 3, 4, \ldots$ időpontokat hasonlóan definiáljuk (amíg ez lehetséges). Ha j páros szám, akkor legyen $\zeta_{j+1}(\omega) = \min\{k : \zeta_j(\omega) \le k \le N, \xi_k(\omega) \le r_1\}$, ha létezik ilyen k index. Ha j páratlan szám, legyen $\zeta_{j+1}(\omega) = \min\{k : \zeta_j(\omega) \le k \le N, \xi_k(\omega) \ge r_2\}$. Legyen $\beta_N(\omega)$ a legnagyobb olyan j index, amelyet ily módon definiálni tudtunk, és ezután definiáljuk a $\zeta_{\beta_N(\omega)+1}$ valószínűségi változót (véletlen index-szel) a $\zeta_{\beta_N(\omega)+1} = N$ képlet segítségével. Vegyük észre, hogy $\{\omega \colon \zeta_j(\omega) = n\} \in \mathcal{F}_n$ tetszőleges $j = 1, 2, \ldots$, $1 \le n \le N$ számokra. Itt $\zeta_j(\omega)$-t tekinthetjük olyan valószínűségi változónak, amely nincs értelmezve az egész $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, vagy azt mondjuk, hogy $\zeta_j(\omega) = N + 1$ azokon az $\omega \in \Omega$ helyeken, ahol eddig nem definiáltuk őt. Be lehet látni, hogy a $\beta_N(\omega)$ valószínűségi becslés várható értéke teljesíti a következő egyenlőtlenséget.

Becslés annak várható értékéről, hogy egy martingál hányszor metsz át egy intervallumot. *Legyen $(\xi_n(\omega), \mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, martingál egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Rögzítsünk egy N, $N \ge 1$ egész, és két r_1, r_2, $r_1 < r_2$, valós számot, és tekintsük az általuk az előző bekezdésben definiált $\beta_N(\omega)$ valószínűségi változót. Ez teljesíti az*

$$\frac{E\beta_N(\omega) - 1}{2}(r_2 - r_1) \le E(\xi_N(\omega) - r_1)^+ \le E|\xi_N(\omega)| + |r_1|. \tag{D6}$$

egyenlőtlenséget, ahol $x^+ = \max(x, 0)$.

A becslés bizonyítása. Vezessük be a $\bar\xi_n(\omega) = (\xi_n(\omega) - r_1)^+$ és $\eta_n(\omega) = \bar\xi_{n+1}(\omega) - \bar\xi_n(\omega)$, $n = 1, 2, \ldots$, valószínűségi változókat. Ekkor $(\bar\xi_n(\omega), \mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, szemimartingál, és $E(\eta_n(\omega)|\mathcal{F}_n) \ge 0$ 1 valószínűséggel minden $n = 1, 2, \ldots$ számra. Tekintsük a $[\zeta_{2j-1}(\omega), \zeta_{2j})(\omega)]$, $1 \le j \le \frac{\beta_N(\omega)}{2}$ (véletlen, és véletlen számú) intervallumok rendszerét, valamint az $A(\omega) = \{1, \ldots, N\} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{[\frac{\beta_N(\omega)+1}{2}]} [\zeta_{2j-1}(\omega), \zeta_{2j}(\omega)] \right)$ halmazt és $Z_n(\omega) = \sum_{j=1}^{[\frac{\beta_N(\omega)+1}{2}]} (\bar\xi_{\zeta_{2j}(\omega)}(\omega) - \bar\xi_{\zeta_{2j-1}(\omega)}(\omega))$ valószínűségi változót, ahol $[x]$ egy szám egész részét jelöli. Ekkor $(r_2-r_1)\frac{\beta_N(\omega)-1}{2} \le Z_N(\omega)$ 1 valószínűséggel, mert $(\bar\xi_{\zeta_{2j}(\omega)}(\omega)-\bar\xi_{\zeta_{2j-1}(\omega)}(\omega)) \ge (r_2-r_1)$, ha $2j \le \beta_n(\omega)$, és a $2j=\beta_N(\omega)+1$ esetben $(\bar\xi_{\zeta_{2j}(\omega)}(\omega)-\bar\xi_{\zeta_{2j-1}(\omega)}(\omega)) \ge 0$. A most bebizonyított egyenlőtlenségből következik, hogy

$$(r_2-r_1)\frac{E\beta_N(\omega)-1}{2} \le EZ_N(\omega).$$

Másrészt azt állítom, hogy

$$EZ_N(\omega) \le E(\xi_n(\omega)-r_1)^+.$$

A fenti két egyenlőtlenségből következik a (D6) egyenlőtlenség első fele. Az utoljára felírt egyenlőtlenség pedig azért igaz, mert $E(\xi_n(\omega)-r_1)^+ - EZ_N(\omega) = \sum\limits_{n=1}^{N} E\eta_n I_{\{\omega\colon\, n\in A(\omega)\}}$, és mivel $\{\omega\colon n\in A(\omega)\}\in\mathcal{F}_n$, ezért $E\eta_n I_{\{\omega\colon\, n\in A(\omega)\}} \ge 0$ minden $1\le n\le N$ számra.

A (D6) formula második egyenlőtlensége nyílvánvaló.

A tétel bizonyítását egyszerűen befejezhetjük az előző becslés segítségével. Mivel $\beta_N(\omega)$, $N=1,2,\dots$, monoton növekvő függvénysorozat, $\beta_N(\omega)\ge 0$ minden $N=1,2,\dots$ számra és $\omega\in\Omega$ pontban, alkalmazhatjuk a Beppo–Levy tételt monoton függvény sorozat határértékének integráljáról. A Beppo–Levy tételből és a (D6) becslésből következik, hogy $E\left(\lim\limits_{N\to\infty}\beta_N(\omega)\right) = \lim\limits_{N\to\infty} E\beta_N(\omega) < \infty$, ahonnan kapjuk, hogy $P\left(\lim\limits_{N\to\infty}\beta_N(\omega)<\infty\right) = 1$. Innen következik a fent elmondottak alapján, hogy a $\xi_n(\omega)$ sorozat 1 valószínűséggel konvergál egy $\xi_\infty(\omega)$ valószínűségi változóhoz. A Fatou lemmából következik, hogy $E|\xi_\infty(\omega)| \le \lim\limits_{n\to\infty} E|\xi_n(\omega)| \le K$. A Tétel bizonyítását befejeztük.

Megjegyzés. Szeretnénk bizonyos esetekben tudni, hogy a $\xi_n(\omega)$ martingál nem csak 1 valószínűséggel konvergál a $\xi_\infty(\omega)$ valószínűségi változóhoz, hanem L_1 normában is, azaz $\lim\limits_{n\to\infty} E|\xi_n(\omega)-\xi_\infty(\omega)|=0$. Ez a reláció nem feltétlenül érvényes a martingálok 1 valószínűségi konvergenciájáról szóló tétel feltételeinek teljesülése esetén. Ellenpéldát kaphatunk például azon példa módosításával, amelyben megmutattuk, hogyan lehet igazságos játékban 1 valószínűséggel nyerni.

Legyenek $X_n(\omega)$, $n=1,2\dots$, független valószínűségi változók, $P(X_n(\omega)=2^{n-1}) = P(X_n(\omega)=-2^{n-1})=\frac12$. Definiáljuk az $S_n(\omega)=\sum\limits_{j=1}^{n}X_j(\omega)$ részletösszegeket és a $\tau(\omega)=\min\{k\colon S_k(\omega)\ge 1\}$, $\tau_n(\omega)=\min(n,\tau(\omega))$, $n=1,2,\dots$, megállási szabályokat. Vezessük be az $\xi_n(\omega)=S_{\tau_n(\omega)}$, $n=1,2,\dots$, valószínűségi változókat. Ekkor $\xi_n(\omega)$, $n=1,2,\dots$, martingál, és $E|\xi_n(\omega)|=2-2^{-n}$, $n=1,2,\dots$. Ez azt jelenti, hogy erre a martingálra is alkalmazható a martingálok 1 valószínűségi konvergenciájáról szóló tétel. Közvetlenül is látható, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n(\omega)=1$, azaz a martingál sorozat 1 valószínűséggel konvergál 1-hez, míg $E\xi_n(\omega)=0$. Tehát ez a martingál 1 valószínűséggel konvergál 1-hez, és L_1 normában nem konvergál oda.

A következő eredmény a martingálok 1 valószínűségi konvergenciájáról szóló tétel egyik érdekes következménye, amely segíthet a Radon–Nikodym derivált kiszámításában bizonyos esetekben.

Tétel. *Legyen adva egy $\xi(\omega)$, $E|\xi(\omega)| < \infty$, valószínűségi változó és $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots \mathcal{A}$ σ-algebrák növekvő sorozata egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Jelölje $\mathcal{F}_\infty$ a $\mathcal{F}_n$, $n = 1, 2, \dots$ σ-algebrák által generált σ-algebrát. A*

$$\lim_{n\to\infty} E(\xi(\omega)|\mathcal{F}_n) = E(\xi(\omega)|\mathcal{F}_\infty)$$

konvergencia teljesül 1 valószínűséggel és L_1 normában is.

A tétel bizonyítása. A $(\xi_n(\omega), \mathcal{F}_n)$, $\xi_n(\omega) = E(\xi(\omega)|\mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2, \dots$, sorozat martingál, és $E|\xi_n(\omega)| \le E|\xi(\omega)|$, ezért alkalmazható rá a martingálok 1 valószínűségi konvergenciájáról szóló tétel. Innen következik, hogy létezik a $\xi_\infty(\omega) = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n(\omega)$ határérték 1 valószínűséggel alkalmas $\xi_\infty(\omega)$ valószínűségi változóval, de be kell bizonyítani, hogy $\xi_\infty(\omega) = E(\xi|(\omega)|\mathcal{F})$. Ez ekvivalens azzal az állítással, hogy

$$\int_B \xi_\infty(\omega) P(\,d\omega) = \int_B \xi(\omega) P(\,d\omega)$$

minden $B \in \mathcal{F}_n$ halmazra és $n = 1, 2, \dots$ számra. Ezért elég belátni, hogy

$$\lim_{n\to\infty} E|E(\xi|\mathcal{F}_n) - \xi_\infty(\omega)| \to 0,$$

azaz a $\xi_n(\omega)$, $n = 1, 2, \dots$, sorozat nem csak majdnem mindenütt, hanem L_1 normában is konvergál a $\xi_\infty(\omega)$ valószínűségi változóhoz. Ehhez az analízis általános eredményei alapján elegendő belátni, hogy a $\xi_n(\omega)$, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi változók egyenletesen integrálhatóak, azaz minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $K = K(\varepsilon)$ szám, hogy $\int_{\{\omega\colon\, |\xi_n(\omega)| \ge K\}} |\xi_n(\omega)| P(\,d\omega) \le \varepsilon$ minden $n = 1, 2, \dots$ indexre. Viszont

$$\int_{\{\omega\colon\, |\xi_n(\omega)| \ge K\}} |\xi_n(\omega)| P(\,d\omega) \le \int_{\{\omega\colon\, |\xi_n(\omega)| \ge K\}} |\xi(\omega)| P(\,d\omega),$$

és minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ szám, hogy $\int_B |\xi(\omega)| P(\,d\omega) < \varepsilon$, ha $P(B) \le \delta$. Másrészt, $P(\omega\colon |\xi_n(\omega)| \ge K) \le \frac{E|\xi_n(\omega)|}{K} \le \frac{E|\xi(\omega)|}{K} \le \delta$, ha $K \ge K_0(\delta)$ alkalmas $K_0(\delta) > 0$ számra. A fenti becslésekből következik a Tétel állítása.

Következmény: *Legyen adva egy $(X, \mathcal{X})$ mérhető téren egy μ valószínűségi mérték és egy ν, a μ valószínűségi mértékre nézve abszolut folytonos előjeles mérték, amelynek mind a pozitív mind a negatív része véges. Tekintsük az X tér olyan egyre finomodó $\{A_1^{(n)}, \dots, A_{k_n}^{(n)}\}$ particióit, $n = 1, 2, \dots$, $A_j^{(n)} \in \mathcal{X}$, $1 \le j \le k_n$, amelyek egyesítése generálja a $\mathcal{X}$ σ-algebrát, és definiáljuk az $f_n(x) = \frac{\nu(A_j^{(n)})}{\mu(A_j^{(n)})}$, ha $x \in A_j^{(n)}$ függvényeket.*

Az $f_n(\cdot)$ függvények μ majdnem mindenütt konvergálnak a $\frac{d\nu}{d\mu}(x)$ Radon–Nikodym deriválthoz.

Bizonyítás: Tekintsük az $(X, \mathcal{X}, \mu)$ teret, mint valószínűségi mezőt, vezessük be rajta azokat a $\mathcal{F}_n$, $n = 1, 2, \dots$, σ-algebrákat, amelyek atomjai az $\{A_1^{(n)}, \dots, A_{k_n}^{(n)}\}$ partició elemei, és legyen $f(x) = \frac{d\nu}{d\mu}(x)$, $x \in X$. Ekkor a Következményben megfogalmazott feltételek teljesülés esetén $Ef(x) < \infty$, $f_n(x) = E(f(x)|\mathcal{F}_n)$, és az $\mathcal{F}_n$ növekvő σ-algebra sorozat generálja a $\mathcal{X}$ σ-algebrát. Ezért az előző tétel szerint $f_n(x)$ egy valószínűséggel konvergál az $f(x)$ függvényhez, és ezt kellett belátnunk.

A fenti eredménynek érvényes a következő általánosítása, amely szintén hasznos biznyos alkalmazásokban.

A következmény általánosítása: *Legyen adva egy $(X, \mathcal{X})$ mérhető téren egy μ valószínűségi mérték és egy ν, a μ valószínűségi mértékre nézve abszolut folytonos előjeles mérték, amelynek mind a pozitív mind a negatív része véges. Tekintsük az X téren $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots$ σ-algebrák olyan növekvő sorozatát, amelyek egyesítése generálja a $\mathcal{X}$ σ-algebrát. Vezessük be az $f_n(x) = \left.\frac{d\nu}{d\mu}\right|_{\mathcal{F}_n}(x)$, $x \in X$, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi változókat, amelyek a μ mérték Radon–Nikodym deriváltjával egyenlőek, ha mind a μ mind a ν mértéket megszorítjuk a $\mathcal{F}_n$ σ-algebrára. Az $f_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, függvények μ majdnem minden pontban és $L_1(\mu)$ normában is konvergálnak a $\frac{d\nu}{d\mu}(x)$ Radon–Nikodym deriválthoz az $(X, \mathcal{X})$ téren.*

Megfordítva, ha nem tudjuk, hogy a ν mérték abszolut folytonos-e a μ mértékre nézve az $(X, \mathcal{X})$ téren, de tudjuk, hogy az $f_n(x)$ függvények $L_1(\mu)$ normában konverálnak egy $f_\infty(x)$ függvényhez, akkor állíthatjuk azt, hogy a ν mérték abszolut folytonos az $(X, \mathcal{X})$ téren a μ mértékre nézve, és $\frac{d\nu}{d\mu}(x) = f_\infty(x)$.

Indoklás: Az szorul még magyarázatra, hogy az $f_n(x)$ függvények $L_1(\mu)$ konvergenciájából miért következik a ν mérték abszolut folytonossága a μ mértékre nézve az $(X, \mathcal{X})$ téren $f_\infty(x)$, $x \in X$, Radon–Nikodym deriválttal. Viszont az adott feltételek mellett felírhatjuk, hogy $\nu(A) = \lim\limits_{n \to \infty} \int_A f_n(x)\mu(\,dx) = \int_A f_\infty(x)\mu(\,dx)$ minden $A \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ halmazra. Viszont a mértékek kiterjesztésének egyértelműsége miatt (egy algebráról egy σ-algebrára) következik, hogy a $\nu(A) = \int_A f_\infty(x)\mu(\,dx)$ azonosság érvényes minden $A \in \mathcal{X}$ halmazra, és ezt kellett bizonyítanunk.

Feladat: Legyenek $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots$, független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, amelyeknek létezik várható értékük. Legyen $\tau(\omega)$ egy megállási szabály a $\mathcal{F}_n = \mathcal{B}(\xi_1, \dots, \xi_n)$, $n = 1, 2, \dots$, σ-algebrák sorozatára nézve. Tegyük fel továbbá, hogy létezik olyan N egész szám, melyre $P(\tau(\omega) \le N) = 1$. Vezessük be az $S_n(\omega) = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k(\omega)$, $n = 1, 2, \dots$, jelölést. Mutassuk meg, hogy $ES_{\tau(\omega)}(\omega) = E\tau(\omega)E\xi_1(\omega)$. Ha $E\xi_1(\omega) = 0$, és $E\xi_1^2(\omega)) < \infty$ akkor $ES^2_{\tau(\omega)}(\omega) = E\tau(\omega)E\xi_1^2(\omega)$. A fenti állítások érvényesek olyan nem feltétlenül 1 valószínűséggel véges $\tau(\omega)$ megállási szabályokra is, amelyekre definiálva a $\tau_n(\omega) = \min(\tau(\omega), n)$, $n = 1, 2, \dots$, megállási szabályokat

$$E \lim_{n\to\infty} \left(S_{\tau_n(\omega)}(\omega) - S_{\tau(\omega)}(\omega) \right) = 0,$$

illetve $E \lim\limits_{n\to\infty} \left(S^2_{\tau_n(\omega)}(\omega) - S^2_{\tau(\omega)}(\omega) \right) = 0$. (A fenti eredményeket hívák Wald azonosságnak az irodalomban.)

Feladat: Legyen $S_1(\omega), S_2(\omega), \dots$, a nulla pontból kiinduló bolyongás az egész számokon, azaz legyenek az $S_{n+1}(\omega) - S_n(\omega)$ valószínűségi változók függetlenek, és vegyenek fel $+1$ vagy -1 értéket, mind a kettőt $\frac{1}{2}$ valószínűséggel. Rögzítsünk egy $a > 0$ pozitív és egy $b < 0$ negatív egész számot. Jelölje $\tau_{a,b}(\omega)$ azt a véletlen időpontot, amikor a bolyongás először eléri az a vagy b pontot. Lássuk be (az előző feladat eredményének a segítségével), hogy annak a valószínűsége, hogy először az a pontot látogatja meg a bolyongás $\frac{a}{a+|b|}$, annak, hogy a b pontot $\frac{|b|}{a+|b|}$. Továbbá $E\tau_{a,b} = a|b|$. Jelölje $\tau_a(\omega)$ azt a véletlen időpontot, amikor a bolyongás először meglátogatja az $a > 0$ pontot. Lássuk be, hogy $P(\tau_a(\omega) < \infty) = 1$, de $E\tau_a(\omega) = \infty$.

Segítség: Vegyük észre, hogy $S_{\tau_{N,(a,b)}(\omega)}(\omega)$, és $S^2_{\tau_{N,(a,b)}(\omega)}(\omega) - \tau_{N,(a,b)}(\omega)$, $N = 1, 2, \dots$, martingálok, ahol $\tau_{N,(a,b)}(\omega) = \min(N, \tau_{a,b}(\omega))$. Ennek segítségével belátható, hogy $ES_{\tau_{a,b}(\omega)}(\omega) = 0$, és

$$E\tau_{a,b}(\omega) = ES^2_{\tau_{a,b}(\omega)}(\omega) = a^2 P(P(\tau_{a,b}(\omega) = a) + b^2 P(\tau_{a,b}(\omega) = -b).$$

Továbbá $P(\tau_a(\omega) < \infty) = \lim\limits_{b\to-\infty} P(\tau_{a,b}(\omega) < \infty) = 1$, és $E\tau_a(\omega) = \lim\limits_{b\to-\infty} E\tau_{a,b}(\omega) = \infty$.

Feladat: Legyen $W(t, \omega)$, $t \ge 0$, Wiener folyamat a félegyenesen. Lássuk be, hogy a $Z(t, \omega) = e^{W(t,\omega) - t^2/2}$, $t \ge 0$, sztochasztikus folyamat martingál.

Feladat: Legyen $W(t, \omega)$, $0 \le t \le 1$, Wiener folyamat a $[0, 1]$ intervallumon. Vegyük a $[0, 1]$ intervallum egyre finomodó $0 = t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < \cdots < t_{k_n}^{(n)} = 1$ felosztássorozatát minden $n = 1, 2, \dots$ számra úgy, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{1\le j<k_n} (t_{j+1}^{(n)} - t_j^{(n)}) = 0$, és vegyük a $Z_n(\omega) = \sum\limits_{j=1}^{k_n-1} \left(W(t_{j+1}^{(n)}) - W(t_j^{(n)}) \right)^2$ valószínűségi változókat és $\mathcal{F}_n = \mathcal{B}(W(t_j^{(n)}), 1 \le j \le k_n)$ σ-algebrákat. Mutassuk meg, hogy a $(Z_n(\omega), \mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2, \dots$, sorozat martingál. Mutassuk meg a martingálok 1 valószínűségi konvergencia tételének a segítségével, hogy a $Z_n(\omega)$ sorozat 1 valószínűséggel konvergál 1-hez.

Segítség: Ha már bebizonyítottuk azt, hogy a $Z_n(\omega)$ sorozat 1 valószínűséggel konvergál, de még nem tudjuk, hogy mi a limesz, akkor elegendő egy elég ritka részsorozatának a határértékét megtalálni annak érdekében, hogy a bizonyítást befejezzük. Az előadásban szereplő hasonló tétel bizonyítása segít ennek a részfeladatnak a megoldásában.

Nem kötelező feladat: Tekintsük a $W(t,\omega)$, $0 \le t \le 1$, Wiener folyamatot a $[0,1]$ intervallumon és a $W(t,\omega)+mt$, $0 \le t \le 1$, sztochasztikus folyamatot, ahol m rögzített valós szám. Jelölje μ a Wiener folyamat, és ν_m a $W(t,\omega)+mt$ sztochasztikus folyamat eloszlását a $C([0,1])$ térben. Mutassuk meg, hogy a ν_m mérték abszolut folytonos a μ mértékre nézve, és Radon–Nikodym deriváltja $\frac{d\nu_m}{d\mu}(x(t)) = e^{mx(1)-m^2/2}$ az $x(t)$, $0 \le t \le 1$, folytonos függvény helyén.

Az előző nem kötelező feladat általánosítása: Tekintsük a $W(t,\omega)$, $0 \le t \le 1$, Wiener folyamatot a $[0,1]$ intervallumon és egy $W(t,\omega) + \int_0^t m(t)\,dt$, $0 \le t \le 1$, sztochasztikus folyamatot, ahol $m(t)$, $0 \le t \le 1$, folytonosan differenciálható függvény. szám. Jelölje μ a Wiener folyamat, és ν_m a $W(t,\omega) + \int_0^t m(t)\,dt$ sztochasztikus folyamat eloszlását a $C([0,1])$ térben. Mutassuk meg, hogy a ν_m mérték abszolut folytonos a μ mértékre nézve, és Radon–Nikodym deriváltja

$$\frac{d\nu_m}{d\mu}(x(t)) = \exp\left\{\int_0^1 m(t)\,dx(t) - \frac{1}{2}\int_0^1 m(t)^2\,dt\right\}.$$

(Az eredmény általánosítható, de ennek megfogalmazásához sztochasztikus integrálok használatára van szükség, és ez nem témája ennek az előadásnak.)

Nem kötelező feladat: Legyen $W(t,\omega)$, $0 \le t \le 1$, Wiener folyamat a $[0,1]$ intervallumon. Mutassuk meg, hogy ennek feltételes eloszlása feltéve, hogy $W(1,\omega) = x$ megegyezik egy $B(t,\omega)+tx$, $0 \le t \le 1$, sztochasztikus folyamat eloszlásával, ahol $B(t,\omega)$, $0 \le t \le 1$, egy Wiener bridge. Pontosabban megfogalmazva, rögzítve valamilyen $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_k \le 1$ időpontokat és $u_1, \dots, u_k$ számokat

$$\begin{aligned} &P(W(t_1,\omega) < u_1, \dots, W(t_k,\omega) < u_k | W(1,\omega) = x) \\ &\qquad = P(B(t_1,\omega) + t_1 x < u_1, \dots, B(t_k,\omega) + t_k x < u_k). \end{aligned}$$

Segítség: Érdemes a bizonyításban felhasználni a $W(t,\omega) = B(t,\omega) + tW(1,\omega)$ azonosságot, ahol $B(t,\omega) = W(t,\omega) - tW(1,\omega)$ a $W(1,\omega)$ valószínűségi változótól független Wiener bridge.