Sztochasztikus folyamatok, Wiener folyamat

A valószínűségszámítás egyik nagyon fontos fogalma a Wiener folyamat, amelyet Brown mozgásnak is hívnak. Az első elnevezés e fogalom első matematikailag precíz bevezetőjére, Norbert Wienerre, a második pedig egy Brown nevű XIX. században élt angol biológusra utal, aki egy folyadékban levő, egymással ütköző apró részecskék mozgását tanulmányozta, és később kiderült, hogy a Wiener folyamat az egy részecske (véletlen) pályáját leíró legjobb matematikai modell. Korábbi tanulmányainkban láttuk, hogy a valószínűségi változók körében a normális eloszlás, a vektor értékű valószínűségi változók között a több-dimenziós normális eloszlás központi szerepet játszik. A Wiener folyamat hasonlóan fontos szerepet játszik a sztochasztikus folyamatok elméletében, és tulajdonképpen úgy tekinthető, mint a standard normális eloszlású valószínűségi változók megfelelelője a sztochasztikus folyamatok között. Ahhoz, hogy ennek a meglehetősen nagyvonalú kijelentésnek pontosabb értelmet tudjunk adni, szükséges néhány fogalom bevezetése és tárgyalása.

Sztochasztikus fogalmakról szóló alapvető ismeretek.

Először be kell vezetnünk a sztochasztikus folyamatok fogalmát.

Sztochasztikus folyamatok definiciója. *Legyen adva egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező és egy tetszőleges T (index)halmaz. Valószínűségi változóknak az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ definiált és a T halmaz elemeivel indexelt ξ_t, $t \in T$, rendszerét az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ téren definiált (és a T halmazzal indexelt) sztochasztikus folyamatnak nevezünk. Az alkalmazások többségében a T halmazt a (nem-negativ) valós vagy egész számok halmazának választjuk.*

Megjegyzem, hogy az esetek többségében valószínűségi változón a valószínűségi mezőn értelmezett *valós értékű* mérhető függvényt értünk, de az általános definició szerint tetszőleges ($(X, \mathcal{X})$ mérhető téren értelmezett) mérhető függvényt valószínűségi változónak nevezünk. Ezt a szabadságot felhasználva időnként vektor vagy komplex szám értékű valószínűségi változókról is beszélhetünk.

Felmerül a kérdés, hogy hogyan adhatunk meg egy sztochasztikus folyamatot. Emlékeztetek arra, hogy valószínűségi változókat általában nem úgy adtunk meg, hogy definiáltuk a valószínűségi mezőt és rajta a valószínűségi változót, hanem megadtuk a valószínűségi változó eloszlásfüggvényét, és azt mondtuk, hogy valamely (közelebbről nem definiált valószínűségi mezőn) egy olyan valószínűségi változót tekintünk, amelynek ez az eloszlásfüggvénye. Ahhoz, hogy ezt megtehessük szükségünk volt egy olyan eredményre, amely pontosan jellemezte az eloszlásfüggvényeket. Természetes kívánság az, hogy képesek legyünk sztochasztikus folyamatokat hasonlóan jellemezni.

E kérdés vizsgálata előtt idézzük fel a valószínűségi változókról szóló analóg eredményt.

Tétel. *Egy $F(u_1, \dots, u_k)$ függvény akkor és csak akkor eloszlásfüggvénye alkalmas $\xi_1, \dots, \xi_k$ valószínűségi változóknak valamely $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, ha ez az F függvény teljesíti a következő (i)—(iv) tulajdonságokat.*

(i) $F(u_1, \dots, u_k)$ minden változójának balról folytonos függvénye.

(ii) $\displaystyle\lim_{\substack{u_j\to\infty \\ \text{minden } j=1,\dots,k \text{ számra}}} F(u_1,\dots,u_k)=1.$

(iii) $\displaystyle\lim_{\substack{u_j\to-\infty \\ \text{valamely } 1\le j\le k \text{ számrra}}} F(u_1,\dots,u_k)=0.$ *(Ez úgy értendő, hogy az összes u_s, $1\le s\le k$, $s\ne j$ koordinátát rögzítjük, és $u_j\to-\infty$.)*

Végül definiáljuk egy az R^k téren definiált F függvényre és egy $\mathbf{K}=[a_1,b_1)\times\cdots\times[a_k,b_k)$ téglatestre a

$$\mu(\mathbf{K})=\mu_F(\mathbf{K})=\sum_{\substack{u_j=\,a_j \text{ vagy } b_j \\ j=1,\dots,k}}(-1)^{\chi(u_1,\dots,u_k)}F(u_1,\dots,u_k)$$

mennyiséget, ahol $\chi(u_1,\dots,u_k)$ jelöli az a_j-k számát az $u_1,\dots,u_k$ sorozatban. Ekkor

(iv) $\mu_F(\mathbf{K})\ge0$ *minden* $\mathbf{K}$ *téglatestre.*

A fenti tétel bizonyításának legnehezebb része a a következő úgyevezett Stieltjes mérték létezéséről szóló állításon alapul:

Tétel a Stieltjes mérték létezéséről. *Legyen $F(x_1,\dots,x_k)$ olyan k-változós függvény, amely teljesíti az előző tételben megfogalmazott (i)–(iv) tulajdonságokat. Ekkor létezik és egyértelműen meghatározott egy olyan μ_F Stieltjes mérték az R^k k-dimenziós tér Borel mérhető halmazainak $\mathcal{B}^k$ σ-algebráján, amely nem negatív σ-additiv halmazfüggvény ezen a σ-algebrán, $\mu_F(R^k)=1$, és*

$$\mu_F(\{u_1,\dots,u_k\}\colon u_j<x_j,\ 1\le j\le k\})=F(x_1,\dots,x_k)$$

minden $x_1,\dots,x_k$ valós számra.

Vektor értékű valószínűségi változók eloszlásainak jellemzéséről szóló tételnek fontos általánosítása az alábbi tétel, amely megadja, hogy mikor lehet sztochasztikus folyamatokat azok véges dimenziós eloszlásainak segítségével megadni. Ennek kimondása előtt bevezetek egy a tételben természetes módon megjelenő definiciót.

Eloszlások konzisztenciájának definiciója. *Legyen adva valamely T (végtelen) halmaz, és legyen a T halmaz minden $\{t_1,\dots,t_n\}\subset T$ részhalmazához egy ezen halmaz elemeivel indexelt $F_{t_1,\dots,t_n}(x_{t_1},\dots,x_{t_n})$ eloszlásfüggvény hozzárendelve. (Ezek szemléletes tartalma a későbbi alkalmazásokban az lesz, hogy ha egy a T halmazzal indexelt sztochasztikus folyamatot megszorítunk a $\{t_1,\dots,t_n\}$ halmazra, akkor ennek a véletlen vektornak az eloszlása legyen $F_{t_1,\dots,t_n}(x_{t_1},\dots,x_{t_n})$.) Azt mondjuk, hogy a véges dimenziós eloszlások ezen rendszere konzisztens, ha tetszőleges véges $\{t_1,\dots,t_n\}\subset T$ halmazra és annak (véges) $\{t_1,\dots,t_n,\bar t_1,\dots,\bar t_m\}\subset T$ kiterjesztésére*

$$F_{t_1,\dots,t_n}(x_{t_1},\dots,x_{t_n})=F_{t_1,\dots,t_n,\bar t_1,\dots,\bar t_m}(x_{t_1},\dots,x_{t_n},\infty,,\dots,\infty),$$

és tetszőleges $\{t_1, \dots, t_n\} \subset T$ *halmazra és annak tetszőleges* $\{t_{\pi(1)}, \dots, t_{\pi(n)}\} \subset T$ *permutációjára*

$$F_{t_1,\dots,t_n}(x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) = F_{t_{\pi(1)},\dots,t_{\pi(n)}}(x_{t_{\pi(1)}}, \dots, x_{t_{\pi(n)}}).$$

Ezen definició segítségével megadhatjuk az alábbi, a sztochasztikus folyamatok megadásában alapvető fontosságú tételt.

A valószínűségszámítás Kolmogorov-féle alaptétele. *Legyen adva egy (végtelen)* T *halmaz, valamint* $F_{t_1,\dots,t_n}(x_{t_1}, \dots, x_{t_n})$ *véges dimenziós eloszlásfüggvényeknek egy a* T *halmaz* $\{t_1, \dots, t_n\} \subset T$ *véges részhalamazaival indexelt konzisztens rendszere. Ekkor létezik egy* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *valószínűségi mező, azon egy* ξ_t*,* $t \in T$*, a* T *halmazzal indexelt sztochasztikus folyamat úgy, hogy minden* $\{t_1, \dots, t_n\} \subset T$ *véges halamazra a* $(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n})$ *véletlen vektor eloszlásfüggvénye az* $F_{t_1,\dots,t_n}(x_{t_1}, \dots, x_{t_n})$ *eloszlásfüggvény.*

Megfogalmazok egy Kolmogorovtól származó mértékelméleti eredményt, amelyből könnyen levezethető a fenti alaptétel, és ezt meg is teszem. A mértékelméleti tétel bizonyítását viszont elhagyom. A tétel kimondása előtt bevezetek néhány jelölést.

Legyen adva egy T végtelen halmaz, és tekintsük a számegyenesnek a hozzá tartozó Borel σ-algebrával együtt egy eme T halmazzal indexelt $(R_t, \mathcal{B}_t)$, $t \in T$, példányait, és vegyük ezeknek $(R^T, \mathcal{B}^T) = \left(\prod\limits_{t \in T}, R_t, \prod\limits_{t \in T}, \mathcal{B}_t\right)$ direkt szorzatát. Definiáljuk továbbá a következő $\mathcal{B}_0^T$ halmazrendszert, amely valójában a $\mathcal{B}^T$ σ-algebra véges sok koordinátától függő hengerhalmazaiból áll, és halmaz-algebrát alkot. Egy B halmaz akkor és csak akkor eleme a $\mathcal{B}_0^T$ halmazrendszernek, ha létezik olyan $T_0 = \{t_1, \dots, t_n\} \subset T$ véges részhalmaza a T halmaznak, és olyan $\bar{B} = \bar{B}(t_1, \dots, t_n)$ halmaz, amelyre teljesül a $\bar{B} \in \prod\limits_{j=1}^{n} (R_{t_j}, \mathcal{B}_{t_j})$, reláció, és B a $\bar{B}$ által meghatározott hengerhalmaz az $(X^T, \mathcal{B}^T)$ térben, azaz valamely $x = \{x_t, \, t \in T\} \in R^T$ pontra az $x \in B$ reláció akkor és csak akkor teljesül, ha $(x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \in \bar{B}$. Ezután megfogalmazom a következő eredményt.

Tétel A. *Legyen adva egy* T *végtelen halmaz, és tekintsük a számegyenesnek a hozzá tartozó Borel* σ*-algebrával együtt egy eme* T *halmazzal indexelt* $(R_t, \mathcal{B}_t)$*,* $t \in T$*, példányait, és vegyük ezeknek az előbb bevezetett* $(R^T, \mathcal{B}^T) = \left(\prod\limits_{t \in T}, R_t, \prod\limits_{t \in T}, \mathcal{B}_t\right)$ *direkt szorzatát valamint a* $\mathcal{B}_0^T \subset \mathcal{B}^T$ *véges sok koordinátától függő hengerhalmazokból álló halmazrendszert. Legyen adva eloszlásfüggvényeknek egy egy a* T *halmaz véges* $T_0 = \{t_1, \dots, t_k\} \subset T$ *részhalmazaival indexelt* $F_{t_1,\dots,t_n}(x_{t_1}, \dots, x_{t_n})$ *konzisztens rendszere, és definiáljuk egy* $B \in \mathcal{B}_0^T$ *halmaznak a következő* $\mu(B)$ *mértékét. Ha egy* B *halmaz előáll, mint egy* $\bar{B} = \bar{B}(t_1, \dots, t_k)$ *halmaz által meghatározott hengerhalmaz, akkor legyen* $\mu(B) = \mu_{F_{t_1,\dots,t_k}}(\bar{B})$*, ahol* $\mu_{F_{t_1,\dots,t_k}}$ *az* $F_{t_1,\dots,t_k}(x_{t-1}, \dots, x_{t_k})$ *eloszlásfüggvény által meghatározott Stieltjes mérték a* $\prod\limits_{j=1}^{n} (R_{t_j}, \mathcal{B}_{t_j})$ *téren. Ekkor* μ *(nem negatív, egyre normált)* σ*-additív halmazfüggvény a* $\mathcal{B}_0^T$ σ*-algebrán.*

Következmény. *A Carathéodory féle kiterjesztési tétel szerint a Tétel A-ban definált μ halmazfüggvény egyértelműen kiterjeszthető egy az* $(R^T, \mathcal{B}^T) = \left(\prod\limits_{t\in T} R_t, \prod\limits_{t\in T} \mathcal{B}_t\right)$ *téren értelmezett valószínűségi mértékre.*

A Kolmogorov-féle alaptétel bizonyítása a fenti tétel, illetve annak következménye alapján. Tekintsük a Tétel A-ban, illetve annak következménye által definiált $(R^T, \mathcal{B}^T)$ rendszert. Ez tekinthető úgy, mint egy valószínűségi mező, mert μ valószínűségi mérték ezen a téren. (Ennek a ténynek az igazolása a bizonyítás legnehezebb lépése.) Ezért definálhatjuk az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőt, mint az $(R^T, \mathcal{B}^T, \mu)$ teret, és az ω elemi események megegyeznek a T halmazon értelmezett valós értékű függvényekkel. Adva egy $\omega = \{x_t, t \in T\}$ elemi esemény, definiáljuk az $\xi_u(\omega)$, $u \in T$, valószínűségi változót a $\xi_u(\{x_t, t \in T\}) = x_u$ képlet segítségével. Ekkor az $\{\omega\colon \xi_{u_1}(\omega) < x_{u_1}, \dots, \xi_{u_k}(\omega) < x_{u_k}\}$ halmaz megegyezik azon függvényekből álló hengerhalmazzal, mely függvények értéke az u_1 pontban kisebb, mint x_{u_1}, az u_2 pontban kisebb, mint x_{u_2}, ... , az u_k pontban kisebb, mint x_{u_k}. Az ilyen függvényekből álló halmaz valószínűsége a konstrukció alapján $F_{u_1,\dots,u_k}(x_{u_1}, \dots, x_{u_k})$, és ezt kellett bebizonyítani.

1. feladat a gyakorlatra: Legyen adva egy $(X, \mathcal{X})$ mérhető tér, és azon végtelen sok (esetleg megszámlálhatónál is több) $f_t(x)$, $t \in T$, mérhető függvény. Tekintsük az összes $f_t(x)$ függvény által generált σ-algebrát, azaz a legszűkebb σ-algebrát, amelyre nézve az összes f_t függvény mérhető. Lássuk be, hogy ez a következőképp is megadható: Tekintsük a T halmaz összes lehetséges megszámlálható részhalmazát, vegyük az általuk indexelt függvények által generált σ-algebrát, és vegyük ezen σ-algebrák egyesítését. Ez azt jelenti, hogy azt a halmazrendszert vesszük, amelyikbe egy B halmaz akkor és csak akkor tartozik, ha létezik a T indexhalmaznak olyan T_0 megszámlálható részhalmaza, hogy a B halmaz eleme a T_0 halmaz elemeivel indexelt függvények által generált σ-algebrának.

1a. feladat a gyakorlatra: Mutassuk meg az 1. feladat segítségével, hogy az Tétel A állítása redukálható arra a speciális esetre, amikor T a nem negatív egész számok halmaza.

A Wiener folyamat definiciójának megadása előtt vezessük be a következő egyszerű definiciót (elnevezést).

Szochasztikus folyamat trajektóriájának a fogalma. *Legyen adva egy T indexhalmazzal paraméterezett $\xi_t(\omega)$ sztochasztikus folyamat. Ennek egy rögzített ω elemi eseményhez tartozó trajektóriáján a T halmazon definiált $\xi_t(\omega)$ függvényt értjük.*

Bevezetjük továbbá a következő fogalmat is.

Gauss (sztochasztikus) folyamat definiciója. *Egy ξ_t, $t \in T$, folyamatot Gauss folyamatnak nevezünk, ha ennek minden véges dimenziós eloszlása normális eloszlású, azaz T halmaz minden $T_0 = \{t_1, \dots, t_k\}$ véges részhalmazára a $(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_k})$ véletlen vektor több-dimenziós normális eloszású vektor.*

2. feladat a gyakorlatra: Ismételjük át azt, hogy mi a több-dimenziós normális eloszlás definiciója. Lássuk be, hogy egy n-dimenziós $(X_1, \dots, X_n)$ normális eloszlású véletlen vektor eloszlását meghatározzák az EX_j, $1 \le j \le n$ várható értékek és a $\mathrm{Cov}\,(X_j, X_k) = EX_jX_k - EX_jEX_k$, $1 \le j, k \le n$, kovarianciák.

Megfogalmazom a Wiener folyamat definicióját.

Egy a $[0, T]$ $0 < T \le \infty$, intervallumon értelmezett Wiener folyamaton olyan Gauss folyamatot értünk, amelyre

a) $EW(t) = 0$, $0 \le t \le T$, $EW(s)W(t) = \min(s, t)$, $\le s, t \le T$.

b) A $W(t, \omega)$ folyamat trajektóriája minden ω elemi eseményre folytonos függvény a $[0, T]$ intervallumon.

A Wiener folyamat definiciója kapcsán számos kérdést tisztázni kell. A fő kérdés az, hogy a fent megadott definició értelmes-e. Először tisztázni kell az a) pontot. Mondhatjuk-e, hogy definiáltuk a Wiener folyamat véges dimenziós eloszlásait konzisztens módon? A definició b) pontja még rejtélyesebb. A Kolmogorov féle alaptételben semmilyen kijelentés nem szerepelt a sztochasztikus folyamat trajektóriáját illetően. Honnan tudjuk, hogy létezik folytonos trajektóriájú, a Wiener folyamat a) feltételét teljesítő Gauss folyamat? Ha létezik, akkor mit mondhatunk a folytonos trajektória létezéséről? Automatikusan teljesül ez a követelmény, vagy tennünk kell valamit ennek teljesítése érdekében?

Az első kérdés megválaszolása egyszerűbb. Egyrészt a 2. feladat állítása azt jelenti, hogy a várható érték és a kovariancia megadásával és azzal a megkötéssel, hogy a Wiener folyamat Gauss folyamat, egyértelműen megadtuk e folyamat véges dimenziós eloszlásait. Másrészt, lássuk be a következő feladatot:

3. feladat. Rögzítsünk valamely $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n \le T$ számokat, vegyünk független, nulla várható értékű és $t_j - t_{j-1}$, $1 \le j \le n$, $t_0 = 0$, normális eloszlású η_j valószínűségi változókat, és definiáljuk a $Z_k = \sum\limits_{j=1}^{k} \eta_j$, $1 \le k \le n$ valószínűségi változókat. Lássuk be, hogy a $(Z_1, \dots, Z_n)$ véletlen vektor eloszlása megegyezik a Wiener folyamatban definiált $(W(t_1), \dots, W(t_n))$ véletlen vektor eloszlásával. Lássuk be ennek az észrevételnek a segítségével, hogy a Wiener folyamat definiciójában előírt véges dimenziós eloszlások konzisztensek.

A 3. feladat állítása azt jelenti, hogy a Kolmogorov-féle alaptétel szerint létezik a Wiener folyamat definicójában szereplő a) tulajdonságot teljesítő Gauss folyamat. A b) tulajdonsággal kapcsolatban a helyzet bonyolultabb. Oldjuk meg először a következő feladatot.

4. feladat a gyakorlatra: Legyen adva egy ξ_t, $0 \le t \le 1$, a $[0, 1]$ intervallummal mint index halmazzal értelmezett sztochasztikus folyamat valamely $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Jelölje $\mathcal{F}$ a ξ_t, $0 \le t \le 1$, valószínűségi változók által generált σ-algebrát. Lássuk be az 1. feladat állításának a segítségével, hogy az az esemény, hogy a ξ_t folyamat folytonos trajektóriájú nincs benne a $\mathcal{F}$ σ-algebrában.

A negyedik feladat eredménye azért érdekes a számunkra, mert csak az ott definiált σ-algebra eseményeinek a valószínűségéről tudunk beszélni. Ha alaposabban meggondoljuk be lehet látni, hogy egy sztochasztikus folyamat véges dimenziós eloszlásainak ismeretében nem beszélhetünk annak az eseménynek a valószínűségéről, hogy a sztochasztikus folyamat minden trajektóriája folytonos függvény. Viszont lehetőségünk van arra, hogy ha adva van egy sztochasztikus folyamat, akkor megpróbáljuk annak trajektóriáit ,,kijavítani" úgy, hogy a sztochasztikus folyamatot definiáló valószínűségi változókat egy null mértékű halmazon megváltoztatunk. Ezáltal a sztochasztikus folyamat véges dimenziós eloszlásait nem változtatjuk meg, viszont bizonyos esetekben esélyünk van arra, hogy egy sztochasztikus folyamatban kontinum sok null mértékű halmazon változtatva a trajektóriák tulajdonságait megváltoztatva jobb tulajdonságú trajektóriákat kapunk. Az alábbiakban megfogalmazok és bebizonyítok egy eredményt, amely elégséges feltételt ad arra, hogy egy sztochasztikus folyamat valószínűségi változóit null mértékű halmazon megváltoztatva olyan sztochasztikus folyamatot kapjunk, amelynek trajektóriái folytonosak. (Természetesen az új folyamat véges dimenziós eloszlásai megegyeznek az eredeti folyamat véges dimenziós eloszlásaival.) Azután megmutatom, hogy ez az eredmény alkalmazható a Wiener folyamatok esetében is, és biztosítja azt, hogy a Wiener folyamat definiciójában szerepeljen a b) tulajdonság.

Az eredmény megfogalmazása előtt bevezetem a következő definiciót.

Sztochasztikus folyamat sztochasztikus folytonosságának a definiciója. *Legyen adva egy sztochasztikus folyamat $X(t)$, $a \le t \le b$, valamely $[a,b]$ intervallumon. Azt mondjuk, hogy ez a sztochasztikus folyamat folytonos valamely $a \le t \le b$ pontban, ha minden $\varepsilon > 0$ számra teljesül a*

$$\lim_{t_n \to t} P(|X(t_n,\omega) - X(t,\omega)| > \varepsilon) = 0$$

feltétel minden $t_n \to t$ számsorozatra.

Most megfogalmazom a következő Lemmát.

Lemma sztochasztikus folyamat folytonos trajektóriáiról. *Legyen adva egy $X(t,\omega)$, $0 \le t \le 1$ sztochasztikus folyamat a $[0,1]$ intervallumon. Teljesítse ez a sztochasztikus folyamat a következő két tulajdonságot.*

a) Az $X(t,\omega)$ sztochasztikus folyamat sztochasztikusan folytonos a $[0,1]$ intervallum minden pontjában.

b) A sztochasztikus folyamat majdnem minden $X(t,\omega)$, $0 \le t \le 1$, $\omega \in \Omega$, trajektóriája rendelkezik a következő tulajdonsággal. Az $X\left(\frac{k}{2^n},\omega\right)$, $n = 1,2,\dots$, $0 \le k \le 2^{-n}$ függvény, azaz az $X(\cdot,\omega)$ függvény megszorítása a diadikusan racionális pontokra, egyenletesen folytonos.

Ekkor létezik olyan $\bar{X}(t,\omega)$, $0 \le t \le 1$, sztochasztikus folyamat, amelynek minden $\bar{X}(\cdot,\omega)$ trajektóriája folytonos függvény, és $P(\bar{X}(t,\omega) = X(t,\omega)) = 1$ minden $0 \le t \le 1$ pontban.

Megjegyzés: Belátható, hogy a Lemmában szereplő a) és b) feltétel teljesülése vagy nem teljesülése az $X(t)$ sztochasztikus folyamat véges dimenziós eloszlásaitól függ.

A Lemma bizonyítása. Definiáljuk az $\bar{X}(t,\omega)$ sztochasztikus folyamatot a következő módon: Legyen $\bar{X}(t,\omega)=0$ minden $0\le t\le 1$ számra egy olyan ω esetében, amelyre az $X\left(\frac{k}{2^n},\omega\right)$ függvény nem egyenletesen folytonos. Az olyan ω elemi eseményekre viszont, amelyekre ez a függvény egyenletesen folytonos a diadikusan racionális pontokban tekintsünk minden $0\le t\le 1$ számra egy olyan $\frac{k_n}{2^n}=\frac{k_n(t)}{2^n}$ sorozatot, $n=1,2,\dots$, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{k_n}{2^n}=t$, és legyen $\bar{X}(t,\omega)=\lim\limits_{n\to\infty}X\left(\frac{k_n}{2^n},\omega\right)$. Ez a limesz létezik, mert az $X\left(\frac{k_n}{2^n},\omega\right)$, $n=1,2,\dots$, sorozat Cauchy sorozat. Az $X(t,\omega)$ és $\bar{X}(t,\omega)$ valószínűségi változó 1 valószínűséggel megegyezik, mert mind a kettőhöz sztochasztikusan (a mértékelmélet nyelvén mértékben) konvergál az $X\left(\frac{k_n}{2^n},\omega\right)$, $n=1,2,\dots$, sorozat. Ezenkívül az $\bar{X}(\cdot,\omega)$ trajektóriák folytonos függvények minden $\omega\in\Omega$ elemi eseményre.

Az előző lemma segítségével bebizonyítom az alábbi állítást, amely a korábbi eredményekkel együtt biztosítja, hogy létezik Wiener folyamat.

Tétel (folytonos trajektóriájú) Wiener folyamat létezéséről. *Legyen adva egy olyan $\bar{W}(t)$, $0\le t\le 1$, Gauss folyamat a $[0,1]$ intervallumon, amely teljesíti a Wiener folyamat definiciójában szereplő a) feltételt. Ekkor létezik olyan $W(t)$, $0\le t\le 1$, Wiener folyamat a $[0,1]$ intervallumon, amelyre $P(W(t,\omega)=\bar{W}(t,\omega))=1$, és trajektóriái 1 valószínűséggel folytonosak.*

A Wiener folyamat létezéséről szóló tétel bizonyítása. Elég megmutatni, hogy mindkét a Lemmában szereplő feltétel teljesül egy olyan $\bar{W}(t,\omega)$ Gauss folyamatra, amely teljesíti a Wiener folyamat definiciójában szereplő a) feltételt. Ezek közül az a) tulajdonság teljesülése nyílvánvaló, mert $\bar{W}(t_n,\omega)-\bar{W}(t,\omega)$ 0 várható értékű és $|t-t_n|$ szórásnégyzetű valószínűségi változó. A b) tulajdonság bizonyításához elég megmutatni azt, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left(\sup_{1\le k\le 2^n}\left|\bar{W}\left(\frac{k}{2^n},\omega\right)-\bar{W}\left(\frac{k-1}{2^n},\omega\right)\right|>2^{-n/8}\right)<\infty. \tag{A}$$

Ebből ugyanis a Borel-Cantelli lemma alapján következik, hogy létezik olyan $\bar{\Omega}\subset\Omega$, $P(\bar{\Omega})=1$ esemény, amelyre igaz, hogy minden $\omega\in\bar{\Omega}$ elemi eseményre van olyan $n(\omega)$ küszöbindex úgy, hogy $\sup\limits_{1\le k\le 2^n}\left|\bar{W}\left(\frac{k}{2^n},\omega\right)-\bar{W}\left(\frac{k-1}{2^n},\omega\right)\right|\le 2^{-n/8}$ minden $n\ge n(\omega)$ számra. Azt állítom, hogy ebből következik, hogy ha t és s két olyan diadikus racionális szám, amelyre $0<t-s<2^{-L}$ valamely (nagy) L egész számra, $\omega\in\bar{\Omega}$, $L\ge n(\omega)$ akkor $|X(t,\omega)-X(s,\omega)|\le 2\sum\limits_{n=L}^{\infty}\sup\limits_{1\le k\le 2^n}\left|\bar{W}\left(\frac{k}{2^n},\omega\right)-\bar{W}\left(\frac{k-1}{2^n},\omega\right)\right|\le\sum\limits_{n=L}^{\infty}2^{-n/8}\le 1000\cdot 2^{-L/8}$, ahonnan következik, hogy a $\bar{W}(t,\omega)$ folyamat teljesíti a b) tulajdonságot, ha $\omega\in\bar{\Omega}$.

A fenti egyenlőtlenségsorozat első egyenlőtlenségének belátása érdekében tekintsük a leghosszabb $\left[\frac{k}{2^j},\frac{k+1}{2^j}\right]$ intervallumokat, amelyekre $\left[\frac{k}{2^j},\frac{k+1}{2^j}\right]\subset[s,t]$. Egy vagy két ilyen intervallum van, és $j\ge L$. Legyen ezen intervallumok egyesítésének a bal végpontja $\frac{k}{2^j}$, jobb végpontja pedig $\frac{\bar{k}}{2^j}$, $\bar{k}=k+1$ vagy $\bar{k}=k+2$. Mind az $\left[s, \frac{k}{2^j}\right]$ mind a $\left[\frac{\bar{k}}{2^j}, t\right]$ intervallum előállítható különböző hosszúságú $2^{-j'}$, $j' \geq j+1$, hosszúságú diadikus intervallumok egyesítéseként. Az előbbiekből következik, hogy az $[s,t]$ intervallum előáll 2^{-j}, $j \geq L$, hosszúságú diadikus intervallumok egyesítéseként, és ebben az egyesítésben minden $j \geq L$-re legfeljebb 2 2^{-j} hosszúságú intervallum szerepel. Innen következik a kívánt egyenlőtlenség.

Az (A) reláció bizonyításához vegyük észre, hogy

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\sup_{1\leq k\leq 2^n}\left|\bar{W}\left(\frac{k}{2^n},\omega\right)-\bar{W}\left(\frac{k-1}{2^n},\omega\right)\right|>2^{-n/8}\right) \\
&\quad\leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^n} P\left(\left|\bar{W}\left(\frac{k}{2^n},\omega\right)-\bar{W}\left(\frac{k-1}{2^n},\omega\right)\right|>2^{-n/8}\right) \\
&\quad\leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^n} \frac{E\left(\bar{W}\left(\frac{k}{2^n},\omega\right)-\bar{W}\left(\frac{k-1}{2^n},\omega\right)\right)^4}{2^{-n/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n\frac{3\cdot 2^{-2n}}{2^{-n/2}}<\infty,
\end{aligned}
$$

mert a $W\left(\frac{k}{2^n},\omega\right)-\bar{W}\left(\frac{k-1}{2^n},\omega\right)$ valószínűségi változók normális eloszlásúak, nulla várható értékkel és 2^{-n} szórásnégyzettel. Ezért a negyedik momentumuk 32^{-2n}. A tétel bizonyítását befejeztük.

Megjegyzés: A fenti tételben beláttuk, hogy létezik a $[0,1]$ intervallumon definiált Wiener folyamat. A jelölések némi változtatásával be lehet látni ugyanezzel a módszerrel, hogy tetszőleges $T>0$ számra létezik Wiener folyamat a $[0,T]$ intervallumon. De be lehet látni azt, hogy létezik $W(t)$, $t\geq 0$. Wiener folyamat a pozitív félegyenesen például a következő feladat megoldásának a segítségével.

Feladat: Legyen $W_n(t)$, $n=1,2,\dots$, $0\leq t\leq 1$, független Wiener folyamatok sorozata a $[0,1]$ intervallumon. Lássuk be, hogy „ezeket a független Wiener folyamatokat összeragasztva”, azaz definiálva a $W(t)=\sum\limits_{j=1}^{[t]} W_j(1)+W_{[t]+1}([t])$, $0\leq t<\infty$, Wiener folyamat a $t\geq 0$ félegyenesen, ahol $[t]$ a t szám egész részet $\{t\}$ pedit a t szám tört részét jelöli.

Nem kötelező feladat: Mutassuk meg, (felhasználva az előző bizonyítás gondolatait, hogy ha egy $X(t,oo)$, $0\leq t\leq 1$, sztochasztikus folyamat a $[0,1]$ intervallumon teljesíti az $E|X(t)-X(s)|^{2+\alpha}\leq C|t-s|^{1+\beta}$ feltételt alkalmas $\alpha>0$, $\beta>0$ és $C>0$ konstansokkal mindet $0\leq s<t\leq 1$ számpárra, akkor létezik az $X(t,\omega)$ sztochasztikus folyamatnak olyan $\bar{X}(t,\omega)$ modósítása, amelyre $P(X(t,\omega)=\bar{X}(t,\omega)$ minden $0\leq t\leq 1$ számra, és a $\bar{X}(t,\omega)$ folyamat minden trajektóriája folytonos függvény. (Valójában az $\alpha>0$ feltétel elhagyható a feltételként szereplő egyenlőtlenségből. Azért tettük ezt fel, mert a legtöbb érdekes esetben csak $\alpha>0$ számmal tudjuk biztosítani a kívánt feltétel teljesülését.

5. feladat a gyakorlatra: Mutassuk meg, hogy egy a $[0,1]$ intervallumon definiált folytonos trajektóriájú sztochasztikus folyamat tekinthető, mint egy $C([0,1])$-tér értékű, azaz a $[0,1]$ intervallumon értelmezett folytonos értékű függvényekből álló, és a szuprémum normával ellátott Banach téren értelmezett valószínűségi változó. A probléma jobb megértése érdekében a megfogamazom e kérdés 5a) változatát, amely megmagyarázza, mi a probléma lényege.

5a. feladat a gyakorlatra: Világos, hogy egy a $[0,1]$ intervallumon értelmezett folytonos trajektóriájú $X(t,\omega)$ sztochasztikus folyamat az $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mezőt leképezi a $C([0,1])$ térbe. De be kell látni, hogy ez a leképezés mérhető. Tudjuk, hogy mivel minden rögzített $0\le t\le 1$ számra az $X(t,\cdot)$ függvény folytonos, azaz tetszőleges Borel mérhető B halmazra $\{\omega\colon X(t,\omega)\in B\}\in\mathcal{A}$, (azaz a B halmaz őasképe mérhető). Lássuk be, hogy a $C([0,1])$ tér tetszőleges mérhető D halmazára $\{\omega\colon X(t,\omega)\in D\}\in\mathcal{A}$.

5b. feladat a gyakorlatra: Az 5. feladat állítása szerint tetszőleges a $[0,1]$ intervallumon definiált folytonos trajektóriájú folyamat tekinthető úgy, mint egy értékeit a $C([0,1])$ térben felvevő valószínűségi változó. Lássuk be, hogy e folyamat véges dimenziós eloszlásai meghatározzák annak valószínűségét is, hogy véve egy tetszőleges Borel-mérhető halmazt a $C([0,1])$ térben, a sztochasztikus folyamat trajektóriái ebbe a halmazba esnek.

6. feladat a gyakorlatra: Az előző tétel megoldásában fontos szerepet játszott az a lépés, hogy adjunk jó becslést annak valószínűségére, hogy egy normális eloszlású valószínűségi változó egy adott számnál nagyobb értéket vesz fel. Ezt a becslést abban a bizonyításban a negyedik momentum becslésének a segítségével kaptuk. Az ebben a feladatban megfogalmazott becslés pontosabb, és bizonyos nehezebb feladatokban erre van szükség. A következő jelölést fogjuk alkalmazni. $\Phi(x)$ jelöli a standard normális eloszlásfüggvényt, $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$, ennek sűrűségfüggvényét. Mutassuk meg (parciális integrálással), hogy minden $x>0$ számra teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)\varphi(x)<1-\Phi(x)<\frac{1}{x}\varphi(x).$$

Wiener folyamatok tulajdonságai

Megfogalmazom azt a fontos eredményt, amelyet funkcionális határeloszlástételnek szokás nevezni, és amely a szokásos centrális határeloszlástétel természetes és fontos általánosítása. Először felidézem a centrális határeloszlástétel általános alakját.

Ez a tétel arról szól, hogy ha tekintjük valószínűségi változóknak egy szériasorozatát, azaz minden egyes $k = 1, 2, \dots$ egész számra megadjuk valószínűségi változók $\xi_{k,j}$, $j = 1, 2, \dots, n_k$, sorozatát, amelyek (rögzített k számra) függetlenek, akkor a $S_k = \sum\limits_{j=1}^{n_k} \xi_{k,j}$ véletlen összegek eloszlásban konvergálnak a normális eloszláshoz nagyon általános feltételek mellett. E feltételek közül a legfontosabb az úgynevezett Lindeberg feltétel, amelyet külön felidézek.

Lindeberg feltétel definiciója szériasorozatokra: *Legyen $\xi_{k,j}$, $k = 1, 2, \dots$, $1 \le j \le n_k$, olyan szériasorozat, melyre $E\xi_{k,j} = 0$, $E\xi_{k,j}^2 < \infty$, $k = 1, 2, \dots$, $1 \le j \le n_k$, és $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n_k} E\xi_{k,j}^2 = 1$. Ez a szériasorozat akkor és csak akkor teljesíti a Lindeberg feltételt, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számra*

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n_k} E\xi_{k,j}^2 I\left(\{|\xi_{k,j}| > \varepsilon\}\right) = 0,$$

ahol $I(A)$ egy A halmaz indikátor függvénye.

Centrális határeloszlástétel szériasorozatokra a Lindeberg feltétel teljesülése esetén. *Legyen $\xi_{k,j}$, $k = 1, 2, \dots$, $1 \le j \le n_k$, olyan szériasorozat, melyre $E\xi_{k,j} = 0$, $E\xi_{k,j}^2 < \infty$, $k = 1, 2, \dots$, $1 \le j \le n_k$, $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n_k} E\xi_{k,j}^2 = 1$, és teljesítse e szériasorozat a Lindeberg feltételt. Ekkor*

a.) a szériasorozat tagjai teljesítik a $\lim\limits_{k\to\infty} \left(\sup\limits_{1\le j\le n_k} E\xi_{k,j}^2 \right) = 0$ kicsiségi feltételt.

b.) Az $S_k = \sum\limits_{j=1}^{n_k} \xi_{k,j}$, $1 \le k < \infty$, véletlen összegek eloszlásban konvergálnak a standard, azaz nulla várható értékű és 1 szórásnégyzetű normális eloszláshoz, ha $k \to \infty$.

Be lehet látni azt is, hogy a centrális eloszlástétel ezen formája bizonyos értelemben éles, és tovább nem javítható. Ezzel a kérdéssel itt nem foglalkozunk.

Viszont megfogalmazok egy olyan eredményt, amely azt fejezi ki, hogy amennyiben veszünk egy a Lindeberg feltételt teljesítő szériasorozatot, és rögzített k számra nemcsak az $S_k = \sum\limits_{j=1}^{n_k} \xi_{k,j}$ véletlen összeget vezetjük be, hanem az összes

$$S_k(j) = \sum_{p=1}^{j} \xi_{k,p}, \quad 1 \le j \le n_k \tag{B1}$$

részletösszeget, és tekintjük az $S_k(p)$, $1 \le p \le n_k$, sorozat eloszlását, akkor ennek aszimptotikus viselkedése jól bizonyos értelemben jól leírható egy Wiener folyamat segítségével.

A fenti állítás pontos megfogalmazásának érdekében vezessük be a következő jelöléseket: Legyen adva egy

$$\begin{matrix} \xi_{1,1},\dots,\xi_{1,n_1} \\ \vdots \qquad \vdots \\ \xi_{k,1},\dots,\xi_{k,n_k} \\ \vdots \qquad \vdots \end{matrix} \tag{B2}$$

szériasorozat, amelyre $E\xi_{k,j}=0$, $E\xi_{k,j}^2=\sigma_{k,j}^2$, $\sum\limits_{j=1}^{n_k}\sigma_{k,j}^2=s_k^2$, és feltesszük, hogy teljesül a $\lim\limits_{k\to\infty} s_k^2=1$ reláció. Vezessük be az $S_k(0)=0$, $S_k(j)=\sum\limits_{p=1}^{j}\xi_{k,j}$ és $s_k(j)^2=\sum\limits_{p=1}^{j}\sigma_j^2$, $\bar s_k^2(0)=0$, $\bar s_k(j)^2=\frac{s_k(j)^2}{s_k^2}$, $1\le j\le n_k$, $k=1,2,\dots$, mennyiségeket. Adjuk meg ezen mennyiségek segítségével a következő a $[0,1]$ intervallumon definiált $X_k(t)=X_k(t,\omega)$, $0\le t\le 1$, (véletlen) folytonos függvényeket:

$$\begin{aligned} X_k(\bar s_k^2(j),\omega)&=S_k(j), \quad 0\le j\le n_k \quad \text{és} \\ X_k(t,\omega)&=\frac{\bar s_k(j)^2-t}{\bar s_k(j)^2-\bar s_k(j-1)^2}X_k(\bar s_k^2(j-1),\omega)+\frac{t-\bar s_k(j-1)^2}{\bar s_k(j)^2-\bar s_k(j-1)^2}X_k(\bar s_k^2(j),\omega) \\ &\qquad \text{ha } \bar s_k(j-1)^2\le t\le \bar s_k(j)^2, \quad 1\le j\le n_k, \end{aligned} \tag{B3}$$

azaz az $X_k(\cdot,\omega)$ függvény az $\bar s_k(j)^2$ pontokban megegyeznek az első j $\xi_{k,p}(\omega)$ valószínűségi változó összegével, a köztük levő pontokban pedig lineáris függvényként kiegészítjük őket. Tegyük fel, hogy a (B2) szériasorozat teljesíti a Lindeberg feltételt is. Ekkor alkalmazható rá a centrális határeloszlástétel. Némi plusz munkával be lehet látni, hogy nemcsak az $X_k(1,\omega)$ valószínűségi változók konvergálnak eloszlásban a standard normális eloszláshoz, ha $k\to\infty$, hanem az is igaz, hogy minden rögzített t számra az $X_k(t,\omega)$ valószínűségi változók konvergálnak eloszlásban egy 0 várható értékű és t szórásnégyzetű normális eloszlású valószínűségi változóhoz. Sőt, az is igaz, hogy minden $0\le t_1<t_2<\cdots<t_m\le 1$ számokra az $(X_k(t_1,\omega),\dots,X_k(t_m,\omega))$ véletlen vektorok eloszlásban konvergálnak egy olyan $(Z_1,\dots,Z_m)$ m-dimenziós normális eloszlású vektor eloszlásához, amelyre $EZ_j=0$, $0\le j\le k$, $EZ_jZ_{j'}=\min(t_j,t_{j'})$. Ez szemléletesen azt jelenti, hogy nagy k indexre a (B3) képletben definiált $X_k(t)$ sztochasztikus folyamat közel van eloszlásban egy a $[0,1]$ intervallumon definiált Wiener folyamathoz. Az alábbiakban megfogalmazok egy tételt, amely a fent megfogalmazattokhoz hasonló, de tartalmasabb állítást fogalmaz meg. A tétel kimondása előtt emlékeztetek arra, hogy mint azt az 5. feladatban megfogalmazott állítás megfogalmazza, egy a $[0,1]$ intervallumon definiált folytonos trajektóriájú sztochasztikus folyamatot tekinthetünk egy $C([0,1])$ téren definiált valószínűségi változónak is. Ezt az észrevételt alkalmazhatjuk mind a Wiener folyamatra, mind a (B3) képletben definiált folyamatokra. Az a tény,

hogy egy Wiener folyamat felfogható úgy, mint egy értékeit a $C([0,1])$ térben felvevő valószínűségi változó lehetővé teszi, hogy bevezessük az alább megadandó Wiener mérték fogalmát.

Wiener mérték definiciója. *Legyen adva egy Wiener folyamat a $[0,1]$ intervallumban. Tekintsük ezt, mint egy értékeit a $C([0,1])$ térben felvevő valószínűségi változót. Ennek eloszlását, azaz a $\mu_W(A) = P(\omega\colon W(\cdot,\omega) \in A)$ függvényt minden a $C([0,1])$ térbeli Borel mérhető A halmazra, (azaz minden olyan A halmazra, amely benne van a $B([0,1])$ térben lévő nyílt halmazok által generált legszűkebb σ-algebrában) Wiener mértéknek nevezzük.*

Emlékeztetek továbbá arra, hogy az eloszlásban való konvergencia természetes általánosítását definiálták tetszőleges szeparábilis metrikus térben. Ezt gyenge konvergenciának nevezik általában az irodalomban, és euklidészi térben levő valószínűségi mértékek esetében ez ekvivalens az eloszlásban való konvergenciával. Több ekvivalens alakja van ennek a definiciónak. Ezek mindegyike ekvivalens. A definiciókat megadom, de ekvivalenciájuk bizonyítását elhagyom.

Valószínűségi mértékek (gyenge) konvergenciájának a definiciója, a) definició. *Legyen adva valószínűségi mértékek μ_n, $n = 1, 2\dots$, sorozata egy (X,ρ) szeparábilis metrikus tér Borel mérhető részhalmazain. Azt mondjuk, hogy e mértékek sorozata gyengén konvergál egy μ e szeparábilis metrikus tér Borel mérhető részhalmazain definiált valószínűségi mértékhez, ha minden a metrikus téren értelmezett folytonos $f(x)$ függvényre*

$$\lim_{n\to\infty} \int f(x)\mu_n(\,dx) = \int f(x)\mu(\,dx).$$

Valószínűségi mértékek (gyenge) konvergenciájának a definiciója, b1) definició. *Legyen adva valószínűségi mértékek μ_n, $n = 1, 2\dots$, sorozata egy (X,ρ) szeparábilis metrikus tér Borel mérhető részhalmazain. Azt mondjuk, hogy e mértékek sorozata gyengén konvergál egy μ e szeparábilis metrikus tér Borel mérhető részhalmazain definiált valószínűségi mértékhez, ha minden a metrikus téren lévő zárt F halmazra*

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(F) \le \mu(F).$$

Valószínűségi mértékek (gyenge) konvergenciájának a definiciója, b2) definició. *Legyen adva valószínűségi mértékek μ_n, $n = 1, 2\dots$, sorozata egy (X,ρ) szeparábilis metrikus tér Borel mérhető részhalmazain. Azt mondjuk, hogy e mértékek sorozata gyengén konvergál egy μ e szeparábilis metrikus tér Borel mérhető részhalmazain definiált valószínűségi mértékhez, ha minden a metrikus téren lévő nyílt G halmazra*

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(G) \ge \mu(G).$$

Most kimondhatjuk az előbb szériasorozatok által definiált véletlen lineáris darabokból álló (töröttvonal) függvényeket értékként felvevő sztochasztikus folyamatok gyenge konvergenciáját a Wiener mértékhez. Ezt a tételt az irodalomban funkcionális centrális határeloszlástételnek hívják.

Funkcionális centrális határeloszlástétel. *Legyen adva egy a (B2) képletben leírt szériasorozat, amelynek tagjai teljesítik az* $E\xi_{k,j}=0$, $E\xi_{k,j}^2=\sigma_{k,j}^2$, $k=1,2,\dots$, $1\le j\le n_k$, $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n_k}\sigma_{k,j}^2=1$ *relációkat és a Lindebeg feltételt. Vezessük be az e szériasorozat segítségével a (B3) formulában definiált folytonos trajektóriájú* $X_k(t)=X_k(t,\omega)$, $0\le t\le 1$, $k=1,2,\dots$, *folytonos trajektóriájú sztochasztikus folyamatokat. Az* $X_k(t,\omega)$ *sztochasztikus folyamatok gyengén konvergálnak a Wiener mértékhez, ha* $k\to\infty$.

Felmerül a kérdés, miért érdekes a fenti eredmény. Azért, mert ez nem pusztán egy absztrakt térben megfogalmazott változata a centrális határeloszlástételnek, hanem maguknak a szériasorozatok részletösszegeinek aszimptotikus viselkedéséről is lényeges új információt tartalmaz. Annak érdekében, hogy ezt megértsük lássuk be az alábbi egyszerű lemmát, amely azt fejezi ki, hogy egy folytonos transzformáció gyengén konvergens valószínűségi mértékek sorozatát ismét valószínűségi mértékek gyengén konvergens sorozatába visz. Pontosabban megfogalmazva a következő eredmény érvényes.

Lemma gyengén konvergens valószínűségi mértékek konvergenciájáról. *Legyen adva egy* $(X,\mathcal{X})$ *szeparábilis metrikus tér (itt* $\mathcal{X}$ *a* ρ *metrika segítségével az* X *téren definiált nyílt halmazok által generált Borel* σ*-algebrát jelöli, és hasonlóan értelmezzük később az* $\mathcal{Y}$ σ*-algebrát egy* $(Y,\mathcal{Y})$ *téren) és azon valószínűségi változók* μ_n *sorozata,* $n=1,2,\dots$, *amely az előbb definiált gyenge konvergencia értelmében konvergál egy* μ *valószínűségi mértékhez. Legyen adva ezenkívül egy másik* $(Y,\mathcal{Y})$ *szeparábilis metrikus tér, valamint egy* T *folytonos transzformáció az* $(X,\mathcal{X})$ *térből az* $(Y,\mathcal{Y})$ *térbe. Ez a transzformáció természetes módon indukál egy transzformációt, amely minden az* $(X,\mathcal{X})$ *téren definiált* ν *valószínűségi mértéknek a következő* $T\nu$ *valószínűségi mértéket felelteti meg az* $(Y,\mathcal{Y})$ *téren:* $T\nu(B)=\nu(\{x\colon Tx\in B\})$ *minden* $B\in\mathcal{Y}$ *halmazra. Ekkor a* $T\mu_n$ *valószínűségi mértékek gyengén konvergálnak a* $T\mu$ *valószínűségi mértékhez.*

A lemma bizonyítása. Alkalmazzuk a gyenge konvergencia a) definicióját. Ekkor azt kell belátni, hogy tetszőleges az $(Y,\mathcal{Y})$ téren folytonos $g(y)$ függvényre

$$\lim_{n\to\infty}\int g(y)T\mu_n(\,dy)=\int g(y)T\mu(\,dy).$$

Vezessük be a $g(y)$ függvény $f(x)=g(Tx)$ ősképét. Ekkor az $f(x)$ függvény folytonos, és a mértékelmélet egyik fontos eredménye alapján mértéktartó transzformációk szerinti integrálokról $\int f(x)\mu(dx)=\int g(y)T\mu(dy)$ és $\int f(x)\mu_n(dx)=\int g(y)T\mu_n(dy)$ minden $n=1,2,\dots$ számra. A μ_n mértékek gyenge konvergenciájából és az $f(x)$ függvény folytonosságából következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\int f(x)\mu_n(\,dx)=\int f(x)\mu(\,dx)$ a fenti szerepositással. A fenti összefüggésekből következik a lemma állítása.

Megjegyzés: Be lehet látni, hogy igaz a fenti lemma olyan élesítése, amely szerint a Lemma általánosítása érvényben marad akkor is, ha gyengítjük azt a feltételt, hogy a T transzformáció folytonos. Elegendő csak annyit megkövetelni, hogy a T transzformáció egy valószínűséggel folytonos a μ (határ)mérték szerint. Ez az általánosítás érdekes bizonyos alkalmazásokban.

A fenti lemma számunkra abban a speciális esetben érdekes, amikor az $(X, \mathcal{X})$ tér a $[0,1]$ intervallumon definiált folytonos függvények $C([0,1])$ tere, $(Y, \mathcal{Y})$ a számegyenes vagy egy véges dimenziós euklidészi tér a szokásos Borel σ-algebrával, és alkalmazunk egy T transzformációt a $C([0,1])$ térből ebbe a véges dimenziós euklidészi térbe. Ekkor a funkcionális centrális határeloszlástételnek érdekes következményei vannak. Tekinthetjük például a következő példákat: $T_1 f = \sup\limits_{0 \le x \le 1} |f(x)|$, $T_2 f = \sup\limits_{0 \le x \le 1} f(x)$, $T_3 f = \int_0^1 f^2(x)\,dx$, $T_4 f = (T_1 f, T_2 f, T_3 f)$. Ezek a transzformációk mindegyike folytonos, ezek közül az első három a számegyenesre, a negyedik a három dimenziós euklidészi térbe képez. A T_1 transformáció alkalmazása például azt adja, hogy ha egy szériasorozat teljesíti a funkcionális centrális határeloszlástétel feltételeit, akkor a $\sup\limits_{1 \le j \le n_k} \left| \sum\limits_{p=1}^{j} \xi_{k,p} \right|$ valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak egy a $[0,1]$ intervallumban definiált Wiener folyamat szuprémumának eloszlásához. Hasonlóan lehet egy határeloszlástételt mondani T_2, T_3 vagy T_4 transzformáció alkalmazása segítségével. Vegyük észre azt is, hogy a határeloszlás csak a határfolyamattól (a Wiener folyamattól) függ, tehát minden a funkcionális centrális határeloszlástétel feltételeit teljesítő szériasorozatra ugyanaz.

Informális módon a fenti eredmények úgy interpretálhatóak, hogy a funkcionális határeloszlástétel feltételeit teljesítő szériasorozatokból képzett részletösszegek sorozatai nagy indexre hasonlóan viselkednek, és ezt a hasonló viselkedést a Wiener folyamat segítségével írhatjuk le.

Megjegyzések a feladatok megoldásához

1. feladat. Be kell látni, hogy a feladatban megadott halmazrendszer σ-algebrát alkot. Használjuk fel ennek igazolásához azt a halmazelméleti tényt, hogy megszámlálható sok megszámlálható halmaz uniója is megszámlálható. Ennek a ténynek a segítségével vegyük észre, hogy ha tekintünk megszámlálható sok a halmazrendszerben szereplő halmazt, akkor feltehetjük, hogy ezek mindegyike ugyanazon megszámlálható sok függvény által generált σ-algebrában van.

1. a feladat (Vázlatos indoklás) Ahhoz, hogy a tekintett halmazfüggvény σ-additív legyen, ahhoz elég ezt a tulajdonságot megkövetelni akkor, ha a tér indexhalmazát (tetszőleges módon) megszorítjuk megszámlálható sok koordinátára. Átindexeléssel viszont feltehetjük, hogy ez a természetes számok halmaza.

2. feladat Egy $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ vektort k-dimenziós standard normális eloszlású vektornak nevezünk, ha koordinátái független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Azokat a vektorokat nevezzük normális eloszlásúnak, amelynek eloszlása megegyezik egy $\xi A + m$ véletlen vektor eloszlásával, ahol ξ standard normális eloszlású vektor, A egy $k \times k$ mátrix m egy k-dimenziós (determinisztikus) vektor. Némi számolással belátható, hogy egy ilyen vektor kovariancia mátrixa $D = A^*A$ alakú. A lineáris algebra bizonyos eredményeiből következik, hogy a $D = A^*A$ egyenletnek (rögzített D mátrixra) akkor és csak akkor van megoldása, ha D szimmetrikus pozitív (szemi)definit mátrix. (Miért?) Viszont egy ilyen egyenletnek nem csak egy A mátrix lehet a megoldása. Ennek ellenére a D kovariancia mátrix és az m várható érték mátrix meghatározza egy normális eloszlású vektor eloszlását. Ennek egy lehetséges magyarázata: Elég megmutatni, hogy a ξ normális eloszlású valószínűségi változó $Ee^{i(t,\xi)}$ karakterisztikus függvényét meghatározza a D kovariancia mátrix és m várható érték. Másrészt be lehet látni, hogy $Ee^{i(t,\xi)} = e^{-(t,Dt)/2+i(m,t)}$.

3. feladat Az eloszlások megegyezéséhez a tekintett vektorok normális eloszlása és nulla várható értéke miatt elegendő a kovarianciamátrixok megegyezését ellenőrízni. A konzisztencia könnyen látható, ha megértjük, miről van szó.

4. feladat (Vázlatos indoklás) A σ-algebra csak megszámlálható sok koordiátától függő eseményeket tartalmaz. Egy függvény ismerete viszont megszámlálható sok koordinátájában nem határozza meg, hogy folytonos-e, mert a többi koordinátában el lehet rontani a folytonosságot.

5. feladat Mind az 5., mind az 5a) mind az 5b) feladat megoldása a következő állítás igazolásán alapul:

Tekintsük az $(R^{[0,1]}, \mathcal{C}^{[0,1]}) = \left(\prod\limits_{t\in[0,1]} R_t, \prod\limits_{t\in[0,1]} \mathcal{B}_t \right)$ szorzatteret, ahol R_t a számegyenesnek $\mathcal{B}_t$ pedig a számegyenes σ-algebrájának egy a t számmal paraméterezett példánya. Jelölje Z az összes a $[0,1]$ intervallumon folytonos függvényből álló halmazt, és tekintsük az $(R^{[0,1]}, \mathcal{C}^{[0,1]})$ tér $Z, \mathcal{Z})$ megszorítását a Z halmazra. Ez azt jelenti, hogy vesszük a Z halmazt, és $\mathcal{Z}$ azokból a B halmzokból áll, amelyek előállnak $B = Z \cap A$,

$A \in \mathcal{C}^{[0,1]}$ alakban. Nem nehéz belátni, hogy $\mathcal{Z}$ a Z halmaz bizonyos részhalmazaiból álló σ-algebra. Azt állítjuk, hogy tetszőleges a $C([0,1])$ térben Borel mérhető halmaz benne van a $\mathcal{Z}$ σ-algebrában. (Az is igaz, hogy a $\mathcal{Z}$ σ-algebra megegyezik a $C([0,1])$ tér Borel σ-algebrával, de ennek az állításnak a második felére nem lesz szükségünk.)

Az előbbi állítás bizonyításához elég megmutatni azt, hogy a $C([0,1])$ tér minden G nyílt halmazára $G \in \mathcal{Z}$, mert ebből következik, hogy minden a nyílt halmazok által generált σ-algebrájában levő B halmazra, $B \in \mathcal{Z}$.

Tovább lehet redukálni az állítást a következő tipusú halmazokra: Ha $x = x(t) \in C([0,1])$, $\varepsilon > 0$, akkor legyen $S(x,\varepsilon) = \{y\colon y \in C([0,1]),\ \sup\limits_{t\in[0,1]} |x(t) - y(t)| < \varepsilon\}$. Elég belátni, hogy minden $S(x,\varepsilon)$ tipusú halmazra $S(x,\varepsilon) \in \mathcal{Z}$, mert tetszőleges nyílt halmaz előállítható megszámlálható sok ilyen halmaz uniójaként. A következő meggondolás mutatja, hogy $S(x,\varepsilon) \in \mathcal{Z}$. Jelölje Q a racionális számok halmazát a $[01,1]$ intervallumban. Ekkor

$$S(x,\varepsilon) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{r\in Q} \left\{ y\colon y \in Z, |y(r) - x(r)| < \left(1 - \frac{1}{n}\right)\varepsilon \right\} \right) \in \mathcal{Z}.$$

(Miért?)

Az, hogy az $X(\cdot,\omega)$ folytonos trajektóriájú folyamat azt jelenti, hogy $X(\cdot,\omega) \in Z$ minden $\omega \in \Omega$ elemi eseményre. Mivel a $C([0,1])$ tér minden B Borel mérhető halmaza előáll $B = A \cap Z$, $A \in \mathcal{C}^{[0,1]}$ alakban, ezért $\{\omega\colon X(\cdot,\omega) \in B\} = \{\omega\colon X(\cdot,\omega) \in B \cap Z\} = \{\omega\colon X(\cdot,\omega) \in A\} \in \mathcal{A}$, és a $P(X(\cdot,\omega) \in A) = P(X(\cdot,\omega) \in B$ valószínűséget meghatározzák az $X(\cdot,\omega)$ sztochasztikus folyamat véges dimenziós eloszlásai. Innen következik mind az 5a) mind az 5b) feladat állítása.

6. feladat Parciális integrálással belátható, hogy

$$\begin{aligned}\int_x^\infty e^{-u^2/2}\,du &= \frac{1}{x}e^{-x^2/2} - \int_x^\infty \frac{1}{u^2}e^{-u^2/2}\,du \\ &= \frac{1}{x}e^{-x^2/2} - \frac{1}{x^3}e^{-x^2/2} + \int_x^\infty \frac{3}{u^4}e^{-u^2/2}\,du\ ,\end{aligned}$$

és ebből az azonosságból levezethető a feladat állítása.