Wiener folyamat tulajdonságai

Láttuk, hogy a Wiener folyamat teljesíti az úgynevezett funkcionális határeloszlástételt. Ez az eredmény durván szólva azt fejezi ki, hogy ha olyan független valószínűségi változókat veszünk, amelyek teljesítik a centrális határeloszlástétel feltételeit, akkor ezek részletösszegeinek segítségével természetes módon definiálhatunk olyan töröttvonalfüggvényeket, amelyek viselkedése hasonló a Wiener folyamatéhoz. A Wiener folyamatok segítségével egyszerűen lehet definiálni egy Wiener bridge-nek (vagy Brown bridge-nek) nevezett (Gauss) sztochasztikus folyamatot, amelyre az igaz, hogy független, a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változókból készített empirikus eloszlásfüggvények normalizáltjai gyengén konvergálnak a Wiener bridge eloszlásához. Ez az eredmény rendkívül fontos a matematikai statisztika számára, ezért érdemes a fent megfogalmazott állítást részletesebben és pontosabban kifejteni. Először megadom a Wiener bridge definicióját.

Wiener bridge definiciója. *Egy $B(t)$, $0\le t\le 1$, Wiener bridge olyan folytonos trajektóriájú Gauss folyamat, amelyre $EB(t)=0$, $0\le t\le 1$, és $EB(s)B(t)=\min(s,t)-st$, $0\le s,t\le 1$.*

A következő két feladat feladat megfogalmazza a Wiener bridge néhány fontos tulajdonságát. Speciálisan, ezen feladatok eredményéből következik, hogy valóban létezik Wiener bridge.

1. feladat *Legyen $W(t)$, $0\le t\le 1$, Wiener folyamat a $[0,1]$ intervallumon. Ekkor a $B(t)=W(t)-tW(1)$, $0\le t\le 1$, Wiener bridge, amely független a $W(1)$ valószínűségi változótól.*

Megfordítva: Legyen $B(t)$, $0\le t\le 1$, Wiener bridge, és η a $B(t)$ Wiener bridge-től független standard normális eloszlású valószínűségi változó. Ekkor $W(t)=B(t)+t\eta$ Wiener folyamat a $0\le t\le 1$ intervallumon.

A fenti feladat pontos megértése érdekében idézzük fel a következő definiciót.

Sztochasztikus folyamatok függetlensége. *Legyen adva két $X(t)$, $t\in T$, és $Y(t')$, $t'\in T'$ sztochasztikus folyamat. Azt mondjuk, hogy az $X(t)$ sztochasztikus folyamat független az $Y(t')$ sztochasztikus folyamattól, ha minden $\{t_1,\dots,t_s\}\subset T$ és $\{t'_1,\dots,t'_{s'}\}\subset T'$ véges halmazra az $(X(t_1),\dots,X(t_k))$ és $(Y(t'_1),\dots,Y(t'_{s'}))$ véletlen vektorok függetlenek egymástól.*

A feladat megoldásának alapgondolata: Normális eloszlású vektorok eloszlását egyértelműen meghatározza azok várható érték vektora és kovariancia mátrixa. Egy normális eloszlású vektor koordinátái függetlenek, ha korrelálatlanok.

A második feladat megfogalmazása előtt megadom az eloszlásfüggvény, illetve normalizált eloszlásfüggvény definicióját.

Empirikus eloszlásfüggvény definiciója, és annak normalizáltja. *Legyen adva egy $F(x)$ eloszlásfüggvény, és legyen $\xi_1,\dots,\xi_n$ független $F(x)$ eloszlású valószínűségi* *változók sorozata. Ekkor a $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók sorozata (a matematikai statisztika szóhasználatában minta) által meghatározott $F_n(x)$ empirikus eloszlásfüggvényt meghatározza a következő képlet.*

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \times \text{azon } j,\ 1 \le j \le n, \text{ indexek száma, amelyekre } \xi_j < x, \quad -\infty < x < \infty. \tag{C1}$$

Az $F(x)$ függvény normalizáltja a

$$G_n(x) = \sqrt{n}(F_n(x) - F(x)) \tag{C2}$$

függvény.

Az előbbi definició tetszőleges $F(x)$ eloszlásfüggvény esetén érvényes. Viszont a következő (egyszerű) feladat lehetővé teszi, hogy statisztikai feladatok vizsgálatában figyelmünket csak a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlással foglalkozzunk.

Feladat. Legyen az $F(x)$ eloszlásfüggvény folytonos függvény, $\xi_1, \dots, \xi_n$ $F(x)$ eloszlású minta. Ekkor az $\eta_j = F(\xi_j)$, $1 \le j \le n$, független a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók sorozata, azaz az η_j, $1 \le j \le n$, valószínűségi változók függetlenek, és $P(\eta_j = x) = x$, ha $0 \le x \le 1$, $F(x) = 1$, ha $x > 1$, $F(x) = 0$, ha $x < 0$.

Megjegyzés. Az $\eta = F(\xi)$ transzformáció általánosított (véletlenített) transzformációja segítségével tetszőleges eloszlású minta transzformálható a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszláshoz tartozó mintává.

Bizonyos állítások (kényelmesebb) megfogalmazása érdekében érdemes bevezetni az empirikus eloszlásfüggvények, illetve azok normalizáltjának olyan alkalmas módosítását bevezetni, amely folytonos függvény.

Módosított empirikus eloszlásfüggvény definicója, illetve annak normalizáltja. *Legyen $\xi_1, \dots, \xi_n$ független, a $[0,1]$ intevallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók sorozata. Tekintsük az e sorozat által a (C1) képlet segítségével definiált $F_n(x)$ empirikus eloszlásfüggvényt. Ennek modósítása a következő $\tilde{F}_n(x)$ függvény, $0 \le x \le 1$, amelynek egyszerűbb megfogalmazása érdekében bevezetem a $\xi_0^* = 0$, $\xi_{n+1}^* = 1$ jelölést. Ezenkívül legyen $\xi_1^* < \xi_2^* < \cdots < \xi_n^*$ a $\xi_1, \dots, \xi_n$ mintából készített rendezett minta, azaz e sorozat elemeinek nagyság szerint sorbarendezett változata. Ezekkel a jelölésekkel legyen*

$$\begin{aligned} &\tilde{F}_n(\xi_j^*) = F_n(\xi_j^*), \quad 0 \le j \le n+1, \qquad \left(\tilde{F}_n(\xi_j^*) = \frac{j}{n} \quad \text{ha } 0 \le j \le n\right) \\ &F_n(x) = \frac{\xi_j^* - x}{\xi_j^* - \xi_{j-1}^*} F_n(\xi_{j-1}^*) + \frac{x - \xi_{j-1}^*}{\xi_j^* - \xi_{j-1}^*} F_n(\xi_j^*), \end{aligned} \tag{C1$'$}$$

és

$$\tilde{G}_n(x) = \sqrt{n}(\tilde{F}_n(x) - x). \tag{C2$'$.}$$

2. feladat. Legyen $\xi_1, \dots, \xi_n$ független, $F(x)$ eloszlású valószínűségi változók sorozata. Ezek normalizált $G_n(x) = \sqrt{n}(F_n(x) - F(x))$ empirikus eloszlásfüggvénye teljesíti a következő azonosságokat: $EG_n(x) = 0$ minden $-\infty < x < \infty$ számra,

$$\mathrm{Cov}\,(G_n(x), G_n(y)) = \min(F(x), F(y)) - F(x)F(y), \quad -\infty < x, y < \infty.$$

Speciálisan, ha $F(x)$ megegyezik az egyenletes eloszlás eloszlásfüggvényével a $[0,1]$ intervallumon, akkor a $G_n(x)$, $0 \le x \le 1$, és egy $B(x)$, $0 \le x \le 1$, Wiener bridge kovariancia függvénye egyenlő. (Mind a két sztochasztikus folyamat nulla várható értékű valószínűségi változókból áll.)

Segítség a 2. feladat megoldásához. Minden $-\infty < x < \infty$ számra és $1 \le j \le n$ indexre definiáljuk az $\eta_j(x)$ valószínűségi változókat az $\eta_j(x) = 1$, ha $\xi_j < x$, $\eta_j(x) = 0$, ha $\xi_j \ge x$. Ekkor $F_n(x) = \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \eta_j(x)$. Ezen észrevétel segítségével a keresett várható értéket és kovarianciafüggvényt ki tudjuk számolni egyszerű független véletlen vektorok összegének a vizsgálatával.

A 2. feladat azt jelenti, hogy egy a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók sorozatából elkészített $G_n(x)$ empirikus eloszlásfüggvény várható érték és kovariancia függvény struktúrája megegyezik a Wiener bridge-ével. Ezenkívül a többdimenziós centrális határeloszlástételből az is kiolvasható, hogy a $G_n(x)$ többdimenziós eloszlásai konvergálnak a Wiener bridge megfelelő koordinátáinak véges dimenziós eloszlásaihoz. Ezek az eredmények azt sugallják, hogy a normalizált empirikus folyamatok gyengén konvergálnak a Wiener bridge eloszlásához, azaz a funkcionális centrális határeloszlástételhez hasonló állítás érvényes ebben az esetben. Ez az elképzelés helyes. Az alább kimondott tétel megfogalmazza a pontos állítást.

Tétel normalizált empirikus eloszlásfüggvények gyenge konvergenciájáról a Wiener bridge-hez. *Legyen adva egy független $\xi_1, \dots, \xi_n$, a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változókból álló sorozat. Készítsük el segítségükkel a (C2) képletben definiált normalizált empirikus eloszlásfüggvényt, vagy annak a (C2$'$) képletben definiált változatát. (Jelen esetben $F(x)$ a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlás eloszlásfüggvénye.) Ekkor mind az $G_n(x)$ mind a $\tilde{G}_n(x)$, $0 \le x \le 1$, sztochasztikus folyamatok gyengén konvergálnak a Wiener bridge eloszlásához, ha $n \to \infty$.*

Megjegyzés: Annak az állításnak a jelentése, hogy a $G_n(x)$ véletlen függvények sorozata gyengén konvergál a Wiener bridge eloszlásához további magyarázatra szorul. Ugyanis a $G_n(x)$ nem folytonos függvény, így nem tekinthető $C([0,1])$ térbeli valószínűségi változónak. Viszont gyenge konvergenciát csak valamely szeparábilis metrikus tér értékeit felvevő valószínűségi változók eloszlásaira értelmeztük. Ezen a nehézségen lehet segíteni. Az irodalomban bevezették az úgynevezett $D([0,1])$ teret, amely a $[0,1]$ intervallumon balról folytonos függvényekből áll, és ezen a téren alkalmas metrikát is bevezettek. Ezen a téren dolgozva a fenti Tételben kimondott állításnak pontos értelme van. Mi egy egyszerűbb megoldást választottunk. Bevezettük a módosított $\tilde{G}_n(x)$ normalizált empirikus eloszlásfüggvényeket, amelyek már folytonos függvények és alig különböznek a $G_n(x)$ empirikus eloszlásfüggvényektől. Ezek gyenge konvergenciájáról a Wiener bridge eloszlásához minden előkészítés nélkül jogunk van beszélni. Ez az eredmény ugyanolyan jól használható, mint a fenti tétel első állítása. Valójában a két eredmény ekvivalens.

A normalizált empirikus eloszlásfüggvények gyenge konvergenciájáról szóló tételnek fontos következményei vannak. Számos a matematikai statisztikában szereplő eredmény következik ebből az eredményből. Így például az a tény, hogy a $\sup\limits_{0\le x\le 1}\sqrt{n}|F_n(x)-F(x)|$ vagy $\sup\limits_{0\le x\le 1}\sqrt{n}(F_n(x)-F(x))$ valószínűségi változóknak van határeloszlásuk, ha $n\to\infty$, ahol F_n egy n-elemű minta empirikus eloszlásfüggvénye, $F(x)$ pedig a mintaelemek valódi eloszlásfüggvénye adódik innen. (Az első kifejezést Kolmogorov statisztikának a másodikat Szmirnov statisztikának hívják.) Az első esetben a határeloszlás megegyezik a $\sup\limits_{0\le x\le 1}|B(x)|$ a második esetben pedig a $\sup\limits_{0\le x\le 1} B(x)$ valószínűségi változó eloszlásával, ahol $B(x)$, $0\le x\le 1$, a Brown-bridge. Ezen valószínűségi változók eloszlását bizonyos nem triviális módszerek segítségével ki lehet számolni. Annak tárgyalása, hogy ezt a számolást hogyan lehet végrehajtani, nem része ennek az előadásnak. Megjegyzem, hogy a matematikai statisztikában szokták az úgynevezett von Mieses statisztikákat is tekinteni. Ezek $n\int_{-\infty}^{\infty}(F_n(x)-F(x))^2\,F(\,dx)$ alakú statisztikák. Ezeknek is van limesze, amely megegyezik az $\int_0^1 B^2(x)\,dx$ valószínűségi változó eloszlásával. A von Mieses féle statisztikákról szóló határeloszlástétel is következik a fenti gyenge konvergencia tételből.

Wiener folyamat trajektóriáinak a viselkedése.

Láttuk, hogy a Wiener folyamat trajektóriái folytonosak. (Pontosabban azt, hogy ezt feltehetjük, azaz léteznek olyan a Wiener folyamat definiciójában előírt várható értékkel és kovariancia függvénnyel rendelkező Gauss folyamatok, amelyeknek a trajektóriái folytonosak.) Másrészt ezek a trajektóriák egyébként elég rossz símasági tulajdonságokkal rendelkeznek. Néhány ilyen jellegű eredményt ismertetek. Az, hogy a Wiener folyamatok rossz folytonossági tulajdonságokkal rendelkeznek tulajdonképpen nem meglepő. Heurisztikus szinten ez azzal magyarázható, hogy a Wiener folyamatok véletlenszerűen fejlődnek, és ez bizonyos szabálytalanságot kölcsönöz a viselkedésüknek.

Először a következő eredményt ismertetem.

Tétel Wiener folyamat trajektóriáinak viselkedéséről. *Legyen* $W(t,\omega)$, $0\le t\le 1$, *Wiener folyamat a* $[0,1]$ *intervallumon. A Wiener folyamat teljesíti az alábbi relációt:*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2^n}\left[W\left(\frac{k}{2^n},\omega\right)-W\left(\frac{k-1}{2^n},\omega\right)\right]^2=1$$

majdnem minden $\omega\in\Omega$ *elemi eseményre.*

A tétel bizonyítása. Vegyük észre, hogy rögzített n indexre az

$$\eta_{k,n}=\left[W\left(\frac{k}{2^n},\omega\right)-W\left(\frac{k-1}{2^n},\omega\right)\right]^2,\quad k=1,\dots,2^n$$

valószínűségi változók függetlenek, és nulla várható értékű, 2^{-n} szórásnégyzetű normális eloszlású valószínűségi változók. Ezért $\eta_{k,n} = 2^{-n}$, $\operatorname{Var}\eta_{k,n} = 2\cdot 2^{-2n}$, ahonnan következik, hogy

$$E\left(\sum_{k=1}^{2^n}\left[W\left(\frac{k}{2^n},\omega\right)-W\left(\frac{k-1}{2^n},\omega\right)\right]^2\right)=1,$$

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{k=1}^{2^n}\left[W\left(\frac{k}{2^n},\omega\right)-W\left(\frac{k-1}{2^n},\omega\right)\right]^2\right)=2\cdot 2^{-n},$$

és a Csebisev egyenlőtlenség alapján

$$P\left(\left|\sum_{k=1}^{2^n}\left[W\left(\frac{k}{2^n},\omega\right)-W\left(\frac{k-1}{2^n},\omega\right)\right]^2-1\right|>\varepsilon\right)\le 2^{-n}\varepsilon^{-1}$$

minden $\varepsilon>0$ számra. Mivel a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\varepsilon^{-1}<\infty$ minden $\varepsilon>0$-ra, ezért a Borel–Cantelli lemma alapján a fenti egyenlőtlenségből következik a tétel állítása.

A fenti tétel hátterében az a tény van, hogy a centrális határeloszlástétel alapján egy kis $[s,t]$ intervallumban a Wiener folyamat megváltozása $(t-s)^{1/2}$ nagyságrendű, és diszjunkt intervallumokra e megváltozások függetlenek. Ezért e megváltozások négyzetösszege közel van e négyzetösszegek várható értékéhez. Megjegyzem, hogy síma, például differenciálható $f(x)$ (a $[0,1]$ intervallumon definiált) függvények korlátos változásúak, azaz teljesítik a $\sum\limits_{j=1}^{k}|f(x_j)-f(x_{j-1})|<K$ egyenlőtlenséget valamely csak az f függvénytől függő k számmal a $[0,1]$ intervallum tetszőleges $0=t_0<t_1<\cdots<t_k=1$ felosztásra. A fenti tétel eredményéből az is következik, hogy a Wiener folyamat trajektóriái nem korlátos megváltozásúak. Megfogalmazom ennek a tételnek egy lehetséges általánosítását is. Az általánosított tétel bizonyítását, amely a martingálok elméletének az eredményein alapul, elhagyom.

A Wiener folyamat trajektóriáinak viselkedéséről szóló tétel általánosítása. *Legyen $W(t,\omega)$, $0\le t\le 1$, Wiener folyamat a $[0,1]$ intervallumon. Tekintsük a $[0,1]$ intervallum egyre finomodó $0=t_0^{(n)}<t_1^{(n)}<\cdots<t_{k_n}^{(n)}$ felosztásait $n=1,2,\dots$, (azaz teljesüljön a $\{t_0^{(n)},t_1^{(n)},\dots,t_{k_n}^{(n)}\}\subset\{t_0^{(n+1)},t_1^{(n+1)},\dots,t_{k_{n+1}}^{(n+1)}\}$ feltétel) úgy, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{1\le k\le k_n}(t_k^{(n)}-t_{k-1}^{(n)})=0$. A Wiener folyamat majdnem minden trajektóriája teljesíti az alábbi relációt:*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{k_n}\left[W\left(t_j^{(n)},\omega\right)-W\left(t_{j-1}^{(n)},\omega\right)\right]^2=1 \quad \text{majdnem minden } \omega\in\Omega \text{ elemi eseményre.}$$

A következő egyszerű feladat azért is érdekes számunkra, mert lehetővé teszi azt, hogy a Wiener folyamat trajektóriáinak a $[0,1]$ intervallumban megállapított tulajdonságait "atörökítsük" a trajektóriák más intervallumokban való viselkedésére is.

Feladat: Ha $W(t)$ Wiener folyamat valamely az $[a,b]$ intervallumot tartalmazó intervallumon, akkor $\bar{W}(t) = \frac{1}{\sqrt{b-a}}(W(a+t(b-a)) - W(a))$, $0 \le t \le 1$, Wiener folyamat a $[0,1]$ intervallumon. Ha $W(t)$, $0 \le t \le a$, Wiener folyamat valamely $[0,a]$ intervallumon, akkor a $ta^{-1/2}W\left(\frac{a}{t}\right)$, $t \ge 1$, sztochasztikus folyamat Wiener folyamat az $[1,\infty]$ intervallumon, (azaz eloszlása megegyezik egy a $[0,\infty)$ félegyenesen definiált Wiener folyamatnak a megszorításával a $[1,\infty)$ félegyenesre.)

A fenti feladatból és az előző tételből következik, hogy egy $W(t)$ Wiener folyamat trajektóriáinak egy tetszőleges $[a,b]$ intervallum felosztásain vett megváltozásaira igaz, hogy azok négyzetösszegei a fent kimondott tételhez hasonló tulajdonságot teljesítenek. Ez a tény azért is érdekes, mert a sztochasztikus folyamatok elméletében vagy a nem paraméteres statisztikák elméletében többször megjelenik az a feladat, hogy egy sztochasztikus folyamat eloszlásának egy másik sztochasztikus folyamatra vett sűrűségfüggvényét, azaz Radon–Nikodym deriváltját számítsuk ki. Ilyen sűrűségfüggvény nem mindig létezik. Elképzelhető (sőt gyakran előfordul), hogy két sztochasztikus folyamat egymásra nézve szinguláris, mert trajektóráik más tipusú függvények családjában vannak. Lássuk be a következő állítást.

Feladat: Legyen $W(t,\omega)$, $0 \le t \le 1$, egy Wiener folyamat a $[0,1]$ intervallumon. Lássuk be, hogy a $W(t,\omega)$ és $2W(t,\omega)$ sztochasztikus folyamatok egymásra nézve szingulárisak, azaz létezik a $C([0,1])$ térnek két olyan (mérhető) A és B halmaza, amelyekre teljesülnek az $A \cap B = \emptyset$ és $P(\omega\colon W(t,\omega) \in A) = 1$, $P(\omega\colon 2W(t,\omega) \in B) = 1$ tulajdonságok.

Megfogalmazom (bizonyítás nélkül) az alábbi két eredményt, amely Wiener folyamatok trajektóriáinak folytonossági modulusát, illetve az úgynevezett iterált logaritmus tételt írja le.

Tétel Wiener folyamatok folytonossági modulásáról. *Legyen $W(t,\omega)$, $0 \le t \le 1$, Wiener folyamat a $[0,1]$ intervallumon. Teljesül a következő azonosság:*

$$P\left(\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{(s,t)\colon\, 0\le s<t\le 1,\, t-s\le\varepsilon} \frac{|W(t,\omega)-W(s,\omega)|}{\sqrt{2(t-s)\log\frac{1}{t-s}}} = 1\right) = 1.$$

Iterált logaritmus tétel Wiener folyamatokra. *Legyen $W(t,\omega)$, $0 \le t \le 1$, Wiener folyamat a $[0,1]$ intervallumon. Ekkor teljesül a következő azonosság:*

$$P\left(\lim_{t\to 0} \frac{|W(t,\omega)|}{\sqrt{2t\log\log\frac{1}{t}}} = 1\right) = 1.$$

Feladat: Lássuk be az egyik korábbi feladat eredménye segítségével, hogy a Wiener folyamatokra megfogalmazott iterált logaritmus tétel ekvivalens az alábbi állítással: Ha $W(t)$ Wiener folyamat a $t \ge 0$ félegyenesen, akkor

$$P\left(\lim_{t\to\infty}\frac{|W(t,\omega)|}{\sqrt{2t\log\log t}}=1\right)=1.$$

A következő eredmény a Wiener folyamatok trajektóriáinak egy érdekes tulajdonságát fogalmazza meg.

Tétel a Wiener folyamat trajektóriáinak nem differenciálhatósági tulajdonságairól. *Egy a* $[0,1]$ *intervallumban tekintett* $W(t,\omega)$, $0\le t\le 1$, *Wiener folyamat trajektóriái 1 valószínűséggel sehol sem differenciálhatóak.*

A tétel bizonyítása. Jelölje D azt az eseményt, hogy a Wiener folyamat trajektóriája differenciálható valamely pontban. Ha $\omega\in D$, akkor valamely $0\le s(\omega)\le 1$ számra a $W'(s,\omega)$ véges derivált létezik. Vegyük minden elég nagy n egész számra azt a $\left[\frac{j}{n},\frac{j+1}{n}\right]$ intervallumot, $j=j(s,n)$, amelyre $s\in\left[\frac{j}{n},\frac{j+1}{n}\right]$. Ekkor $s<1$ esetén a $W(\cdot,\omega)$ függvény deriválhatóságából az s pontban következik, hogy alkalmas L egész számra a

$$\left|W\left(\frac{j+1}{n},\omega\right)-W\left(\frac{j}{n},\omega\right)\right|\le\frac{L}{n},$$

$$\left|W\left(\frac{j+2}{n},\omega\right)-W\left(\frac{j+1}{n},\omega\right)\right|\le\frac{L}{n}$$

és

$$\left|W\left(\frac{j+3}{n},\omega\right)-W\left(\frac{j+2}{n},\omega\right)\right|\le\frac{L}{n}$$

egyenlőtlenségek mindegyike teljesül. Fontos, hogy az ezekben az egyenlőtlenségekben szereplő L szám nem függ az n számtól. (Az $s=1$ szám esete kissé eltérő, mert ekkor $j+1=n$ és nem vehetünk a $\left[\frac{j}{n},\frac{j+1}{n}\right]$ intervallumtól jobbra fekvő intervallumot. Viszont ebben az esetben felírhatjuk az

$$\left|W\left(\frac{j}{n},\omega\right)-W\left(\frac{j-1}{n},\omega\right)\right|\le\frac{L}{n}$$

és

$$\left|W\left(\frac{j-1}{n},\omega\right)-W\left(\frac{j-2}{n},\omega\right)\right|\le\frac{L}{n}$$

egyenlőtlenségeket minden elég nagy $n\ge n_0(\omega)$ számra. A fent elmondottakból következik, hogy

$$D\subset\bigcup_{L=1}^{\infty}\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\left(\bigcap_{n=m}^{\infty}\left(\bigcup_{j=0}^{n-3}C(j,n,L)\right)\right)\right),$$

ahol

$$C(j,n,L)=\bigcap_{s=1}^{3}\left\{\omega\colon \left|W\left(\frac{j+s}{n},\omega\right)-W\left(\frac{j+s-1}{n},\omega\right)\right|\le\frac{L}{n}\right\}.$$

Ezért a tétel bizonyításához elég belátni azt, hogy

$$P\left(\bigcap_{n=m}^{\infty}\left(\bigcup_{j=0}^{n-3}C(j,n,L)\right)\right)=0$$

minden m és L pozitív egész számra, vagy ami ezzel ekvivalens, azt hogy

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\bigcup_{j=0}^{n-3}C(j,n,L)\right)=0 \quad \text{minden } L=1,2,\dots \text{ számra.} \tag{C3}$$

Viszont a $C(j,n,L$ esemény három független esemény metszete, és ezek mindegyike olyan esemény, amelyben azt tekintjük, hogy egy 0 várható értékű és $\frac{1}{n}$ szórásnégyzetű normális eloszlású valószínűségi változó abszolut értéke kisebb, mint $\frac{L}{n}$. Ezért $P(C(j,n,L))=P(|\xi|\le Ln^{-1/2})^3$, ahol ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó. Innen $P(C(j,n,L)\le(2L)^3n^{-3/2}$, és $P\left(\bigcup_{j=0}^{n-3}C(j,n,L)\right)\le(2L)^3n^{-1/2}$. Ebből az egyenlőtlenségből következik a (C3) reláció, ezért a Tétel állítása is.

Wiener folyamatok jellemzése

Megadom a Wiener folyamat néhány fontos jellemzését. Ezek ismertetésének érdekében először bevezetek néhány fogalmat.

Független növekményű folyamat definiciója. *Legyen adva egy $X(t,\omega)$, $-\infty\le a<t<b\le\infty$, sztochasztikus folyamat valamely $[a,b]$ (véges vagy végtelen) intervallumban. Azt mondjuk, hogy az $X(t,\omega)$ sztochasztikus folyamat független növekményű, ha minden $k\ge 2$ egész számra és tetszőleges $a\le t_1<t_2<\dots<t_k\le b$ valós számokra az $[a,b]$ intervallumban az $X(t_{j+1},\omega)-X(t_j,\omega)$, $1\le j<k$, valószínűségi változók függetlenek.*

Stacionárius növekményű folyamat definiciója. *Legyen adva egy $X(t,\omega)$ sztochasztikus folyamat a $-\infty<t<\infty$ egyenesen vagy a $0\le t<\infty$ félegyenesen. Azt mondjuk, hogy az $X(t,\omega)$ sztochasztikus folyamat stacionárius növekményű, ha minden $u>0$ számra az $\bar X(t,\omega)=X(t+u,\omega)-X(u,\omega)$ sztochasztikus folyamat véges dimenziós eloszlásai megegyeznek az $X(t,\omega)$ folyamat véges dimenziós eloszlásaival. Másképp megfogalmazva azt követeljük meg, hogy minden $u>0$ számra, és minden $k\ge1$ egész számra valamint $t_1<t_2<\dots<t_k$ számokra a számegyenesen, illetve a $\{t\colon t\ge0\}$ félegyenesen az $X(t_j,\omega)$, $1\le j<k$, k-dimenziós és $X(t_j+u,\omega)-X(u,\omega)$, $1\le j<k$, k-dimenziós véletlen vektorok eloszlásai egyezzenek meg.*

A későbben tárgyalandó témák megértése érdekében vezessük be a stacionárius folyamatok fogalmát is.

Stacionárius folyamat definiciója. *Legyen adva egy $X(t,\omega)$ sztochasztikus folyamat a $-\infty < t < \infty$ egyenesen, vagy a $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ egész számok halmazán. Azt mondjuk, hogy az $X(t,\omega)$ sztochasztikus folyamat (erős értelemben) stacionárius, ha minden $u > 0$ számra (a számegyenes esetében, és minden $u > 0$ egész számra, ha a sztochasztikus folyamat az egész számokkal van indexelve) "az $X(t,\omega)$ sztochasztikus folyamat u számmal való eltoltja" az $\bar{X}(t,\omega) = X(t+u,\omega)$, $-\infty < t < \infty$, (vagy $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, sztochasztikus folyamat véges dimenziós eloszlásai megegyeznek az $X(t,\omega)$ folyamat véges dimenziós eloszlásaival. Másképp megfogalmazva azt követeljük meg, hogy minden $u > 0$ (egész) számra, és minden $k \ge 1$ egész számra valamint $-\infty < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < \infty$ számokra az $X(t_j,\omega)$, $1 \le j < k$, k-dimenziós és $X(t_j+u,\omega)$, $1 \le j < k$, k-dimenziós véletlen vektorok eloszlásai egyezzenek meg.*

Megjegyzem, hogy az erős értelemben stacionárius folyamatnak van egy megfelelője, amelyet úgy hívnak, hogy gyengén stacionárius folyamat. Megadom ennek a definicióját is.

Gyengén stacionárius folyamat definiciója. *Legyen adva egy $X(t,\omega)$ sztochasztikus folyamat a $-\infty < t < \infty$ egyenesen, vagy a $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ egész számok halmazán, és legyen $EX(t,\omega)^2 < \infty$ minden t paraméterre. Azt mondjuk, hogy az $X(t,\omega)$ sztochasztikus folyamat gyenge értelemben stacionárius, ha létezik olyan M szám, hogy $EX(t,\omega) = M$, minden t számra, azaz a várható érték nem függ a t számtól, és létezik olyan $\rho(s)$ függvény ($-\infty < s < \infty$, ha a sztochasztikus folyamat a valós, és $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, ha a sztochasztikus folyamat az egész számokkal van indexelve), úgy, hogy* $\operatorname{Cov}(X(t,\omega), X(t+s,\omega)) = \rho(s)$, *azaz az $X(t,\omega)$ és $X(t+s,\omega)$ valószínűségi változók kovarianciafügggvénye nem függ a t számtól, hanem csak a t és $t+s$ számok s különbségétől függ.*

A következő egyszerű lemmában megfogalmazok egy egyszerű kapcsolatot az erősen és gyengén stacionárius sztochasztikus folyamatok között.

Lemma. *Ha $X(t,\omega)$ erősen stacionárius sztochasztikus folyamat, és $EX(t,\omega)^2 < \infty$, akkor $X(t,\omega)$ gyengén staciorárius folyamat.*

Megfordítva, ha $X(t,\omega)$ gyengén stacionárius sztochasztikus folyamat, és egyben Gauss folyamat, akkor $X(t,\omega)$ erősen stacionárius folyamat.

A lemma bizonyítása. A Lemma első állítása nyílvánvaló. A második állítás igazolása szintén egyszerű, ha megértjük, hogy egy több-dimenziós normális eloszlású valószínűségi vektor eloszlását meghatározza annak várható érték vektora és kovariancia mátrixa.

A következő állításokat feladat formájában fogalmazom meg. Ezek megoldása is azon alapul, hogy egy több-dimenziós normális eloszlású vektor eloszlását meghatározza annak várható érték vektora és kovariancia mátrixa.

Feladat: Egy Wiener folyamat független növekményű és stacionárius növekményű Gauss folyamat. Megfordítva, minden független növekményű és stacionárius növekményű Gauss folyamat egy Wiener folyamat konstansszorosa.

Feladat: Legyen adva egy $W(t,\omega)$, $0\le t<\infty$, Wiener folyamat a pozitív félegyenesen, és definiáljuk a $Z(t,\omega)=\frac{W(e^t,\omega)}{e^{t/2}}$, $-\infty<t<\infty$, sztochasztikus folyamatot. A $Z(t,\omega)$ sztochasztikus folyamat stacionárius $EZ(t,\omega)=0$, $-\infty<t<\infty$, várható értékkel, és $EZ(t,\omega)Z(u,\omega)=e^{-|u-t|/2}$, $-\infty<t,u<\infty$ kovariancia függvénnyel.

Megjegyzés: A fenti feladatban definiált $Z(t,\omega)$ sztochasztikus folyamatot Ornstein–Uhlenbeck folyamatnak hívják az irodalomban.

A következő tartalmasabb eredményben megadom a Wiener folyamatok egy nemtriviális jellemzését.

Tétel a Wiener folyamatok egy jellemzéséről. *Legyen $X(t,\omega)$, $EX(t,\omega)=0$, $0\le t<\infty$, független és stacionárius növekményű sztochasztikus folyamat a pozitív félegyenesen, amelyre teljesül az $EX(t,\omega)^2<\infty$ reláció minden $t>0$ számra. Tegyük fel továbbá, hogy az $X(t,\omega)$ sztochasztikus folyamat minden trajektóriája folytonos. Ekkor az $X(t,\omega)$ sztochasztikus folyamat egy Wiener folyamat konstansszorosa.*

A fenti eredményben nem tettük fel, hogy a tekintett sztochasztikus folyamat Gauss folyamat. Később ismertetni fogom ennek az eredménynek egy élesítését is, amelyben martingálok segítségével jellemezzük a Wiener folyamatot. A fenti tétel illetve annak általánosításának a bizonyítását elhagyom. Viszont szeretném legalább heurisztikus szinten elmagyarázni, hogy miért fontos a Tételnek az a a feltétele, hogy a sztochasztikus folyamat trajektóriái folytonosak. Az itt nem ismertetett bizonyítás fő gondolata az, hogy a Tétel feltételeit teljesítő sztochasztikus folyamatok Gauss folyamatok. Ezt a centrális határeloszlástétel segítségével lehet megmutatni.

A bizonyítás fő része annak megmutatásából áll, hogy ha tekintünk valamely $0\le s<t$ számokat, akkor az $X(t,\omega)-X(s,\omega)$ valószínűségi változó normális eloszlású. Ennek megmutatása érdekében érdemes az $[s,t]$ intervallum finom $s=t_1<t_2<\cdots<t_k=t$ felosztását tekinteni, (azaz olyan felosztását, amelyre $\sup\limits_{1\le j<k}(t_{j+1}-t_j)$ kicsi), és be bevezethetjük az $\eta_j(\omega)=X(t_{j+1},\omega)-X(t_j,\omega)$, $1\le j<k$, valószínűségi változókat. Az η_j, $1\le j<k$, valószínűségi változók függetlenek, és $X(t,\omega)-X(s,\omega)=\sum\limits_{j=1}^{k-1}\eta_j(\omega)$. Be szeretnénk látni, hogy az $[s,t]$ intervallum egyre finomodó felosztásaihoz tartozó előbb definiált összegekre alkalmazható a centrális határeloszlástétel, ezért az $X(t,\omega)-X(s,\omega)$ valószínűségi változó normális eloszlású. Be lehet látni, hogy a sztochasztikus folyamatok trajektóriáinak kicsisége biztosítja az η_j valószínűségi változókra azt a kicsiségi feltételt, (a Lindeberg feltétel teljesülését), amely szükséges a centrális határeloszlástétel teljesüléséhez. A Poisson folyamat alább ismertetett konstrukciója mutatja, hogy a trajektóriák folytonosságáról szóló feltétel nem hagyható el ebből a tételből.

Poisson folyamat konstrukciója.

Először felidézem a Poisson folyamat definicióját.

Azt mondjuk, hogy a ξ valószínűségi változó Poisson eloszlású λ, $0<\lambda<\infty$, paraméterrel, ha ξ nem negatív egész értékeket vesz fel, és $P(\xi=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k=0,1,\dots$.

Emlékeztetek továbbá a Poisson eloszlásnak az alábbi lemmában megfogalmazott fontos tulajdonságára.

1. Lemma. *Legyen ξ és η két független Poisson eloszlású valószínűségi változó, ξ λ és η μ paraméterrel. Akkor $\xi+\eta$ Poisson eloszlású valószínűségi változó $\lambda+\mu$ paraméterrel.*

A következő lemma tekinthető az előző lemma megfordításának. Ez lehetővé teszi, hogy egyszerű módon konstruáljunk Poisson folyamatokat.

2. Lemma. *Legyen adva k darab urna, és ezekbe dobjunk be véletlen ξ számú golyót, ahol ξ Poisson eloszlású valószínűségi változó $\lambda > 0$ paraméterrel. Legyenek az egyes dobások eredményei egymástól és a ξ valószínűségi változótól függetlenek. Tegyük fel továbbá, hogy minden egyes dobásnál a golyó az j-ik urnába $p_j \geq 0$ valószínűséggel esik, $j = 1, \dots, k$, $\sum\limits_{j=1}^{k} p_j = 1$. Jelölje η_j a j-ik urnába eső golyók számát. Az az η_j, $j = 1, \dots, k$, valószínűségi változók függetlenek, és η_j Poisson eloszlású λp_j paraméterrel, $j = 1, \dots, k$.*

A 2. Lemma bizonyítása.

$$
\begin{aligned}
P(\eta_1 = l_1, \dots, \eta_k = l_k) &= P(\xi = l_1 + \cdots + l_k) \frac{(l_1 + \cdots + l_k)!}{l_1! \cdots l_k!} p_1^{l_1} \cdots p_k^{l_k} \\
&= \frac{\lambda^{(l_1+\cdots+l_k)}}{l_1! \cdots l_k!} p_1^{l_1} \cdots p_k^{l_k} e^{-\lambda} = \prod_{j=1}^{k} \frac{(\lambda p_j)^{l_j}}{l_j!} e^{-\lambda p_j}
\end{aligned}
$$

tetszőleges $l_1 \geq 0, \dots, l_k \geq 0$ egész számokra. Innen adódik a 2. lemma állítása.

Az alábbiakban definiálom a Poisson mező fogalmát, és bebizonyítom az 1. Lemma és 2. Lemma segítségével, hogy Poisson mezők valóban léteznek.

Poisson mező definiciója. *Legyen adva egy $(X, \mathcal{X})$ mérhető tér, és azon egy μ σ-additív mérték. Legyen adva egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, és azon minden $\omega \in \Omega$ elemi eseményre az X tér véges vagy megszámlálható sok kijelölt $x_1(\omega), x_2(\omega), \dots$ pontja. (A kijelölt pontok száma lehet nulla is.) Azt mondjuk, hogy az így definiált rendszer Poisson mező az $(X, \mathcal{X})$ téren μ számláló mértékkel, ha minden $A \in \mathcal{X}$, $\mu(A) < \infty$, halmazra az A halmazba eső kijelölt pontok $\zeta_A(\omega)$ száma Poisson eloszlású valószínűségi változó $\mu(A)$ paraméterrel, és diszjunkt $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{X}$, $\mu(A_j) < \infty$, $1 \leq j \leq k$, halmazokra az ezekbe a halmazokba eső pontok $\zeta_{A_j}(\omega)$, $1 \leq j \leq k$, számai független valószínűségi változók.*

Tétel Poisson mezők létezéséről. *Tetszőleges $(X, \mathcal{X})$ mérhető térhez és azon definiált μ σ-additív mértékhez létezik Poisson mező az $(X, \mathcal{X})$ téren μ számláló mértékkel.*

A Poisson mezők létezéséről szóló tétel bizonyítása. Először azzal a speciális esettel foglalkozunk, amikor a μ mérték véges, azaz $\mu(X) < \infty$. Tekintsük a következő konstrukciót. Veszünk véletlen sok $\zeta(\omega)$ pontot, amelyek száma Poisson eloszlású $\mu(X)$

paraméterrel, és dobjuk le ezeket a pontokat az $(X, \mathcal{X})$ térre úgy, hogy mindegyik pont $\frac{\mu(A)}{\mu(X)}$ valószínűséggel esik az A halmazba. (Ilyen konstrukció lehetséges, de ennek technikai részleteit elhagyom.) Azt állítom, hogy az így definiált rendszer Poisson mező az $(X, \mathcal{X})$ téren μ számláló mértékkel. Elég belátni azt, hogy az X tér tetszőleges $A_1, \dots, A_k$ particiójára, azaz olyan $A_1, \dots, A_k$ eseményekre, amelyekre $A_j \cap A_{j'} = \emptyset$, ha $j \neq j'$, $\bigcup\limits_{j=1}^{k} A_j = \Omega$ az $A_1, \dots, A_k$ halmazokba eső ledobott pontok $\zeta_j(\omega)$ számai, független, Poisson eloszlású valószínűségi változók $\mu(A_j)$ paraméterrel. (Ha $A_1, \dots, A_k$ diszjunkt halmazok, akkor kiegészíthetjük ezt a rendszert e halmazok uniójának a komplementerével egy particióvá, és elegendő belátni, hogy e partició elemeibe eső ledobott pontok számai független Poisson eloszlású valószínűségi változók a megfelelő paraméterekkel.) Viszont ez utóbbi álllítás következik a 2. Lemmából $\lambda = \mu(X)$, és $p_j = \frac{\mu(A_j)}{\mu(X)}$ választással.

Tekintsünk általánosan egy $(X, \mathcal{X})$ mérhető teret egy μ σ-additív μ mértékkel. Ekkor az X térnek létezik olyan véges vagy megszámlálható $X_1, X_2, \dots$ diszjunkt halmazokból álló particiója, $\bigcup\limits_j A_j = X$, amelyre teljesül, hogy $\mu(X_j) < \infty$, $j = 1, 2, \dots$, a partició minden X_j elemére. Jelölje $(X_j, \mathcal{X}_j, \mu_j)$ azt a teret amelyre $\mathcal{X}_j$ az $A \in \mathcal{X}$, $A \subset X_j$ alakú halmazokból áll, és μ_j a μ mérték megszorítása a $\mathcal{X}_j$ σ-algebrára. Tekintsünk mindegyik $(X_j, \mathcal{X}_j)$ téren egy Poisson mezőt μ_j számláló mértékkel, amelyek különböző j indexre függetlenek. Ekkor be lehet látni az 1. lemma segítségével, hogy minden $A \in \mathcal{X}$, $\mu(A) < \infty$ halmazra $A = \bigcup\limits_j (X_j \cap A)$ az A halmaz felbontása diszjunkt halmazokra ezért az A halmazba eső pontok száma Poisson eloszlású $\mu(A) = \sum\limits_j \mu(X_j \cap A)$ paraméterrel, és ha $A_1, \dots, A_k$ diszjunkt véges μ mértékű halmazok, akkor az ezekbe a halmazokba eső pontok száma független.

Végül megadom a Poisson folyamat definicióját.

Poisson folyamat definiciója. *Egy $X(t, \omega)$, $0 \le t \le T$, $T > 0$, sztochasztikus folyamatot Poisson folyamatnak nevezünk λ paraméterrel a $[0, T]$ intervallumon, ha az $X(t, \omega)$ teljesíti a következő feltételeket.*

(i) Az $X(t, \omega)$ folyamat független növekményű, azaz tetszőleges $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k \le T$ pontokra az $X(t_1, \omega)$, $X(t_2, \omega) - X(t_1, \omega)$, $\dots$, $X(t_k, \omega) - X(t_{k-1}, \omega)$ valószínűségi változók függetlenek.

(ii) $X(t, \omega) - X(s, \omega)$ Poisson eloszlású valószínűségi változó $\lambda(t - s)$ paraméterrel.

(iii) Az $X(\cdot, \omega)$ trajektória szigorúan monoton jobbról folytonos egész értékű függvény.
Ha az $X(t, \omega)$, $t \ge 0$, teljesíti az (i)–(iii) feltételeket, akkor $X(t, \omega)$ Poisson folyamat a $[0, \infty)$ félegyenesen.

Tekintsünk egy Z Poisson mezőt a $[0, \infty)$ félegyenesen $\mu = \lambda \cdot$Lebesgue mérték számláló mértékkel. Legyen $X(t, \omega)$ ezen Z Poisson mező pontjainak száma a $[0, t)$ intervallumban. Ekkor $X(t, \omega)$, $t \ge 0$ Poisson folyamat λ paraméterrel a $[0, \infty]$ félegyenesen.

Legyen $X(t,\omega)$ Poisson folyamat a félegyenesen $\lambda = 1$ paraméterrel, és legyen $\bar{X}(t,\omega) = X(t,\omega) - t$, $t \geq 0$. Ekkor $\bar{X}(t,\omega)$ független és stacionárius növekményű folyamat, $E\bar{X}(t,\omega) = 0$ minden $t \geq 0$ számra, tehát a Wiener folyamatok jellemzéséről szóló tétel minden feltételét teljesíti, kivéve azt, hogy a trajektóriái folytonos függvények. Ez a példa mutatja a folytonos trajektória létezésének fontosságát ebben a tételben. Értsük meg azt is, hogy a $\bar{X}(1,\omega) = \sum\limits_{j=1}^{n} \left[\bar{X}\left(\frac{j}{n},\omega\right) - \bar{X}\left(\frac{j-1}{n},\omega\right)\right]$ azonosság jobboldalán megadott összegekre az $n \to \infty$ esetén azért nem alkalmazható a centrális határeloszlástétel, mert nem teljesül a Lindeberg feltétel. Ugyanis abban az esetben, ha a Poisson folyamat nem azonosan nulla a $[0,1]$ intervallumban, aminek pozítiv (nevezetesen $1 - e^{-1}$) a valószínűsége, akkor $\sum\limits_{j=1}^{n} \left[\bar{X}\left(\frac{j}{n},\omega\right) - \bar{X}\left(\frac{j-1}{n},\omega\right)\right]^2 \geq (1 - \frac{1}{n})^2$. Ezért a Lindeberg feltétel nem teljesülhet ebben az esetben.

Ismertetni fogom a Wiener folyamatok jellemzéséről szóló tételnek egy általánosabb martingálokon alapuló jellemzését. Ehhez viszont szükséges megérteni a martingálok önmagában is érdekes elméletének a legfontosabb eredményeit illetve átismételni a martingálok definiciójában fontos szerepet játszó feltételes várható érték fogalmát.