

Markov-láncok és Markov-folyamatok

Tárgyalni fogom a Markov-láncok és Markov-folyamatok elméletét, amely a valószínűségi számítás egyik fontos része. Kissé informálisan a Markov-folyamatokat úgy jellemezhetjük, mint olyan sztochasztikus folyamatokat, amelyek jövőbeli viselkedéséről egy adott időpontig összegyűjtött információt a folyamat viselkedése a megfigyelt időintervallum végpontjában teljes mértékben tartalmazza. Ez azt jelenti, hogy annak feltételes valószínűsége, hogy valamely a folyamat jövőbeli viselkedésétől függő esemény bekövetkezik, feltéve, hogy a Markov-folyamat a jelen időpontban egy adott értéket vesz fel, megegyezik ugyanennek az eseménynek a feltételes valószínűségével, feltéve a folyamat teljes múltbeli viselkedését. Megfogalmazom ezt az állítást pontosabban is. A pontos definícióban megjelenik a a feltételes valószínűség meglehetősen bonyolult, a Radon–Nykodim deriváltak létezésén alapuló általános fogalma. Viszont abban az esetben, amikor a Markov-folyamat csak véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok értéket vesz fel, elegendő a feltételes valószínűség egyszerű, a bevezető valószínűségi számítás előadásban is ismertett fogalmának az ismerete és használata. Az ilyen egyszerűbb Markov-folyamatokat Markov-láncoknak nevezik az irodalomban.

A következő eljárást fogom követni. Megadom a Markov-folyamat definícióját az általános esetben, de részletesen csak a Markov-láncok elméletét fogom tárgyalni, ahol sok érdekes és tanulságos kérdés megjelenik, viszont nincs szükség arra, hogy nehéz mértékelméleti problémákkal foglalkozzunk. Először megadom a Markov-folyamat általános definícióját. Egy Markov-folyamat alkalmas tulajdonságokkal rendelkező, speciális sztochasztikus folyamat, amely egy paramétertől függ, amit időnek fogok nevezni. Külön tárgyalom azt az esetet, amelyben ez a paraméter tartomány (idő) a nem negatív valós számok halmaza, az ilyen Markov-folyamatot folytonos idejű Markov-folyamatnak hívják, és azt az esetet, amikor a paraméter tartomány a pozitív egész számok halmaza. Az ilyen Markov-folyamatokat diszkrét idejű Markov-folyamatnak hívják.

Folytonos idejű Markov-folyamat definíciója. *Legyen adva egy $X(t)$, $t \geq 0$, sztochasztikus folyamat valamely (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mezőn, amely értékeit valamely (E, \mathcal{E}) mérhető téren veszi fel. Azt mondjuk, hogy $X(t)$ (E, \mathcal{E}) -térbeli értékű folytonos idejű Markov-folyamat, ha minden $0 \leq s \leq t < \infty$ számpárra és \mathcal{E} -mérhető $A \in \mathcal{E}$ halmazra teljesül a*

$$P(X_t \in A | \mathcal{B}(X_s)) = P(X_t \in A | \mathcal{B}(X_u, u \leq s))$$

azonosság, ahol $\mathcal{B}(X_s)$ az X_s valószínűségi változó, $\mathcal{B}(X_u, u \leq s)$ pedig az összes X_u , $u \leq s$, valószínűségi változó által generált σ -algebrát jelöli.

Kissé általánosabban, legyen adva egy (E, \mathcal{E}) térbeli értékeket felvevő $X(t)$, $t \geq 0$, sztochasztikus folyamat, valamint σ -algebrák növekvő \mathcal{F}_t , $t \geq 0$, családja egy (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mezőn, azaz legyen $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, ha $s \leq t$, és legyen X_t \mathcal{F}_t -mérhető valószínűségi változó, $t \geq 0$. Teljesüljön ezenkívül a $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}$ reláció minden $t \geq 0$ számra. Az (X_t, \mathcal{F}_t) , $t \geq 0$, rendszer folytonos idejű Markov-folyamat, ha

$$P(X_t \in A | \mathcal{B}(X_s)) = P(X_t \in A | \mathcal{F}_s) \quad \text{minden } 0 \leq s \leq t < \infty \text{ számra,} \\ \text{és } A \in \mathcal{E} \text{ halmazra.}$$

Diszkrét idejű Markov-folyamat definíciója. Legyen adva egy X_n , $n = 0, 1, \dots$, sztochasztikus folyamat valamely (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mezőn, amely értékeit valamely (E, \mathcal{E}) mérhető téren veszi fel. Azt mondjuk, hogy X_n (E, \mathcal{E}) -térteli értékű diszkrét idejű Markov-folyamat, ha minden $0 \leq m \leq n < \infty$ számra és \mathcal{E} -mérhető $A \in \mathcal{E}$ halmazra teljesül a

$$P(X_n \in A | \mathcal{B}(X_m)) = P(X_n \in A | \mathcal{B}(X_k, 0 \leq k \leq m))$$

azonosság, ahol $\mathcal{B}(X_m)$ az X_m valószínűségi változó, $\mathcal{B}(X_k, 0 \leq k \leq m)$ pedig az összes X_k , $0 \leq k \leq m$, valószínűségi változó által generált σ -algebrát jelöli.

Kissé általánosabban tekintsünk egy (E, \mathcal{E}) térbeli értékeket felvevő X_n , $n = 0, 1, \dots$, sztochasztikus folyamatot, és ezenkívül σ -algebrák növekvő \mathcal{F}_n , $n = 0, 1, \dots$, családját egy (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mezőn, azaz legyen $\mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}_n$, ha $m \leq n$, és legyen X_n \mathcal{F}_n -mérhető valószínűségi változó, $n = 1, 2, \dots$. Teljesüljön ezenkívül a $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{A}$ reláció minden $n = 0, 1, \dots$ számra. Az (X_n, \mathcal{F}_n) , $n = 1, 2, \dots$, rendszer diszkrét idejű Markov-folyamat, ha

$$P(X_n \in A | \mathcal{B}(X_m)) = P(X_n \in A | \mathcal{F}_m) \quad \text{minden } 0 \leq m \leq n < \infty \text{ számra,}$$

és $A \in \mathcal{E}$ halmazra.

1. megjegyzés: Az $\mathcal{F}_t = \mathcal{B}(X_u, u \leq t)$ illetve $\mathcal{F}_n = \mathcal{B}(X_k, k \leq n)$ választással tekinthetjük a Markov-folyamatok időben folytonos illetve diszkrét definícióit az általános definíció speciális eseteinek.

2. megjegyzés: A Markov-folyamatok definíciójában szereplő $P(X_t \in A | \mathcal{B}(X_s))$ illetve $P(X_n \in A | \mathcal{B}(X_m))$ feltételes valószínűségek megadhatóak, mint az $X_s = x$ illetve $X_m = x$ feltételek valamint az s és t illetve m és n időpontok és $A \in \mathcal{E}$ halmazok függvényei. A $P(X_t \in A | X_s = x) = P_{s,t}(x, A)$ illetve $P(X_n \in A | X_m = x) = P_{m,n}(x, A)$, $x \in E$, $A \in \mathcal{E}$, $s \leq t$ illetve $m \leq n$ mennyiségeket átmenet valószínűségnek hívják. Ezek szemléletes tartalma a következő: A $P_{s,t}(x, A)$, illetve $P_{m,n}(x, A)$ átmenet valószínűség megadja annak valószínűségét, hogy a Markov-folyamat a t illetve n időpontban az A halmaz valamely pontjába jut, feltéve, hogy az az $s < t$ illetve $m < n$ időpontban az x pontban tartózkodott. A Markov tulajdonság azt jelenti, hogy ha tudom milyen módon jutott a Markov-folyamat az x pontba az s illetve m időpontban, akkor ez a plusz ismeret nem befolyásolja a fenti feltételes valószínűség értékét.

3. megjegyzés: A továbbiakban feltesszük, hogy a Markov-folyamatok $P_{s,t}(x, A)$ vagy $P_{m,n}(x, A)$, $s \leq t$ illetve $m \leq n$ függvényei teljesítik a következő tulajdonságokat.

- a) Rögzített $x \in E$ pontra $P_{s,t}(x, \cdot)$ illetve $P_{m,n}(x, \cdot)$ valószínűségi mérték az (E, \mathcal{E}) téren.
- b) Rögzített $A \in \mathcal{A}$ halmazra $P_{s,t}(\cdot, A)$ illetve $P_{m,n}(\cdot, A)$ mérhető függvény az (E, \mathcal{E}) téren.
- c) $P_{s,s}(x, A) = 1$, ha $x \in A$ és $P_{s,s}(x, A) = 0$, ha $x \notin A$. Hasonlóan, $P_{m,m}(x, A) = 1$, ha $x \in A$ és $P_{m,m}(x, A) = 0$, ha $x \notin A$.

Ezek a tulajdonságok természetesen. Be lehet látni, hogy minden szép tulajdonságú téren definiált Markov-folyamatra (például ez a helyzet, ha (E, \mathcal{E}) teljes szeparábilis metrikus tér a szokásos Borel σ -algebrával) meg lehet adni a feltételes átmenetvalószínűségeket úgy, hogy teljesítsék a fenti tulajdonságokat. Ennek a ténynek a bizonyítását, amely a reguláris feltételes eloszlás létezésének a bizonyításán alapul nem tárgyalom.

Általában úgynevezett stacionárius Markov-folyamatokkal foglalkoznak az irodalomban. Ha nem hangsúlyozzák külön az ellenkezőjét, akkor Markov-folyamaton stacionárius Markov-folyamatot értenek. Mi is így fogunk tenni a továbbiakban. A stacionárius Markov-folyamatok definíciója a következő:

Stacionárius Markov-folyamat definíciója. Egy $X_t, t \geq 0$, (vagy X_t, \mathcal{F}_t) általánosított) folytonos idejű Markov-folyamatot folytonos idejű stacionárius Markov-folyamatnak nevezünk, ha a folyamat átmenetvalószínűségei teljesítik a $P_{s,t}(x, A) = P_{t-s}(x, A)$ azonosságot, minden $0 \leq s \leq t$ számpárra, azaz a $P_{s,t}(x, A)$ átmenetvalószínűség csak az s és t időpont között eltelt időtől függ.

Egy $X_n, n = 0, 1, \dots$, (vagy X_n, \mathcal{F}_n) általánosított) diszkrét idejű Markov-folyamatot diszkrét idejű stacionárius Markov-folyamatnak nevezünk, ha az átmenetvalószínűségei teljesítik a $P_{m,n}(x, A) = P_{n-m}(x, A)$ azonosságot minden $0 \leq m \leq n$ számpárra, azaz a $P_{m,n}(x, A)$ átmenetvalószínűség csak az m és n időpont között eltelt időtől függ.

Stacionárius Markov-folyamatok átmenetvalószínűségeinek definíciója. Egy értékeit valamely (E, \mathcal{E}) mérhető téren felvevő $X_t, t \geq 0$, folytonos idejű stacionárius Markov-folyamat átmenetvalószínűségén a

$$P(t, x, A) = P(X_{u+t} \in A | X_u = x) = P_{u, u+t}(x, A), \quad t \geq 0, \quad x \in E, \quad A \in \mathcal{A},$$

feltételes valószínűségek rendszerét értjük, amely a stacionárius tulajdonság miatt nem függ az $u \geq 0$ paramétertől.

Hasonlóképpen egy értékeit valamely (E, \mathcal{E}) mérhető téren felvevő $X_n, n = 0, 1, \dots$, diszkrét idejű stacionárius Markov-folyamat átmenetvalószínűségén a

$$P(n, x, A) = P(X_{n+m} \in A | X_m = x) = P_{m, n+m}(x, A), \quad n = 0, 1, \dots, \quad x \in E, \quad A \in \mathcal{A},$$

feltételes valószínűségek rendszerét értjük, amely a stacionárius tulajdonság miatt nem függ az $m = 1, 2, \dots$ paramétertől.

Megjegyzés: A stacionárius Markov-folyamatokra az előbb bevezetett $P(t, x, A)$ és $P(n, x, A)$, $x \in E$, $A \in \mathcal{E}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, átmenetvalószínűségek teljesítik a következő Chapman–Kolmogorov egyenletnek nevezett azonosságokat:

$$P(s + t, x, A) = \int P(t, y, A) P(s, x, dy) \quad \text{ha } s \geq 0 \text{ és } t \geq 0. \quad (1)$$

és

$$P(m + n, x, A) = \int P(n, y, A) P(m, x, dy) \quad \text{minden } m = 0, 1, \dots \\ \text{és } n = 0, 1, \dots \text{ számra.} \quad (2)$$

Ezenkívül a $P(t, x, A)$ illetve $P(n, x, A)$ átmenetvalószínűségek teljesítik az alábbi tulajdonságokat: Minden rögzített t illetve n időpontra és $x \in E$ pontra $P(t, x, \cdot)$ illetve $P(n, x, \cdot)$ valószínűségi mérték. Minden t illetve n időpontra és $A \in \mathcal{E}$ halmazra $P(t, \cdot, A)$ illetve $P(n, \cdot, A)$ mérhető függvények az (E, \mathcal{E}) téren. Továbbá mind a folytonos mind a diszkrét idejű Markov-folyamatok esetén teljesül a $P(0, x, A) = 1$, ha $x \in A$ és $P(0, x, A) = 0$, ha $x \notin A$ reláció. A felsorolt tulajdonságok jellemzik is a stacionárius Markov-folyamatokat, azaz minden (értékeit szép topológiai tulajdonságokkal rendelkező téren, (például teljes szeparábilis metrikus téren) felvevő stacionárius Markov-folyamathoz meg lehet adni a feltételes eloszlásokat a fenti tulajdonságokkal rendelkező átmenetvalószínűségekkel.

Valójában érvényes a Chapman–Kolmogorov egyenlet következő általánosabb alakja is nem feltétlenül stacionárius folyamatokra:

$$P_{s,t}(x, A) = \int P_{u,t}(y, A) P_{s,u}(x, dy) \quad \text{ha } 0 \leq s \leq u \leq t. \quad (1')$$

és

$$P_{m,n}(x, A) = \int P_{l,n}(y, A) P_{m,l}(x, dy) \quad \text{minden } 0 \leq m \leq l \leq n, \text{ egész számhármásra.} \quad (2')$$

A fent megfogalmazott, az irodalomban Chapman–Kolmogorov egyenletnek nevezett (1) illetve (2) azonosságok (és azok (1') illetve (2') általánosításai) nagyon természetes állítások. A Chapman–Kolmogorov egyenlet tekinthető a Markov-folyamatok elméletében a legfontosabb azonosságnak. Ennek precíz bizonyításához szükség van arra, hogy általános (Radon–Nykodim deriváltak segítségével definiált) feltételes valószínűségekkel számoljunk, illetve fel kell használni azt a tényt, hogy az átmenetvalószínűségek teljesítik a (2) képlet után megfogalmazott tulajdonságokat. Mivel az ilyen technikai részletek tárgyalását minimálisra kívánom szorítani, ezért ezt a számolást csak a kiegészítésben ismertetem. A számunkra legfontosabb esetben, amikor Markov-láncokat tekintünk, elvégzem ezt a lényegesen egyszerűbb számolást az előadás fő részében.

Legyen adva egy diszkrét idejű Markov-folyamat, amely értékeit valamely (E, \mathcal{E}) téren veszi fel. A (2) reláció szerint a Markov-folyamat $P(x, A)$ átmenetvalószínűségei teljesítik a

$$P(n+1, x, A) = \int P(1, y, A) P(n, x, dy) \quad \text{minden } n = 0, 1, \dots \text{ számra.} \quad (3)$$

azonosságot. Ez azt jelenti, hogy ha megadjuk a $P(1, x, A)$ átmenetvalószínűségeket, akkor n szerinti indukcióval ki tudjuk számolni a $P(n, x, A)$ átmenetvalószínűségeket minden $n = 0, 1, \dots$ számra.

Be lehet látni, hogy igaz a következő állítás. Ha $P(x, A)$, $x \in E$, $A \in \mathcal{E}$, olyan függvényrendszer egy (E, \mathcal{E}) mérhető téren, amely minden rögzített $x \in E$ pontra valószínűségi mérték és minden $A \in \mathcal{A}$ halmazra mérhető függvény az (E, \mathcal{E}) téren, akkor

a következő definícióval egy diszkrét idejű Markov-folyamat átmenetvalószínűségeit definiáljuk, amelyek teljesítik a (2) Chapman–Kolmogorov egyenletet.

Legyen $P(0, x, A) = 1$, ha $x \in A$ és $P(0, x, A) = 0$, ha $x \notin A$, $P(1, x, A) = P(x, A)$, és $n \geq 2$ indexekre definiáljuk a $P(n, x, A)$ n -lépéses átmenetvalószínűségeket n szerinti indukcióval. A fenti inkább technikai jellegű, számunkra inkább elvi jelentőségű állítás bizonyítását elhagyom.

A Markov-folyamatok tulajdonságairól szóló állítások összefoglalása. Legyen adva egy (X_t, \mathcal{F}_t) $t \geq 0$, folytonos vagy egy (X_n, \mathcal{F}_n) , $n = 0, 1, 2, \dots$, diszkrét idejű Markov-folyamat. (Feltesszük, hogy ez a Markov-folyamat egy szép topológiai tulajdonságokkal rendelkező téren veszi fel az értékeit.) Ekkor ennek a Markov-folyamatnak léteznek olyan $P_{s,t}(x, A)$ illetve $P_{m,n}(x, A)$ átmenetvalószínűségei, amelyek teljesítik a 3. megjegyzésben megfogalmazott a), b) és c) tulajdonságokat valamint az (1') illetve (2') formulában megfogalmazott Chapman–Kolmogorov egyenlőséget is.

Igaz a fenti állítás következő itt nem bizonyított megfordítása is. Legyen adva $P_{s,t}(x, A)$, $0 \leq s \leq t$ vagy $P_{m,n}(x, A)$, $0 \leq m \leq n$ függvényeknek egy olyan rendszere, amely teljesíti a 3. megjegyzésben megfogalmazott a), b) és c) tulajdonságokat és az (1') illetve (2') formulában megfogalmazott Chapman–Kolmogorov egyenlőséget. Ez úgy értendő, hogy adva van egy (E, \mathcal{E}) tér, ahol \mathcal{E} egy az E téren definiált σ -algebra, és a $P_{s,t}(x, A)$ illetve $P_{m,n}(x, A)$ függvények minden $x \in E$ pontra $A \in \mathcal{E}$ halmazra és $0 \leq s \leq t$ valós, illetve $0 \leq m \leq n$ egész számokra definiálva vannak. Ekkor létezik olyan X_t , $t \geq 0$ folytonos, illetve olyan X_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ diszkrét idejű, értékeit az (E, \mathcal{E}) térben felvevő Markov-folyamat, amelynek a $P_{s,t}(x, A)$ illetve a $P_{m,n}(x, A)$ függvények az átmenetvalószínűségei. Sőt, a 0 időpontbeli X_0 valószínűségi változó eloszlását tetszőleges módon előírhatjuk.

A következő definícióban bizonyos az irodalomban elterjedt szóhasználatot vezetünk be.

Markov-láncok definíciója. Ha egy (folytonos vagy diszkrét idejű Markov-folyamat egy (E, \mathcal{E}) mérhető téren veszi fel az értékeit, akkor ezt az (E, \mathcal{E}) teret a Markov-folyamat állapotterének hívjuk. Egy olyan Markov folyamatot, amelynek állapottere egy véges vagy megszámlálható számosságú halmaz (a diszkrét topológiával) Markov-láncnak nevezzük.

Feladat: Ha (X_0, X_1, \dots) olyan a természetes számokkal indexelt sztochasztikus folyamat egy megszámlálható számosságú (E, \mathcal{E}) állapotterén, amely teljesíti az

$$P(X_{n+1} = E_{j_{n+1}} | X_n = E_{j_n}, \dots, X_0 = E_{j_0}) = P(X_{n+1} = E_{j_{n+1}} | X_n = E_{j_n})$$

$$P(X_1 = E_{j_1} | X_0 = E_{j_0})$$

azonosságot, akkor (X_0, X_1, \dots) (stacionárius) Markov-lánc, amelynek egy lépéses átmenetvalószínűségeit a $P(j, k) = P(X_1 = E_j | X_0 = E_k)$ képlet adja meg.

(A feladat tartalma mindössze annyi, hogy a feltételes valószínűségekre a Markov-folyamatok definíciójában kirótt feltétel az adott esetben ezt az azonosságot jelenti.)

A továbbiakban (stacionárius) Markov-láncokkal fogunk foglalkozni, azokon belül is elsősorban diszkrét idejű Markov-láncokkal. A következő jelölést fogom használni. Jelölje az állapotokat E_1, E_2, \dots , és legyen $P(n, j, k) = P(X_{n+m} = E_k | X_n = E_j)$, $m = 1, 2, \dots$, $n = 0, 1, 2, \dots$ azaz $P(n, j, k)$ annak feltételes valószínűsége, hogy a Markov-lánc az $n + m$ időpontban az E_k állapotba jut, feltéve, hogy az n időpontban az E_j állapotban volt. Használjuk továbbá a $P(j, k) = P(1, j, k)$ jelölést, azaz az 1-lépéses $P(1, j, k)$ átmenetvalószínűségeket hagyjuk el az 1 koordinátát. Felírom a Chapman–Kolmogorov egyenlőséget Markov-láncokra a fent bevezetett jelöléssel.

$$P(n + m, j, k) = \sum_l P(n, j, l)P(m, l, k) \quad (4)$$

ahol az összegzés végigfut az összes olyan l indexen, amelyre az E_l állapot létezik. Jelöléseink szerint vagy létezik egy olyan N pozitív egész szám, hogy E_1, \dots, E_N az összes lehetséges állapotok halmaza, és ekkor $1 \leq l \leq N$ az összegzés a (4) formulában, vagy megszámlálható sok E_1, E_2, \dots a lehetséges állapotok halmaza, és ekkor az összegezés $1 \leq l < \infty$ indexelésre történik.

Lemma. *Egy diszkrét idejű stacionárius Markov-lánc teljesíti a (4) formulában megfogalmazott Chapman–Kolmogorov egyenlőséget.*

A lemma bizonyítása.

$$\begin{aligned} P(n + m, j, k) &= P(X_{n+m} = E_k | X_0 = E_j) \\ &= \sum_l P(X_{n+m} = E_k, X_n = E_l | X_0 = E_j) \\ &= \sum_l P(X_{n+m} = E_k, | X_n = E_l, X_0 = E_j) P(X_n = E_l | X_0 = E_j) \\ &= \sum_l P(X_{n+m} = E_k, | X_n = E_l) P(X_n = E_l | X_0 = E_j) \\ &= \sum_l P(m, l, k) P(n, j, l). \end{aligned}$$

(E számolásban felhasználtuk a Markov tulajdonságból következő

$$P(X_{n+m} = E_k | X_n = E_l, X_0 = E_j) = P(X_{n+m} = E_k | X_n = E_l)$$

azonosságot.)

Feladat: Bizonyítsuk be a Chapman–Kolmogorov egyenlőséget diszkrét idejű nem feltétlenül stacionárius Markov-láncokra. Részletesebben megfogalmazva legyenek egy E_1, E_2, \dots állapotokkal rendelkező diszkrét idejű X_0, X_1, \dots Markov-lánc átmenetvalószínűségei $P_{m,n}(j, k) = P(X_n = E_k | X_m = E_j)$, $n \geq m \geq 0$, $j, k = 0, 1, \dots$. Minden $m \leq r \leq n$ időpontra igaz a következő azonosság:

$$P_{m,n}(j, k) = \sum_l P_{m,r}(j, l) P_{r,n}(l, k).$$

Ha adva van egy (véges sok), N állapotot felvevő Markov-lánc, akkor ennek 1-lépéses átmenetvalószínűségeinek rendszerén a $P(j, k)$, $1 \leq j, k \leq N$, 1 lépéses átmenetvalószínűségeinek összességét, n -lépéses átmenetvalószínűségeinek rendszerén, $n = 1, 2, \dots$, pedig a $P(n, j, k)$ valószínűségeinek összességét értjük. Természetes módon hozzárendelhetjük egy ilyen véges sok, N állapotot felvevő Markov-lánc átmenetvalószínűségeinek $P(j, k)$ rendszeréhez azt az $N \times N$ méretű négyzetes Π mátrixot, amelynek j -ik sorának és k -ik oszlopának a metszetében a $P(j, k)$ szám áll. Hasonlóan feleltessük meg egy ilyen mátrix n lépéses átmenet valószínűségei $P(n, j, k)$ rendszerének azt a Π_n mátrixot, amelynek j -ik sorának és l -ik oszlopának a metszetében a $P(n, j, k)$ szám áll. Érdekes bevezetni a sztochasztikus mátrix fogalmát, amely leírja az ily módon létrejövő mátrixokat.

Sztochasztikus mátrixok definíciója. Egy $N \times N$ méretű $(P(j, k))$, $1 \leq j, k \leq N$, mátrixot sztochasztikus mátrixnak nevezünk, ha $P(j, k) \geq 0$, $1 \leq j, k \leq N$, a mátrix minden elemére, és $\sum_{k=1}^N P(j, k) = 1$, $1 \leq j \leq N$, azaz a mátrix minden sorösszege eggyel egyenlő.

A következő egyszerű észrevétel nagyon hasznos véges állapotterű Markov-lánccok vizsgálatában.

Fontos észrevétel. A fent ismertetett megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít véges állapotterű Markov-lánccok 1-lépéses átmenetvalószínűségeinek rendszere és a sztochasztikus mátrixok között. Továbbá, a Markov-lánccokról szóló (4) formulában megfogalmazott Chapman–Kolmogorov azonosságából következik, hogy ha egy mátrix 1-lépéses átmenetvalószínűségeinek rendszeréhez hozzárendelt mátrix Π , és az n -lépéses átmenetvalószínűségeinek rendszeréhez hozzárendelt mátrix Π_n , akkor $\Pi_n = \Pi^n$, ahol Π^n a Π mátrix n -ik hatványát jelöli a szokásos mátrix szorzás értelmében.

A ‘Fontos észrevétel’ lehetővé teszi, hogy mátrix elméleti eredmények segítségével fontos eredményeket állapítsunk meg véges állapotterű Markov-lánccok viselkedéséről. Ezt a módszert csak később fogom tárgyalni. A továbbiakban elsősorban a mind véges mind végtelen állapotterű (stacionárius) Markov-lánccok viselkedéséről szóló alapvető eredmények ismertetésére fogok koncentrálni.

Mutatok néhány példát Markov-lánccokra és folyamatokra.

Néhány érdekes Markov-folyamat és Markov-lánc definíciója.

1.) Tekintsünk egy véletlen bolyongást a d -dimenziós rácson, azaz a

$$Z = \{(j_1, \dots, j_d) : -\infty < j_s < \infty, j_s \text{ egész szám}, 1 \leq s \leq d\}$$

halmazon. Ezt úgy definiáljuk, hogy ha a bolyongást végző részecske az n -ik időpontban a Z rács valamelyik pontjában tartózkodik, akkor a múltbeli viselkedéstől függetlenül egyforma, azaz $\frac{1}{2d}$ valószínűséggel átugrik valamelyik szomszédos rácpontba. Azaz, ha S_n -nel jelöljük a részecske tartózkodási helyét az n időpontban,

akkor az $S_n - S_{n-1}$ valószínűségi változók, $n = 1, 2, \dots$, függetlenek, és $P(S_n - S_{n-1} = e_j) = P(S_n - S_{n-1} = -e_j) = \frac{1}{2d}$ minden $n = 1, 2, \dots$, $1 \leq j \leq d$ számra, ahol e_j jelöli azt a vektort, amelynek j -ik koordinátája 1, és az összes többi koordinátája nulla. A definíció teljessége érdekében még definiálnunk kell az S_0 mennyiséget is. Legyen $P(S_0 = x) = 1$, ahol $x \in Z$ a d -dimenziós tér valamely rögzített rácspontja.

- 2.) *Véletlen bolyongás a nem negatív egész számokon, a 0-val, mint elnyelő fallal.* Az előző példához hasonló modell a $d = 1$ esetben, amely bolyongást valamely $x \geq 0$ pontban indítunk el, azzal a különbséggel, hogy amennyiben a bolyongás elér a nullába, akkor örökre ottmarad. Ez képletekben azt jelenti, hogy az átmenetvalószínűségek a $P(j, j + 1) = P(j, j - 1) = \frac{1}{2}$, ha $j \geq 1$, és $P(0, 0) = 1$ képletekkel adhatóak meg.
- 3.) *Véletlen bolyongás a nem negatív egész számokon, a 0-val, mint visszaverő fallal.* Az előző példához hasonló modell azzal a különbséggel, hogy amennyiben a bolyongás elér a nullába, akkor onnan visszaverődik. Ez képletekben azt jelenti, hogy az átmenetvalószínűségek a $P(j, j + 1) = P(j, j - 1) = \frac{1}{2}$, ha $j \geq 1$, és $P(0, 1) = 1$ képletekkel adhatóak meg.
- 4.) *Véletlen bolyongás a modulo n csoporton.* Legyen a Markov-lánc állapottere az $\{1, \dots, n\}$ halmaz, valamely $n \geq 2$ pozitív egész számmal. Legyenek a Markov-lánc átmenetvalószínűségei $P(i, i + 1) = P(i, i - 1) = \frac{1}{2}$, ahol az összeadás és kivonás modulo n értendő.
- 5.) *A diffúzió Ehrenfest modellje.* Ez véges állapotterű Markov-lánc. E Markov-lánc függ egy N paramétertől, amely pozitív egész szám. Ha ez a paraméter N , akkor a modellben $N + 1$ állapot van, E_0, E_1, \dots, E_N , és az átmenetvalószínűségek $P(k, k - 1) = \frac{k}{N}$, $P(k, k + 1) = \frac{N - k}{N}$, ha $1 \leq k \leq N$, és $P(0, 1) = 1$, $P(N, N - 1) = 0$. E képletek szemléletes tartalma a következő: Legyen N részecske, amelyek mindegyike két urna valamelyikében van, és jelölje E_k azt az eseményt, hogy az első urnában k részecske, a második urnában $N - k$ részecske van. Minden egyes időpontban, kiválasztunk véletlenül egy részecskét, mindegyik részecskét egyforma valószínűséggel, és azt áthelyezzük a másik urnába. Ekkor, ha az első urnában k golyó van, akkor $P(k, k - 1) = \frac{k}{N}$ annak a valószínűsége, hogy az áthelyezendő részecskét az első urnából választottuk, ezért az első urnában levő részecskék száma eggyel csökken, és $P(k, k + 1) = \frac{N - k}{N}$, annak a valószínűsége, hogy az áthelyezendő részecskét a második urnából választottuk, ezért az első urnában levő részecskék száma eggyel nő.
- 6.) *Modell egy szerkezet élettartamára.* Legyen adva egy Markov-lánc a végtelen E_1, E_2, \dots állapotterén, amelynek átmenetvalószínűségeit valamely p_1, p_2, \dots , $0 \leq p_k \leq 1$, és $q_k = 1 - p_k$, $k = 1, 2, \dots$, számsorozat segítségével határozzuk meg a következő módon: $P(k, k + 1) = p_k$, $P(k, 1) = q_k$, $k = 1, 2, \dots$. E modell szemléletes tartalma a következő: Legyen adva egy szerkezet, amelyet minden időpontban, ha nem romlik el, akkor tovább használunk, és életkora egy egységgel nő. Ha

elromlik, akkor kicseréljük egy új szerkezetre, amelynek életkora 1. Jelölje X_n azt a valószínűségi változót, amely megadja azt, hogy mennyi az n időpontban használt szerkezet életkora.

A következő példa az 1. példában szereplő bolyongás természetes általánosítása.

- 7.) Legyen X_1, X_2, \dots , független egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata, amelyek értékeit valamely E lineáris térben veszik fel. Tegyük fel továbbá, hogy ezek az X_1, X_2, \dots , valószínűségi változók egy megszámlálható, $T = \{t_1, t_2, \dots\}$, halmazon veszik fel az értékeit, azaz $P(X_1 \notin T) = 0$. Definiáljuk az $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$, $n = 1, 2, \dots$, részletösszegeket, és az $S \subset E$ (megszámlálható) halmazt melynek elemei azok az $s \in E$ elemek, amelyek előállíthatóak $s = \sum_{j=1}^k t_j$, $k = 1, 2, \dots$, $t_j \in T$, $1 \leq j \leq k$, alakban. Ekkor S_1, S_2, \dots , Markov-lánc az S állapottéren, amelynek átmenetvalószínűségeit a $P(S_{n+1} = \bar{s} | S_n = s) = P(X_1 = \bar{s} - s)$, $s, \bar{s} \in S$, képlet adja meg. Ugyancsak Markov-láncot alkotnak ugyanezen a téren és ugyanezekkel az átmenetvalószínűségekkal az $\bar{S}_n = S_n + t_j$, $n = 1, 2, \dots$, sorozatok is, ahol $t_j \in T$ tetszőleges szám.

Valóban,

$$\begin{aligned} P(S_{n+1} = s_{n+1} | S_n = s_n, \dots, S_1 = s_1) &= \frac{P(S_{n+1} = s_{n+1}, S_n = s_n, \dots, S_1 = s_1)}{P(S_n = s_n, \dots, S_1 = s_1)} \\ &= \frac{P(X_{n+1} = s_{n+1} - s_n, X_n = s_n - s_{n-1}, \dots, X_1 = s_1)}{P(X_n = s_n - s_{n-1}, \dots, X_1 = s_1)} \\ &= P(X_{n+1} = s_{n+1} - s_n) = P(X_1 = s_{n+1} - s_n). \end{aligned}$$

Érvényes a 7.) példa alábbi természetes általánosítása tetszőleges (nem feltétlenül megszámlálható sok értéket felvevő) valószínűségi változók részletösszegeire. Az általánosítás bizonyítása annyiban nehezebb, hogy abban általános értelemben vett feltételes valószínűségekkal kell számolni.

- 8.) Legyenek X_1, X_2, \dots , független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, amelyek értékeit valamely (E, \mathcal{E}) lineáris térben veszik fel. Ekkor az $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$, $j = 1, 2, \dots$, részletösszegek (stacionárius) Markov-folyamatot alkotnak az (E, \mathcal{E}) téren, amelynek 1 lépéses átmenetvalószínűségeit a $P(1, x, A) = P(S_{n+1} \in A | S_n = x) = P(X_1 \in A - x)$ képlet adja meg.

Nem kötelező feladat. Bizonyítsuk be, hogy a 8. példa állítása valóban igaz.

Külön feladatban megfogalmazom azt a feltételes eloszlásokról szóló állítást, amely az előző feladat megoldásának a lényege.

Feladat: Legyenek X_1, \dots, X_k, Y független valószínűségi változók, amelyek értékeit valamely (E, \mathcal{E}) téren vesszük fel, $f(x_1, \dots, x_{k+1})$ egy k -változós mérhető (korlátos) függvény az (E, \mathcal{E}) téren. Ekkor

$$E(f(X_1, \dots, X_k, Y) | X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k) = Ef(x_1, \dots, x_k, Y).$$

Vegyük észre, hogy az előző feladat eredményéből, (amely egyébként tekinthető a Fubini tétel egy verziójának) következik a 2. példa állítása. Valóban, ezt felhasználva meg lehet mutatni, hogy

$$\begin{aligned} P(S_{n+1} \in A | S_1 = x_1, S_2 = x_2, \dots, S_n = x_n) \\ &= P(X_1 + \dots + X_n + Y \in A | X_1 = x_1, X_2 = x_2 - x_1, \dots, X_n = x_n - x_{n-1}) \\ &= P(x_1 + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1}) + Y \in A) = P(X_1 \in A - x_n) \end{aligned}$$

ahol, X_1, \dots, X_n, Y független egyforma eloszlású valószínűségi változók, melyek értékeit valamely (E, \mathcal{E}) lineáris térben vesszük fel.

- 9.) Végül mutatok példát valószínűségi változók egy olyan sorozatára, amely nem alkot Markov-láncot. Legyen adva egy urna és benne mondjuk 5 piros és 3 fehér golyó. Kihúzzunk az urnából egy golyót véletlenszerűen, majd dobjuk vissza azt az urnába egy ugyanolyan színű golyóval együtt. Folytassuk ezt a procedurát a végtelenségig, és definiáljuk az X_1, X_2, \dots valószínűségi változókat úgy, hogy $X_n = 1$, ha a n -ik húzáskor kihúzott golyó színe piros, és $X_n = 0$, ha az n -ik húzáskor kihúzott golyó színe fehér. Ekkor nyilvánvalóan $P(X_n = 1 | X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_{n-1} = 1) > P(X_n = 1 | X_{n-1} = 1)$, mert ha minden eddigi húzás eredménye piros színű golyó volt, akkor az urnában levő piros golyók számát növeltük, ezért nagyobb annak a valószínűsége, hogy a következő húzásban is piros golyót húzunk.

Kiegészítés.

Megfogalmazok és bebizonyítok egy lemmát, amelynek fő mondanivalója az a (B) azonosság, amely szerint egy stacionárius Markov-folyamat teljesíti a Chapman–Kolmogorov egyenlőséget. Valójában ez egy általánosabb változata a Chapman–Kolmogorov egyenlőségnek, amely nem feltétlenül stacionárius Markov folyamatokra is érvényes.

Stacionárius Markov-folyamatok esetében $P_{s,t}(x, A) = P_{t-s}(x, A)$, $P_{u,t}(y, A) = P_{t-u}(y, A)$, $P_{s,u}(x, dy) = P_{u-s}(x, dy)$, és a (B) reláció megegyezik a Chapman–Kolmogorov egyenlőséggel.

Lemma. *Legyen (X_t, \mathcal{F}_t) , $t \geq 0$, Markov-folyamat valamely (E, \mathcal{E}) mérhető téren valamely $P_{s,t}(x, A)$ a 3. megjegyzésben szereplő a) b) és c) tulajdonságot teljesítő átmenetvalószínűségekkel. Legyen $f(y)$, korlátos, mérhető függvény az (E, \mathcal{E}) téren. Ekkor*

$$E(f(X_u) | X_s = x) = \int f(y) P_{s,u}(x, dy) \quad \text{ha } u \geq s \quad (\text{A})$$

és

$$P_{s,t}(x, A) = \int P_{u,t}(y, A)P_{s,u}(x, dy) \quad \text{ha } s \leq u \leq t \quad (\text{B})$$

Bizonyítás: Ha az f függvény egy A halmaz indikátor függvénye, akkor könnyen látható, hogy az (A) formula érvényes. Mivel a kifejezés mindkét oldala az f függvény lineáris függvénye, ezért az azonosság érvényes halmazok indikátor függvényeinek lineáris kombinációira is. Ezután ilyen függvényekkel végrehajtott közelítések segítségével kapjuk, hogy az (A) reláció tetszőleges f függvényre érvényes. Az (A) formula szemléletesen azt mondja ki, hogy feltételes várható értéket úgy számolhatunk ki feltételes eloszlásfüggvények segítségével, mint várható értéket eloszlásfüggvények segítségével.

A (B) formula bizonyításában felhasználhatjuk, hogy a Markov tulajdonság és a feltételes várható érték tulajdonságai miatt

$$\begin{aligned} P_{s,t}(x, A) &= P(X_t \in A | X_s = x) = E(E(I_{\{X_t \in A\}} | X_s, X_u) | X_s = x) \\ &= E(E(I_{\{X_t \in A\}} | X_u) | X_s = x) = E(E(f(X_u) | X_s = x)), \end{aligned}$$

ahol I_A egy A halmaz indikátorfüggvényét jelöli. Az utolsó lépésben használtuk ki a Markov tulajdonságot, amely szerint $E(I_{\{X_t \in A\}} | X_s, X_u) = E(I_{\{X_t \in A\}} | X_u)$, ha $u \geq s$.

Vezessük be az $f(y) = P(X_t \in A | X_u = y) = P_{u,t}(A, y)$ függvényt. Az előző azonosság és az A) reláció alapján

$$P_{s,t}(x, A) = E(E(f(X_u) | X_s = x)) = \int P_{u,t}(A, y)P_{s,u}(dy, x),$$

amint állítottuk.

Kimondom e tétel diszkrét idejű megfelelőjét, amelyet hasonlóan bizonyíthatunk.

Lemma. Legyen (X_n, \mathcal{F}_n) , $n = 0, 1, \dots$, Markov-folyamat valamely (E, \mathcal{E}) mérhető téren valamely $P_{m,n}(x, A)$ a 3. megjegyzésben szereplő a) b) és c) tulajdonságot teljesítő átmenetvalószínűségekkel. Legyen $f(y)$, korlátos, mérhető függvény az (E, \mathcal{E}) téren. Ekkor

$$E(f(X_n) | X_m = x) = \int f(y)P_{m,n}(x, dy) \quad \text{ha } n \geq m \quad (\text{A}')$$

és

$$P_{m,n}(x, A) = \int P_{k,n}(y, A)P_{m,k}(x, dy) \quad \text{ha } m \leq k \leq n. \quad (\text{B}')$$

Bizonyítás nélkül közlöm a következő eredményt.

Tétel. Legyen adva egy a 3. megjegyzésben felsorolt a), b) és c) tulajdonságokat teljesítő $P_{s,t}(x, A)$ illetve $P_{m,n}(x, A)$ függvény amely teljesíti az (e) illetve (e') tulajdonságot is. Legyen továbbá adva valamely P_0 valószínűségi mérték az (E, \mathcal{E}) téren. Ekkor létezik olyan időben folytonos Markov-folyamat, amelyre $P(X_0 \in A) = P_0(A)$ és $P(X_t \in A | X_s = x) = P_{s,t}(x, A)$, $x \in E$, $A \in \mathcal{E}$, $m \leq n$ választással. Létezik olyan időben diszkrét Markov-folyamat, amelyre $P(X_0 \in A) = P_0(A)$, és $P(X_n \in A | X_m = x) = P_{s,t}(x, A)$ minden $x \in E$, $A \in \mathcal{E}$, $0 \leq m \leq n$ választással.