**Az április 18.-i gyakorlat feladatai**

Felidézem a következő fontos fogalmat:

**A standard normális eloszlás definiciója.** *A $\Phi(x)$ standard normális eloszlás az az eloszlás, amelynek sűrűségfüggvénye a $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$, $-\infty < u < \infty$, függvény.*

E definició helyességének igazolásához meg kell mutatni, hogy a fent definiált $\varphi(\cdot)$ függvény valóban sűrűségfüggvény. Ennek érdekében be kell bizonyítani a következő eredményt.

**Tétel.**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\, du = 1.$$

Ennek a korántsem triviális összefüggésnek a bizonyítása az előadáson szerepelt. A standard normális eloszlás elnevezésben a standard jelző arra utal, hogy egy $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$, $-\infty < u < \infty$, sűrűségfüggvényű valószínűségi változó várható értéke nulla és szórásnégyzete 1.

1.) Lássuk be, hogy egy $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$, $-\infty < u < \infty$, sűrűségfüggvényű $\xi$ valószínűségi változó várható értéke nulla és szórásnégyzete 1.

*Megoldás:* Valóban $E\xi = 0$, mert $E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\, du$, és ez az integrál nulla, mert az integrandus páratlan függvény. Ezután parciális integrálással kapjuk $f(x) = x$ és $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-x^2/2} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\right)$ választással, hogy

$$E\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-x^2/2}\, dx = \left[-\frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx = 1.$$

Innen $\operatorname{Var}\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = 1$.

*Házi feladat:*

Ha $\xi$ standard normális eloszlású valószínűségi változó, $m$, $\sigma$ valós számok, akkor az $\sigma\xi + m$ valószínűségi változó várható értéke $m$ szórásnégyzete $\sigma^2$, sűrűségfüggvénye pedig $g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}|\sigma|} e^{-(u-m)^2/2\sigma^2}$.

A fenti feladat eredménye alapján egy valószínűségi változót akkor nevezünk normális eloszlásúnak, ha van sűrűségfüggvénye, és az $g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(u-m)^2/2\sigma^2}$ alakban adható meg alkalmas $m$ és $\sigma > 0$ számokkal.

2.) Ha $\xi$ standard normális eloszlású valószínűségi változó, akkor$E\xi^{2k-1} = 0$, $E\xi^{2k} = 1 \cdot 3 \cdots (2k-1)$ minden $k = 1, 2, \dots$ számra.

*Megoldás:* Egyrészt

$$E\xi^{2k-1} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx = 0,$$

mert az $x^{2k-1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ függvény páratlan, és páratlan függvény integrálja nulla. Másrészt

$$\begin{aligned} E\xi^{2k} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} -x^{2k-1} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx\right) \\ &= \left[-x^{2k-1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} (2k-1)x^{2k-2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\, dx \\ &= (2k-1)\int_{-\infty}^{\infty} x^{2k-2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\, dx = (2k-1)E\xi^{2k-2}, \end{aligned}$$

ahonnan $k$ szerinti teljes indukcióval $E\xi^{2k} = 1\cdot 3\cdots(2k-1)$ minden $k = 1, 2, \ldots$ számra.

Tárgyaljuk a Poisson eloszlást, illetve mutassuk meg egy feladatban annak egy fontos tulajdonságát, nevezetesen azt, hogy két független Poisson eloszlású valószínűségi változó összege is Poisson eloszlású.

**Poisson eloszlás definiciója.** *Egy $\xi$ valószínűségi változó $\lambda$ paraméterű Poisson eloszlású, ha $\xi$ nem negatív egész értékeket vesz fel, és*

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

3.) Lássuk be, hogy ez valóban valószínűség eloszlás.
*Megoldás:* Azt kell ellenőrizni, hogy $P(\xi = k) \geq 0$ minden $k$ értékre, ami nyílvánvaló, és $\sum\limits_{k=0}^{\infty} P(\xi = k) = 1$. Viszont

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(\xi = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1.$$

4.) Ha $\xi$ és $\eta$ két független, $\lambda$ illetve $\mu$ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó, akkor $\xi + \eta$ egy $\lambda + \mu$ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó.
*Megoldás:*

$$\begin{aligned} P(\xi + \eta = k) &= \sum_{j=0}^{k} P(\xi = j, \eta = k - j) = \sum_{j=0}^{k} P(\xi = j)P(\eta = k - j) \\ &= \sum_{j=0}^{k} \frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}\frac{\mu^{k-j}}{(k-j)!}e^{-\mu} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}\sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{j!(k-j)!}\lambda^j\mu^{(k-j)} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}(\lambda+\mu)^k. \end{aligned}$$