Az április 4.-i gyakorlat feladatai

1.) Legyen adva egy ξ valószínűségi változó $F(x)$ eloszlás, $f(x)$ sűrűségfüggvénnyel, M várható értékkel és D^2 szórásnégyzettel. Legyenek a és b valós számok. Számoljuk ki az $\eta = a\xi + b$ valószínűségi változó eloszlás és sűrűségfüggvényét, valamint várható értékét és szórásnégyzetét.

Megoldás: Az η valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $G(x) = P(\eta < x) = P(a\xi + b < x) = P\left(\xi < \frac{x-b}{a}\right) = F\left(\frac{x-b}{a}\right)$, sűrűségfüggvénye $g(x) = \frac{dG(x)}{dx} = \frac{1}{a}f\left(\frac{x-b}{a}\right)$, várható értéke $E\eta = E(a\xi+b) = aE\xi+b = aM+b$, $\operatorname{Var}\eta = \operatorname{Var}(a\xi+b) = a^2\operatorname{Var}\xi$.

2.) Az előző gyakorlaton tárgyaltuk annak a feladatnak a megoldását, hogy mennyi egy az $[a,b]$ intervallumban egyenletes eloszlású η valószínűségi változó várható értéke és szórásnégyzete. Lássuk be, hogy egy ilyen valószínűségi változó felírható $\eta = (b-a)\xi + \frac{a+b}{2}$ alakban, ahol ξ egyenletes eloszlású a $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ intervallumban. Adjunk a feladatra ezen észrevétel alapján egyszerűbb megoldást.

Megoldás: Az η és ξ valószínűségi változók között megfogalmazott kapcsolat átfogalmazható úgy is, hogy ha ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó az $[a,b]$ intervallumon, akkor $\xi = \frac{\eta - \frac{a+b}{2}}{b-a}$ egyenletes eloszlású a $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ intervallumon. Az, hogy η egyenletes eloszlású az $[a,b]$ intervallumon úgy is megfogalmazható, hogy η $g(x)$ sűrűségfüggvénye $g(x) = \frac{1}{b-a}$, ha $a \le x \le b$, és $g(x) = 0$, ha $x < a$ vagy $x > b$. Innen ξ sűrűségfüggvénye $f(x) = g\left(\left(x + \frac{a+b}{2(b-a)}\right)(b-a)\right)$, és némi számolással látható, hogy $f(x) = 1$, ha $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$, és $f(x) = 0$, ha $x < -\frac{1}{2}$ vagy $x > \frac{1}{2}$. Innen $E\xi = \int_{-1/2}^{1/2} x\,dx = 0$, $\operatorname{Var}\xi = E\xi^2 = \int_{-1/2}^{1/2} x^2\,dx = \left[\dfrac{x^3}{3}\right]_{-1/2}^{1/2} = 2\cdot\dfrac{1}{3\cdot 8} = \dfrac{1}{12}$. Innen $E\eta = (b-a)E\xi + \frac{a+b}{2} = \frac{b+a}{2}$, és $\operatorname{Var}\eta = \operatorname{Var}\left((b-a)\xi + \frac{a+b}{2}\right) = (b-a)^2\operatorname{Var}\xi = \frac{(b-a)^2}{12}$.

3.) Legyen ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[-1,1]$ intervallumban, azaz legyen sűrűségfüggvénye $f(x) = 1$, ha $0 \le x \le 1$, és $f(x) = 0$, ha $x < 0$ vagy $x > 1$. Számoljuk ki az $\eta = \xi^4$ valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.

Első megoldás: $E\eta = E\xi^4 = \int_0^1 x^4\,dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5}$, és $\operatorname{Var}\eta = E\eta^2 - (E\eta)^2$, $E\eta^2 = E\xi^8 = \int_0^1 x^8\,dx = \left[\frac{x^9}{9}\right]_0^1 = \frac{1}{9}$. Innen $\operatorname{Var}\eta = \frac{1}{9} - \frac{1}{25} = \frac{16}{225}$.

Második megoldás: Számoljuk ki az η valószínűségi változó $g(x)$ sűrűségfüggvényét, és használjuk az $E\eta = \int xg(x)\,dx$ és $E\eta^2 = \int x^2 g(x)\,dx$ összefüggést. Számoljuk ki először η $G(x)$ eloszlásfüggvényét. $G(x) = P(\eta < x) = P(\xi^4 < x) = P(\xi < x^{1/4}) = x^{1/4}$ ha $0 \le x \le 1$, $G(x) = 0$, ha $x < 0$ és $G(x) = 1$, ha $x > 1$. Innen $g(x) = 0$, ha $x < 0$ vagy $x > 1$, és $g(x) = \frac{1}{4}x^{-3/4}$, ha $0 \le x \le 1$. Innen $E\eta = \int_0^1 \frac{1}{4}x \cdot x^{-3/4}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{4}x \cdot x^{1/4}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5} = \frac{1}{5}$, $E\eta^2 = \int_0^1 \frac{1}{4}x^2 \cdot x^{-3/4}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{4}x \cdot x^{5/4}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{9} = \frac{1}{9}$, $\operatorname{Var}\eta = \frac{1}{9} - \frac{1}{25} = \frac{16}{225}$.

4.) Ledobnak egy pontot a $[0,2]$ intervallumra egyenletes eloszlással. Ha a ledobott pont értéke a $[0,1]$ intervallumba esik, akkor felírjuk a dobás pontos értékét egy jegyzőkönyvbe. Ha a ledobott pont értéke az $[1,2]$ intervallumba esik, akkor az 1 számot írjuk a jegyzőkönyvbe. Számoljuk ki a jegyzőkönyvbe írt (véletlen) szám várható értékét és szórásnégyzetét.

Megoldás: Jelölje ξ a ledobott pont, η a jegzőkönyvbe írt szám értékét. Ekkor $\eta = u(\xi)$ ahol az $u(x)$ függvényt úgy definiáljuk, hogy $u(x) = x$, ha $0 \le x \le 1$, $u(x) = 1$, ha $1 \le x \le 2$, az $u(x)$ függvényt tetszőleges módon definiálhatjuk, ha $x < 0$ vagy $x > 2$. Ekkor $E\eta = Eu(\xi) = \int u(x)f(x)\,dx = \int_0^2 u(x)\frac{1}{2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2}x\,dx + \int_1^2 \frac{1}{2}\,dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$, ahol $f(x) = \frac{1}{2}$, ha $0 \le x \le 2$, $f(x) = 0$, ha $x < 0$ vagy $x > 2$ a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye. Hasonlóan, $E\eta^2 = Eu^2(\xi) = \int_0^1 \frac{1}{2}x^2\,dx + \int_1^2 \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$, és $\operatorname{Var}\eta = E\eta^2 - (E\eta)^2 = \frac{2}{3} - \frac{9}{16} = \frac{5}{32}$.