DOLGOZAT FELADATOK

1.) Minden héten kitöltünk egy lottószelvényt. (90 számból kell eltalálni 5-öt.) Mi annak a valószínűsége, hogy a hatodik héten lesz először 2 találatunk?

2.) Egy urnában 10 piros és 30 fehér golyó van. Kihúzunk 20 golyót visszatevés nélkül. Mi a kihúzott piros golyók számának a várható értéke?

3.) Feldobunk egy szabályos dobókockát 100-szor egymás után. Mi a páros értékű dobáseredmények összegének a várható értéke és szórásnégyzete?

4.) Van két sziget, az igazmondók és a hazugok szigete. Az igazmondók szigetén mindenki 0.9 valószínűséggel igaz választ ad bármely feltett kérdésre, a hazugok szigetén 0.8 valószínűséggel hamis választ ad. Valaki éjjel a viharos tengeren hajózva eljut a két sziget valamelyikére, 1/2 valószínűséggel az igazmondók szigetére, 1/2 valószínűséggel a hazugok szigetére. Megkérdezi az első szembejövő embert, hogy az igazmondók szigetére került-e. Azt a választ kapja, hogy igen. A második embertől, akivel találkozik azt kérdezi, hogy igaz-e, hogy kétszer kettő néggyel egyenlő. Erre a kérdésre is igenlő választ kap. Mi annak a valószínűsége, hogy emberünk az igazmondók szigetére került?

5.) Ledobnak egy pontot a $[-1,1]$ intervallumba egyenletes eloszlással, azaz annak a valószínűsége, hogy a ledobott pont valamely $[a,b] \subset [-1,1]$ intervallumba esik legyen $\frac{b-a}{2}$. Ha a ledobott pont értéke a $[0,1]$ intervallumba esik, akkor a dobás értékét, ha a ledobott pont értéke a $[-1,0]$ intervallumba esik, akkor a dobás értékének négyzetét írjuk egy jegyzőkönyvbe. Számoljuk ki a jegyzőkönyvbe írt (véletlen) szám várható értékét és szórásnégyzetét.

6.) Legyen A, B és C három esemény egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Mikor mondjuk, hogy ezek az események (teljesen) függetlenek?

MEGOLDÁSOK

1.) Annak valószínűsége, hogy valamelyik héten lesz 2 találatunk $\frac{\binom{85}{3}\binom{5}{2}}{\binom{90}{5}}$. Azok az események, hogy az egyes heteken lesz-e 2 találatunk egymástól függetlenek. Így annak a valószínűsége, hogy az első 5 hét során nem lesz 2 találatunk $\left(1-\frac{\binom{85}{3}\binom{5}{2}}{\binom{90}{5}}\right)^5$. Annak valószínűsége pedig, hogy az első 5 héten nem lesz 2 találatunk, a hatodik héten pedig lesz $\left(1-\frac{\binom{85}{3}\binom{5}{2}}{\binom{90}{5}}\right)^5 \frac{\binom{85}{3}\binom{5}{2}}{\binom{90}{5}}$.

2.) Jelölje ξ_j azt a valószínűségi változót, amely 1, ha a j-ik húzás piros és nulla, ha a j-ik húzás fehér, $1 \le j \le 20$. Ekkor minket az $S = \sum\limits_{j=1}^{20} \xi_j$ valószínűségi változó várható értéke érdekel. $P(\xi_j = 1) = P(\xi_j = 0) = \frac{10}{40}$ minden $1 \le j \le 20$ számra, és innen $ES = \sum\limits_{j=1}^{20} E\xi_j = 20 \cdot \frac{1}{4} = 5$.

3.) Vezessük be a következő ξ_j, $1 \le j \le 100$, valószínűségi változókat: $\xi_j = 2$, ha a j-ik dobás értéke 2, $\xi_j = 4$, ha a j-ik dobás értéke 4, és $\xi_j = 6$, ha a j-ik dobás értéke 6, és $\xi_j = 0$, ha a j-ik dobás értéke 1,3 vagy 5. Ekkor a $\xi = \sum\limits_{j=1}^{100} \xi_j$ valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét kívánjuk kiszámolni. $E\xi = \sum\limits_{j=1}^{100} E\xi_j = 100E\xi_1 = 200$, mert $E\xi_1 = \frac{1}{6}(2+4+6) = 2$. Mivel a ξ_j valószínűségi változók függetlenek, $\operatorname{Var}\xi = \sum\limits_{j=1}^{100} \operatorname{Var}\xi_j = \frac{1600}{3}$, mert $\operatorname{Var}\xi_j = E\xi_j^2 - (E\xi_j)^2 = \frac{1}{6}(4+16+36) - 4 = \frac{16}{3}$.

4. Jelölje A azt az eseményt, hogy emberünk az igazmondók szigetére került, és B azt az eseményt, hogy kérdésére az adott válaszokat kapta. Ekkor minket a $P(A|B)$ feltételes valószínűség értéke érdekel. Feltevéseink szerint $P(A) = P(\bar{A}) = \frac{1}{2}$, ahol $\bar{A}$ az A esemény komplementerét jelöli. Továbbá, $P(B|A) = 0.9^2$, (emberünk mind a két kérdésére igaz választ kapott) $P(B|\bar{A}) = 0.8 \cdot 0.2$, (az első kérdésére hamis, a második kérdésére igaz választ kapott). Ezért $P(A \cap B) = \frac{1}{2} \cdot 0.81$, $P(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{2} \cdot 0.16$, $P(B) = \frac{1}{2} \cdot (0.81 + 0.16)$, $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{81}{81+17} = \frac{81}{97}$.

5.) Jelölje ξ a ledobott pont, η a jegyzőkönyvbe írt szám értékét. Ekkor a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{2}$, ha $-1 \le x \le 1$, és $f(x) = 0$ egyébként. Továbbá $\eta = u(\xi)$, ahol $u(x) = x^2$, ha $-1 \le x \le 0$, és $u(x) = x$, ha $0 \le x \le 1$. Innen

$$E\eta = Eu(\xi) = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0} x^2\,dx + \int_{0}^{1} x\,dx\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{12},$$

$$E\eta^2 = Eu^2(\xi) = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0} x^4\,dx + \int_{0}^{1} x^2\,dx\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{15},$$

$$\operatorname{Var}\eta = \frac{4}{15} - \frac{25}{144} = \frac{67}{720}.$$

6.) Az A, B és C események akkor függetlenek, ha teljesítik a következő azonosságokat: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, $P(A \cap C) = P(A)P(C)$, $P(B \cap C) = P(B)P(C)$ és $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.