DOLGOZAT FELADATOK

1.) Legyen ξ és η két független, exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\lambda = 1$ paraméterrel, azaz legyen mind ξ mind η sűrűségfüggvénye $f(x) = e^{-x}$, ha $x \geq 0$, és $f(x) = 0$, ha $x < 0$. Számítsuk ki a $2\xi + 3\eta + 1$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét.

2.) Van két urna, mind a kettő 10 darab piros és 20 darab fehér golyót tartalmaz. Kihúzunk 10-szer egymás után egy egy golyót a két urnából. Az első urnából visszatevéssel, a második urnából visszatevés nélkül húzunk golyót. Számítsuk ki azon húzáspárok számának a várható értékét és szórásnégyzetét, amelyekben a két kihúzott golyó színe megegyezik.

3.) Ledobunk az egységkörre egy pontot egyenletes eloszlással, azaz legyen annak a valószínűsége, hogy a pont az egységkör egy A részhalmazába esik $\frac{1}{\pi}$-szer az A halmaz területe. Számítsuk ki annak a ξ valószínűségi változónak az eloszlás és sűrűségfüggvényét, amely megadja e véletlen pont távolságát a kör középpontjától.

4.) A következő játékot játsszuk. Két szabályos pénzdarabot feldobnak egymás után 10 000 alkalommal. Ha egy dobás eredménye két fejdobás akkor 2 forintot nyerünk, ha az eredmény két írásdobás akkor 2 forintot vesztünk, ha az eredmény egy fej és egy írásdobás akkor 1 forintot nyerünk. Adjunk jó becslést a mellékelt normális eloszlástáblázat alapján annak a valószínűségére, hogy nyereményünk összege 4850 és 5300 forint között lesz.

5.) Egy szabályos dobókockát feldobunk egymás után 101 alkalommal. Számoljuk ki azon dobások számának a várható értékét, amelyekben az előző dobásnál szigorúan nagyobbat dobtunk.

5b.) Plusz feladat, amely nem tartozik szigorúan a dolgozat feladatai közé, de jó megoldásáért jutalompont jár: Számítsuk ki az 5. feladatban tekintett dobások számának a szórásnégyzetét is. (Tehát azon dobásokat tekintjük, amelyekben az előző dobásnál szigorán nagyobbat dobtunk. Ezt is meg lehet oldani a tanultak alapján.)

6.) Az alábbi négy állítás közül melyik helyes és melyik nem:

   a.) Ha ξ és η két valószínűségi változó egy valószínűségi mezőn, akkor a $\xi + \eta$ összeg várható értéke egyenlő a ξ és η valószínűségi változók várható értékének az összegével, azaz $E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$.

   b.) Ha ξ és η két független valószínűségi változó egy valószínűségi mezőn, akkor a $\xi + \eta$ összeg várható értéke egyenlő a ξ és η valószínűségi változók várható értékének az összegével, azaz $E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$.

   c.) Ha ξ és η két valószínűségi változó egy valószínűségi mezőn, akkor a $\xi+\eta$ összeg szórásnégyzete egyenlő a ξ és η valószínűségi változók szórásnégyzetének az összegével, azaz $\mathrm{Var}\,(\xi + \eta) = \mathrm{Var}\,\xi + \mathrm{Var}\,\eta$.

   d.) Ha ξ és η két független valószínűségi változó egy valószínűségi mezőn, akkor a $\xi + \eta$ összeg szórásnégyzete egyenlő a ξ és η valószínűségi változók szórásnégyzetének az összegével, azaz $\mathrm{Var}\,(\xi + \eta) = \mathrm{Var}\,\xi + \mathrm{Var}\,\eta$.

MEGOLDÁSOK

1. Ha egy ξ valószínűségi változónak $F(x)$ az eloszlás és $f(x)$ a sűrűségfüggvénye, akkor a 2ξ valószínűségi változónak $F(\frac{x}{2})$ az eloszlás és $\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)$ a sűrűségfüggvénye. Innen a 2ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $g(x) = \frac{1}{2}e^{-x/2}$, ha $x > 0$, és $g(x) = 0$, ha $x < 0$. Hasonlóan 3η sűrűségfüggvénye $h(x) = \frac{1}{3}\exp^{-x/3}$, ha $x > 0$, $h(x) = 0$, ha $x < 0$. Mivel 2ξ és 3η függetlenek, $2\xi + 3\eta$ sűrűségfüggvénye $k(x) = f * g(x)$. Innen

$$\begin{aligned} k(x) &= \frac{1}{6}\int_0^x e^{-y/3}e^{-(x-y)/2}\,dy = \frac{1}{6}e^{-x/2}\int_0^x e^{y/6}\,dy \\ &= e^{-x/2}(e^{x/6} - 1) = e^{-x/3} - e^{-x/2}, \end{aligned}$$

   ha $x > 0$ nulla, és $k(x) = 0$, ha $x < 0$. A $2\xi + 3\eta + 1$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $k(x-1)$, azaz $u(x) = e^{-(x-1)/3} - e^{-(x-1)/2}$, ha $x \geq 1$, és $u(x) = 0$, ha $x < 1$.

2. Vezessük be a ξ_j, $1 \leq j \leq 10$, valószínűségi változókat, amelyekre $\xi_j = 1$, ha a j-ik húzásban két azonos színű golyót húztunk, és nulla ha különböző színű golyókat húztunk. A feladat megoldása érdekében ki kell számolnunk az $E\xi_j$, $\operatorname{Var}\xi_j$ és $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k)$, $j \neq k$ mennyiségeket. $E\xi_j = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$, mert $\frac{1}{9}$ valószínűséggel húzunk két piros és $\frac{4}{9}$ valószínűséggel két fehér golyót. Hasonló meggondolásból $\operatorname{Var}\xi_j = \frac{5}{9} - \left(\frac{5}{9}\right)^2 = \frac{20}{81}$. A $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k)$ kiszámolásához először az $E\xi_j\xi_k$, $j \neq k$, mennyiséget kell meghatároznunk. Ennek értéke $E\xi_j\xi_k = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{29} + \frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{20}{29} + \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{10}{29} + + \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{19}{29} = \frac{9+80+152}{27\cdot29} = \frac{241}{27\cdot29}$. Innen $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k) = E\xi_j\xi_k - E\xi_jE\xi_k = \frac{241}{27\cdot29} - \frac{25}{81} = \frac{723-25\cdot29}{81\cdot29} = -\frac{2}{81\cdot29}$. Innen a vizsgálandó $S = \sum\limits_{j=1}^{10}\xi_j$ összeg várható értéke $ES = 10\cdot\frac{5}{9} = \frac{50}{9}$, szórásnégyzete $\operatorname{Var}S = \sum\limits_{j=1}^{10}\operatorname{Var}\xi_j + 2\sum\limits_{1\leq j<k\leq10}\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k) = 10\cdot\frac{20}{81} - 90\cdot\frac{2}{81\cdot29} = 20\frac{290-9}{81\cdot29} = \frac{5620}{81\cdot29}$.

3. A ledobott pont akkor kerül az origótól x távolságnál közelebb, ha az origó körüli x sugarú körbe esik. Ennek valószínűsége x^2, ha $0 \leq x \leq 1$, továbbá 1, ha $x > 1$, és 0, ha $x < 0$. Innen a keresett eloszlásfüggvény $F(x) = x^2$, ha $0 \leq x \leq 1$, $F(x) = 0$, ha $x < 0$, és $F(x) = 1$, ha $x > 1$. A sűrűségfüggvény ennek deriváltja, tehát a sűrűségfüggvény $f(x) = 2x$, ha $0 \leq x \leq 1$, és $f(x) = 0$ egyébként.

4. Jelölje ξ_j a j-ik játékban szerzett nyereményünk értékét, és legyen $S = \sum\limits_{j=1}^{10\,000}\xi_j$. Ekkor minket a $P(4850 < S < 5300)$ valószínűség értéke érdekel. Számítsuk ki a független és egyforma eloszlású ξ_j valószínűségi változók várható értékét és szórásnégyzetét. $P(\xi_j = 2) = P(\xi_j = -2) = \frac{1}{4}$, és $P(\xi_j = 1) = \frac{1}{2}$. Innen $E\xi_j = \frac{1}{2}$, $E\xi_j^2 = \frac{5}{2}$, $\operatorname{Var}\xi_j = E\xi_j^2 - (E\xi_j)^2 = \frac{9}{4}$, $ES = 5000$, $\operatorname{Var}S = (150)^2$. Innen $P(4850 < S < 5300) = P\left(-1 \leq \frac{S-ES}{\sqrt{\operatorname{Var}S}} < 2\right)$, és ez a centrális határeloszlástétel szerint közelítőleg $\Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) + \Phi(1) - 1 = 0.9772 + 0.8413 - 1 = 0.8185$.

5. Jelölje ξ_j azt a valószínűségi változót, amelynek értéke 1, ha a $j+1$-ik dobás értéke (szigorúan) nagyobb, mint a j-ik dobás értéke, és 0 egyébként, $1 \le j \le 100$. Ekkor minket az $S = \sum\limits_{j=1}^{100} \xi_j$ valószínűségi változó várható értéke érdekel. Viszont $E\xi_j = P(\xi_j = 1) = \frac{1}{36}(5+4+3+2+1) = \frac{5}{12}$, mert annak a valószínűsége, hogy a j-ik dobás valamilyen előírt 1 és 6 közötti l_1 a $j+1$-ik dobás pedig valamely előírt 1 és 6 közötti l_2 értéket vesz fel, $\frac{1}{36}$. Ha a j-ik dobás értéke 1, akkor a $j+1$-ik dobás 5 különböző ennél nagyobb értéket vehet fel, ha a j-ik dobás értéke 2, akkor 4-et, és így tovább. Innen $ES = 100E\xi_1 = \frac{500}{12}$.

5b.) Az 5. feladatban szereplő S valószínűségi változó szórásnégyzetét kell kiszámolnunk. Viszont,

$$\operatorname{Var} S = \sum_{j=1}^{100} \operatorname{Var} \xi_j + 2 \sum_{j=1}^{99} \sum_{j<k\le 100} \operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k).$$

Másrészt $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k) = 0$, ha $k \ge j+2$, mert ekkor ξ_j és ξ_k független valószínűségi változók. Ezenkívül $E\xi_j\xi_{j+1} = \frac{1}{216}\binom{6}{3} = \frac{5}{54}$, mert minden lehetséges 3 hosszúságú dobássorozatnak a valószínűsége $\frac{1}{216}$, és $\binom{6}{3}$-féle három hosszúságú szigorúan növekvő dobássorozat van. Ezért $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_{j+1} = \frac{5}{54} - \left(\frac{5}{12}\right)^2 = -\frac{35}{432}$, $E\xi_j^2 = \frac{5}{12}$, $\operatorname{Var}\xi_j = \frac{5}{12} - \left(\frac{5}{12}\right)^2 = \frac{35}{144}$, $\operatorname{Var} S = 100\operatorname{Var}\xi_1 + 2\cdot 99\operatorname{Cov}(\xi_1, \xi_2) = \frac{3500}{144} - \frac{70\cdot 99}{432} = \frac{35\cdot 34}{144} = \frac{595}{72}$.

6. Az a) b) és d) állítás igaz, a c) állítás hamis.