A február 14.-i gyakorlat feladatai

1. Lássuk be, hogy $\binom{-\frac{1}{2}}{n} = (-1)^n \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$.

   Megoldás:

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{n!}$$
$$= (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \frac{(2n)!}{n!\cdot n!} = (-1)^n \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}.$$

2. Egy urnában 20 piros és 30 fehér golyó van. Kihúzunk 25 golyót visszatevéssel. Mi annak a valószínűsége annak, hogy az első húzás eredménye piros. Annak, hogy az első húzás eredménye piros és a másodiké fehér? Annak, hogy az ötödik húzás eredménye piros? Annak, hogy az ötödik húzás eredménye piros és a tízenhatodik húzás eredménye fehér?

   Megoldás: Annak a valószínűsége, hogy az első húzás piros $\frac{20}{50}=\frac{2}{5}$, mert 50 golyóból húzzuk ki a 20 piros golyó valamelyikét, és minden golyót egyforma valószínűséggel húzunk ki. Annak a valószínűsége, hogy az első húzás piros, a második fehér, $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{6}{25}$, mert először 50 golyó közül választjuk ki a húsz piros golyó valamelyikét majd 50 golyó valamelyikéből a 30 fehér golyó valamelyikét, és minden húzás egyforma valószínű. Hasonlóan annak valószínűsége, hogy az 5. húzásban piros golyót húzunk ki $\frac{2}{5}$, és annak valószínűsége, hogy az 5. húzás során piros és a 16. húzás során fehér golyót húzunk $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{6}{25}$.

   Jegyezzük meg, hogy a következő feladat megoldása egy olyan érvet tartalmaz, amelyik ebben az esetben is alkalmazható, és megmutatja, hogy annak valószínűsége, hogy az 5. húzás piros és a 16. húzás fehér megegyezik annak valószínűségével, hogy az első húzás piros és a második húzás fehér. Érdemes ezeket az érveléseket mégegyszer végiggondolni azután, hogy megtárgyaltuk a valószínűségi mező pontos definicióját.

3. Egy urnában 20 piros és 30 fehér golyó van. Kihúzunk 25 golyót *visszatevés nélkül.* Mi a valószínűsége annak, hogy az első húzás eredménye piros? Annak, hogy az első húzás eredménye piros és a másodiké fehér? Annak, hogy az ötödik húzás eredménye fehér? Annak, hogy az ötödik húzás eredménye piros és a tízenhatodik húzás eredménye fehér?

   Megoldás: Annak a valószínűsége, hogy az első húzás piros $\frac{20}{50}=\frac{2}{5}$, mert 50 golyóból húzzuk ki a 20 piros golyó valamelyikét, és minden golyót egyforma valószínűséggel húzunk ki. Annak a valószínűsége, hogy az első húzás piros, a második fehér, $\frac{2}{5}\cdot\frac{30}{49}=\frac{60}{245}$, mert először 50 golyó közül választjuk ki a húsz piros golyó valamelyikét, majd 49 golyó valamelyikéből a 30 fehér golyó valamelyikét, és minden húzás egyforma valószínű. Belátjuk, hogy annak valószínűsége, hogy a 16. húzásban piros golyót húzunk ki, megegyezik annak a valószínűségével, hogy az első húzás piros, azaz ez $\frac{2}{5}$. Továbbá annak a valószínűsége, hogy az 5. húzás során piros és a 16. húzás során fehér golyót húzunk megegyezik annak a valószínűségével, hogy az első húzás eredménye fehér, a második húzás eredménye piros. Ezért ez a valószínűség is $\frac{2}{5} \cdot \frac{30}{49} = \frac{60}{245}$.

Tekintsük ugyanis az összes 25 hosszúságú húzássorozatot. Ekkor annak valószínűsége, hogy az 5. húzás eredménye piros a 16. húzás eredménye fehér megegyezik az összes olyan 25 hosszúságú húzássorozat valószínűségének az összegével, amelyek 5. helyén piros és a 16. helyén fehér jegy áll. Hasonlóan számítható ki annak a valószínűsége, hogy az első húzás piros és a második húzás eredménye fehér, azzal a különbséggel, hogy az 5. hely helyett az első és a 16. hely helyett a második helyet kell tekinteni. Be fogjuk látni, hogy ugyanaz a képlet fejezi ki ezt a két különböző valószínűséget, erért ezek a valószínűségek megegyeznek.

Vegyük észre, hogy annak valószínűsége, hogy egy előírt konkrét 25 hosszúságú sorozat jelenik meg csak attól függ, hogy a sorozat hány piros és hány fehér golyót tartalmaz, de nem függ a fehér és piros húzások sorrendjétől. Valóban, ha egy húzássorozat k piros és $25-k$ fehér golyót tartalmaz, akkor ennek valószínűsége $P(k) = \dfrac{25 \cdot 24 \cdots (25-k+1) \cdot 30 \cdot 29 \cdots (30-(25-k)+1)}{50 \cdot 49 \cdots 26}$. Ugyanis egy előírt húzássorozat valószínűsége $\prod\limits_{j=1}^{25} \dfrac{l(j)}{50-j+1}$, ahol $l(j)$ az a $j-1$-ik húzás után az urnában maradt piros golyók száma, ha a j-ik húzás piros, és a $j-1$-ik húzás után az urnában maradt fehér golyók száma, ha a j-ik húzás fehér. Gondoljuk meg, hogy ez a kifejezés megegyezik a megadott formulával.

Jelölje $A(k;5,16)$ az olyan 25 hosszúságú sorozatok számát, amelyek k piros és $25-k$ fehér jelet tartalmaznak, és az 5. helyen piros a 16. helyen pedig fehér jel áll. Jelölje továbbá $A(k;1,2)$ az olyan 25 hosszúságú sorozatok számát, amelyek k piros és $25-k$ fehér jelet tartalmaznak, az 1. helyen piros a 2. helyen pedig fehér jel áll. Ekkor a két összehasonlítandó valószínűség $\sum\limits_k A(k;5,16)P(k)$ illetve $\sum\limits_k A(k;1,2)P(k)$. Ezért annak érdekében, hogy megmutassuk a kívánt azonosság teljesülését elegendő belátni azt, hogy $A(k;5,16) = A(k;1,2)$ minden k számra. Viszont nem nehéz belátni, hogy $A(k;5,16) = A(k;1,2) = \binom{23}{k-1}$, mert mind a két esetben 23 előírt helyre kell írni $k-1$ piros és $25-(k+1)$ fehér golyót.

Az utolsó azonosság egy másik lehetséges bizonyítása: Mutassuk meg, hogy ha tekintjük az összes 25 hosszúságú k piros és $25-k$ fehér golyót tartalmazó sorozatot, akkor az ilyen sorazatok 5. jelét kicserélve az elsővel és a 16. jelét a másodikkal kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést kapunk azon halmazok között, amelyek számosságaként definiáltuk az $A(k;5,16)$ és $A(k;1,2)$ számokat.

Hasonlóan mutatható meg, hogy annak a valószínűsége, hogy az első, illetve hogy az ötödik húzás piros megegyezik.

4. Egy urnában 20 piros és 30 fehér golyó van. Kihúzunk 25 golyót. Minden húzás után a kihúzott golyót visszadobjuk egy másik ugyanolyan színű golyóval. Lássuk be, hogy annak a valószínűsége, hogy a 3. és 7. húzáskor piros golyót húzunk megegyezik annak valószínűségével, hogy az első és második húzáskor piros golyót húzunk. Számítsuk ki ezt a valószínűséget.

   Megoldás: Tekintsünk egy olyan 25 hosszúságú húzássorozatot, amely k piros és

$25-k$ fehér golyót tartalmaz. Vegyük észre, hogy egy ilyen sorozat p_k valószínűsége csak a k számtól függ, de nem függ attól, hogy mely helyeken vannak a piros húzások. Valóban,

$$p_k = \frac{20(20+1)\cdots(20+k-1)30(30+1)\cdots(30+(25-k)-1)}{50(50+1)\cdots(50+25-1)}$$

Jelőlje, $A(k)$ azon 25 hosszúságú sorozatok számát, amelyek k piros és $25-k$ fehér golyót tartalmaznak, és az 1. és 2. húzás piros; $B(k)$ azon 25 hosszúságú sorozatok számát, amelyek k piros és $25-k$ fehér golyót tartalmaznak, és a 3. és 7. húzás piros. Ekkor a két vizsgált valószínűség a $\sum\limits_k A(k)p_k$, illetve $\sum\limits_k B(k)p_k$ kifejezéssel egyenlő. Ezért a feladat megoldásához elég belátni, hogy $A(k) = B(k)$ minden k számra is. Ez valóban igaz, mert $A(k) = B(k) = \binom{23}{k-2}$. Könnyű közvetlenül kiszámolni, annak valószínűségét, hogy az első két húzás piros. $\frac{20}{50} \cdot \frac{21}{51}$, mivel az első húzásban $\frac{20}{50}$ valószínűséggel húzunk pirosat, és ha az első húzás piros volt, akkor a második húzásban $\frac{21}{51}$ valószínűséggel húzunk pirosat a 21 piros és 30 fehér golyó közül.

Házi feladat:

Egy urnában 10 fehér és 10 piros golyó van. Kihúzunk 15 golyót úgy, hogy amikor kihúzunk egy golyót azt visszadobjuk, és vele együtt az urnába dobunk három ugyanolyan színű golyót. Mi annak a valószínűsége, hogy a negyedik, ötödik és tízenkettedik húzás mindegyike piros?

5. Egy pénzdarabot feldobunk 10-szer egymás után. Jelölje A_j azt az eseményt, (halmazt) hogy a j-ik dobás eredménye fej, $1 \le j \le 10$. Tekintsük e dobássorozat egy természetes valószínűségi modelljét. Hogyan értelmezhetjük az A_j eseményt mint halmazt? Fejezzük ki az A_j események segítségével, unió, metszet és halmaz komplementerképzés műveletét használva azt a B eseményt, hogy legalább három fejdobás történt. Fejezzük ki a fenti eseményt úgy is, hogy csak diszjunkt halmazok unióját tekintjük.

   (Beszéljük meg röviden az utolsó formula kapcsolatát a más matematikai tantárgyban már tanult logikai formák konjunktiv normálformjával.)

   Megoldás: A tíz egymást követő pénzdobás természetes modellje a következő: Legyenek az elemi események az $\omega = (\dots, F \dots, I \dots)$ 10 hosszúságú fej-írás sorozatok, definiáljuk minden $\{\omega\}$ valószínűségét. (Ha a dobások egymástól függetlenül lesznek fej illetve írás értékűek p illetve $1-p$ valószínűséggel, akkor egy k darab fej és $10-k$ darab írás eredményt tartalmazó ω fej-írás sorozat valószínűsége $p^k(1-p)^{10-k}$.) Legyen a biztos esemény Ω az összes ω elemi eseményt tartalmazó halmaz, a $\mathcal{A}$ σ-algebra álljon Ω összes részhalmazából, $P(A) = \sum\limits_{\omega \in A} P(\{\omega\})$.

   Ebben a modellben az A_j halmaz azokat az ω elemi eseményeket tartalmazza, amely elemi események (10 hosszúságú fej-írás sorozatok) j-ik koordinátája F, a többi koordinátája tetszőleges.

Az az esemény, hogy a j_1-ik, j_2-ik és j_3-ik dobás eredménye fej, $A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap Aj_3$. Az, hogy legalább három fejdobás történt, azt jelenti, hogy léteznek ilyen $1 \le j_1 \le j_2 \le j_3$ indexek. Ezért a kifejezendő B esemény

$$B = \bigcup_{\substack{j_1, j_2, j_3 \\ 1 \le j_1 < j_2 < j_3 \le 10}} A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap Aj_3.$$

Az unióban szereplő kifejezések nem diszjunktak. De átírhatjuk a kívánt formában, ha úgy írjuk fel a keresett eseményt, hogy bizonyos $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_s$ indexekre, $s \ge 3$, a dobás eredménye fej, a többi dobás eredménye írás. Ezért

$$B = \bigcup_{s=3}^{10} \bigcup_{\substack{j_1, j_2, \dots, j_s \\ 1 \le j_1 < j_2 < \cdots j_s \le 10}} \left(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap Aj_s \cap \bigcap_{l \in \{1, \cdots, 10\} \setminus \{j_1, \dots, j_s\}} \bar{A}_l \right),$$

ahol $\bar{A}$ jelöli az A esemény (halmaz) komplementerét.

Házi feladat:

Definiáljunk olyan valószínűségi mezőt, amelyben lehet vizsgálni egy szabályos dobókocka öt egymásutáni dobásának az eredményét.

6. Adjunk természetes módon valószínűségszámítási modellt arra, hogy egy szabályos pénzdarabot végtelen sokszor feldobunk. Más megfogalmazásban feladatunk a következő: Konstruáljunk olyan $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőt, amelyben értelmezni tudjuk azt az A_j eseményt, hogy a j-ik dobás eredménye fej, $P(A_j) = \frac{1}{2}$ minden $j = 1, 2, \dots$, sőt teljesül a $P(A_1^{\varepsilon_1} \cap \cdots \cap A_k^{\varepsilon_k}) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$ azonosság is minden $k = 1, 2, \dots$, számra $\varepsilon_j = \pm 1$, $j = 1, 2, \dots$ kitevőre, ahol $A_j^1 = A_j$ és $A_j^{-1} = \Omega \setminus A_j$.
Megoldás: Legyenek az ω elemi események a végtelen fej-írás sorozatok, és definiáljuk az Ω biztos eseményt mint az összes ω-t tartalmazó halmazt. Definiálnunk kell még az $\mathcal{A}$ σ-algebrát és a $P(A)$ valószínűségeket az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező teljes definiciója érdekében. Jelen esetben $P\{\omega\} = 0$ minden ω elemi eseményre, és a kívánt $\mathcal{A}$ σ-algebrát, illetve P valószínűséget nem tudjuk olyan egyszerűen definiálni, mint az előző feladatban. Valójában csak a mértékelmélet néhány fontos, de még nem tanult eredményére hivatkozva tudjuk ezt megtenni. Legyen $A_j \subset \Omega$ az a halmaz, amelyik megegyezik azzal az eseménnyel, hogy a j-ik dobás fej, azaz $A_j = \bigcup_{\omega \ j\text{-ik koordinátája fej}} \{\omega\}$, azaz az összes olyan $\omega = (\dots, F, \dots, I, \dots)$ végtelen fej-írás sorozat unióját tekintjük, amelyek j-ik koordinátája fej. Definiáljuk az összes $A(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) = \bigcap_{j=1}^{k} A_j^{\varepsilon_j}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $1 \le j \le k$ halmazt. Ez annak felel meg, hogy azokat a dobássorozatokat tekintjük, amelyekben az első k dobás eredményét előírjuk, a többi dobás eredménye tetszőleges lehet. Természetes elvárás, hogy ezek az $A(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ halmazok benne legyenek az $\mathcal{A}$ σ-algebrában. Egy viszonylag egyszerűen bizonyítható eredmény azt mondja ki, hogy létezik egy legszűkebb az

összes $A(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ alakú halmazt tartalmazó σ-algebra. Ez lesz a $\mathcal{A}$ σ-algebra. Definiáljuk a $P(A(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k))$ valószínűségeket a $P(A(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$ képlet segítségével. (Ez a természetes definició.) A mértékelmélet egy mély eredménye szerint ezen események valószínűsége egyértelműen kiterjeszthető az $\mathcal{A}$ σ-algebrára úgy, hogy σ-addítív halmazfüggvényt, azaz valószínűségi mértéket kapjunk. Másképp kifejezve, meg lehet adni a $P(A)$ valószínűségeket minden $A \in \mathcal{A}$ halmazra, mégpedig egyértelműen úgy, hogy σ-additív halmazfüggvényt kapjunk, és a $0 \le P(A) \le 1$, $A \in \mathcal{A}$, és $P(\Omega) = 1$ relációk is teljesülnek. Ez a kiterjesztés lesz a P valószínűség $\mathcal{A}$-n.

7. Egy szabályos érmét feldobunk egymás után egészen addig, amíg másodszor megjelenik egy fej. Azután a dobássorozatot abbahagyjuk. Mi annak a valószínűsége, hogy az utolsóelőtti dobás eredménye fej?

   Megoldás: Az esemény, amelyiknek a valószínűségét ki akarjuk számolni, a következő módon is jellemezhető: Először k darab írásdobás történik valamely $k = 0, 1, 2, \ldots,$ számmal, majd utána két fejdobás következik be. Ennek valószínűsége

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

   Házi feladat:

   Egy szabályos érmét feldobunk egymás után egészen addig, amíg másodszor megjelenik egy fej. Azután a dobássorozatot abbahagyjuk. Mi annak a valószínűsége, hogy legalább három dobást végzünk, és az utolsót kettővel megelőző dobás eredménye fej?

8. Egy szabályos pénzdarabot feldobunk egymás után végtelen sokszor. Mi annak a valószínűsége, hogy a második fej dobás 5 dobással az első fejdobás után következik be?

   Megoldás: Jelölje A_j azt az eseményt, hogy az első fejdobás a j-ik a második fejdobás a $j+5$-ik dobásban következik be, $j = 1, 2, \ldots$. Ekkor minket a $B = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$ esemény valószínűsége érdekel. Továbbá az A_j események diszjunktak, ezért $P(B) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} P(A_j)$. Vegyük észre, hogy $P(A_j) = \left(\frac{1}{2}\right)^{j+5}$, mert az A_j esemény bekövetkezte azt jelenti, hogy az első $j+5$ dobásból a j-ik és a $j+5$-ik dobás fej, az összes többi írás. Innen $P(B) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{j+5} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$.

   Vegyük észre, hogy ha ennek a feladatnak megfelelő valószínűségi modellt kívánunk tekinteni, akkor abban a modellben végtelen sok fejdobás lehetőségét is meg kell engednünk.