A február 21.-i gyakorlat feladatai

1. Feldobunk egy szabályos pénzdarabot végtelen sokszor egymás után. Mi annak a valószínűsége, hogy pontosan az ötödik dobásban jelenik meg az első fej-dobás? Mi annak a valószínűsége, hogy a második fej-dobás pontosan öt dobással az első fej-dobás után következik be?

   Megoldás: Akkor lesz az első fej-dobás az ötödik dobás, ha először négy írás-dobás majd egy fej-dobás történik. Ennek valószínűsége $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$. Hasonlóan, annak a valószínűsége, hogy a k-ik dobás lesz az első fej-dobás 2^{-k}, $k = 1, 2, \dots$, annak valószínűsége pedig, hogy a k-ik dobás lesz az első fej-dobás, utána pedig 5 dobás múlva következik be a második fej-dobás $2^{-k} \cdot 2^{-5} = 2^{-k-5}$. Annak a valószínűségét, hogy az első és második fej-dobás között pontosan 5 dobás következik be kiszámolhatjuk úgy is, hogy kiszámoljuk minden $k = 1, 2, \dots$ számra kiszámoljuk annak valószínűségét, hogy a k-ik dobás volt az első és a $k+5$-ik dobás a második fej-dobás, majd összegezünk $k = 1, 2, \dots$-ra. Így azt kapjuk, hogy a keresett valószínűség $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k-5} = 2^{-5} \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-5}$.

2. Feldobunk egy szabályos pénzdarabot végtelen sokszor. Mi annak a valószínűsége, hogy az első fej-dobásig ugyanannyi dobás történik, mint az első és második fej-dobás között? Annak, hogy az első és második fejdobásás között több dobás történik, mint az első fejdobásig? Péter és Pál egyidőben egymás után feldob egy-egy szabályos pénzdarabot. Arra vagyunk kiváncsiak ki dob először fejet. Mi annak a valószínűsége, hogy Péter dobásai között előbb jelenik meg egy fej-dobás mint Pál dobásai között? Mi annak a valószínűsége, hogy egyszerre következik be Péter és Pál első fej-dobása?

   Megoldás: Annak a valószínűsége, hogy a k-ik és $2k$-ik dobásban történik az első és második fej-dobás 2^{-2k} minden $k = 1, 2, \dots$ számra. Ezért annak valószínűsége, hogy az első fej-dobásig ugyanannyi dobás történik, mint az első és második fej-dobás között $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-2k} = \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$. Annak valószínűsége, hogy az első fej-dobás a k-ik dobás, a második dobás pedig a $2k+1., 2k+2., \dots$ dobás valamelyike, azaz több dobás történik az első és második dobás között $2^{-k} \sum\limits_{j=k+1}^{\infty} 2^{-j} = 2^{-2k} \sum\limits_{j=1}^{\infty} 2^{-j} = 2^{-2k}$. Így annak a valószínűsége hogy az első és második dobás között több dobás történik, mint az első dobásig $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-2k} = \frac{1}{3}$.

   Annak valószínűsége, hogy Péter és Pál dobásai között a k-ik dobásban jelenik meg először fej-dobás, és Péter fejet dob, Pál pedig nem $2{-}2(k-1)+2 = 2^{-2k}$, és annak, hogy mind a ketten fejet dobnak szintén 2^{-2k}. Ezért mind az, hogy Péter előbb dob fejet, mint Pál, illetve annak is, hogy egyszerre dobnak fejet $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-2k} = \frac{1}{3}$.

Az, hogy az előző feladatokban bizonyos valószínűségek megegyeznek heurisztikusan érezhető. Így ha megvárjuk, míg az első fej-dobás bekövetkezett és utána várjuk, hogy mennyi ideig kell várni ezután a második fejdobásig az ugyanolyan valószínűségi törvényeknek tesz eleget, mint annak a valószínűsége, hogy mennyi ideig kell várni az első fej-dobásra. Ezért annak a valószínűsége, hogy 5 lépésig kell várni a fej-dobásra és annak a valószínűsége, hogy az első fej-dobás után öt lépésig kell várni a második fej-dobásra megegyezik. Hasonlóan, annak a valószínűsége, hogy az első fej-dobásig illetve az első és második fej-dobás között ugyanannyi lépés történt megegyezik annak valószínűségével, hogy Péter és Pál egyszerre dob fejet. Felmerülhet az igény, hogy próbáljunk a heurisztikus indoklásból precíz bízonyítást tenni. Ennek érdekében az első lépés az, hogy a végtelen fej-írás dobások sorozatát leíró valószínűségi modellt megértsük.

Házi feladat:

Egy szabályos dobókockát feldobunk végtelen sokszor. Mi annak a valószínűsége annak, hogy az első hatos dobásig ugyanannyi dobás történt, mint az első és második hatos dobás között?

3. Mi annak a valószínűsége, hogy lottón pontosan három találatot érünk el? Mi annak a valószínűsége, hogy egymástól függetlenül kitöltünk 10 lottószelvényt, és egyetlen három találatos szelvényünk lesz?
   Megoldás: Minden az 1 és 90 számok valamelyikét tartalmazó számötös megjelenése egyformán valószínű. Így minden egyes húzás eredmény valószínűsége $\frac{1}{\binom{90}{5}}$. Kitöltöttünk 5 számot, számoljuk ki hány húzáseredmény során lesz pontosan három találatunk. Ez úgy lehetséges, ha a kihúzott 5 szám közül 3 az általunk kitöltött 5 szám közül való, 2 pedig a ki nem töltött 85 szám közül. Ez $\binom{5}{3}\binom{85}{2}$ féle módon lehetséges. Ezért a hármas találat valószínűsége $\frac{\binom{5}{3}\binom{85}{2}}{\binom{90}{5}}$. Annak valószínűsége, hogy nincs 3 találat $1-\frac{\binom{5}{3}\binom{85}{2}}{\binom{90}{5}}$. Ha egymástól függetlenül kitöltünk 10 szelvényt, akkor annak valószínűsége, hogy egy 3 találatos szelvény sem jelenik meg $\left(1-\frac{\binom{5}{3}\binom{85}{2}}{\binom{90}{5}}\right)^{10}$. Annak a valószínűsége, hogy a j-ik szelvény 3 találatos, a többi pedig nem $\frac{\binom{5}{3}\binom{85}{2}}{\binom{90}{5}}\left(1-\frac{\binom{5}{3}\binom{85}{2}}{\binom{90}{5}}\right)^{9}$ minden $1\le j\le 10$ számra. Ezért annak valószínűsége, hogy a 10 egymástól függetlenül kitöltött szelvények közül pontosan 1 darab 3 találatos lesz $10\frac{\binom{5}{3}\binom{85}{2}}{\binom{90}{5}}\left(1-\frac{\binom{5}{3}\binom{85}{2}}{\binom{90}{5}}\right)^{9}$.
4. Ledobunk egy pontot véletlenül az egységintervallumra úgy, hogy az intervallum egy $[a,b]\subset[0,1]$ részintervallumába $b-a$ valószínűséggel esik a pont. Mi annak a valószínűsége, hogy a pont pontosan a $\frac{\pi}{6}$ pontba esik? Lehetséges-e olyan eseményt megadni, amely bekövetkezhet, de bekövetkezésének valószínűsége nulla?
   Megoldás: Annak valószínűsége, hogy a ledobott pont pontosan egy előírt pontba, mondjuk a $\frac{\pi}{6}$ pontba esik nulla. Ez példa olyan eseményre, amely bekövetkezhet, noha a bekövetkezés valószínűsége nulla.

5. Adjunk valószínűségi modellt arra, hogy egy szabályos pénzdarabot végtelen sokszor feldobunk. Adjunk valószínűségi modellt arra, hogy egy pontot egyenletes

eloszlással az egységintervallumra ledobunk. Arra, hogy két pontot dobunk le egyenletes eloszlással az egységintervallumra. Arra, hogy egy pontot egyenletes eloszlással az egységnégyzetre dobunk le.

Megoldás: Tekintsük először a szabályos pénzdobás egy lehetséges modelljét. Legyenek az elemi események a végtelen fej–írás sorozatok. A biztos esemény az összes végtelen fej–írás sorozatot tartalmazó halmaz. Az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező definiciójában eddig csak az Ω halmazt adtuk meg. Először definiáljuk az $\mathcal{A}$ σ-algebrát, azon események, az Ω azon részhalmazainak a rendszerét, amelyeknek tudunk a valószínűségéről beszélni. Ez a korábbi egyszerű, véges sok lehetséges kimenetet tartalmazó modellektől eltérően nem tartalmazza Ω minden részhalmazát. Természetes megkívánni, hogy $\mathcal{A}$ tartalmazza azokat az eseményeket, amelyek leírják az első n dobás eredményét valamely egész n számra. Azaz $\mathcal{A}$ tartalmazza a következő halmazokat. Tekintsünk egy n hosszúságú $(\dots, F, \dots, I, \dots)$ fej–írás sorozatot, és legyen $A(\dots, F, \dots, I, \dots)$ azon végtelen fej–írás sorozatok halmaza, amelyek első n jegye megegyezik ennek a sorozatnak az elemeivel. Van egy olyan viszonylag egyszerű tétel, amely szerint létezik egy ezeket a halmazokat tartalmazó legszűkebb σ-algebra, és ez lesz az $\mathcal{A}$ σ-algebra. Az előbbi (előírt első n jegyet tartalmazó $A(\dots, F, \dots, I, \dots)$ halmaz, valószínűsége legyen 2^{-n}. Ez jelenti azt, hogy a dobások szabályosak voltak. A mértékelmélet egy mély tétele szerint ez a halmazfüggvény *egyértelműen* kiterjeszthető, mint egy σ-additív halmazfüggvény, az $\mathcal{A}$ σ-algebrára, és ez lesz a P valószínűségi mérték. A következő feladatban példát látunk arra, hogy ennek a ténynek meglepően mély következményei is vannak.

Egy véletlenül ledobott pont helyének a modelljére hasonló logika (és hasonló mértékelméleti eredmények) segítségével lehet példát adni. Legyen Ω a $[0, 1]$ intervallum, $\mathcal{A}$ az $[a, b] \subset [0, 1]$ intervallumok, $\mathcal{A}$ az ezen intervallumok által generált legszűkebb σ-algebra. (Ezt a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett Borel σ-algebrának nevezik az irodalomban.) Legyen $P([a, b]) = b - a$, ha $0 \le a \le b \le 1$, és egy $A \in \mathcal{A}$ halmaz valószínűsége legyen az előbb definiált halmazfüggvény egyértelmű kiterjesztése, mint σ-additív halmazfüggvény a $\mathcal{A}$ σ-algebrára. Ezt nevezik az irodalomban Lebesgue-mértéknek.

Két egymástól függetlenül, véletlenül ledobott pont helyének a modelljére hasonló modell adható. Ekkor $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, (az összes lehetséges kimenet halmaza), $\mathcal{A}$ az $[a, b] \times [c, d] \subset [0, 1] \times [0, 1]$ alakú halmazok által generált σ-algebra, $P([a, b] \times [c, d]) = (b - a)(d - c)$, és a P mérték ennek a halmazfüggvénynek az egyértelmű σ-additív kiterjesztése. Ez a modellje egyben annak is, ha egy pontot dobunk le az egységnégyzetre.

6. Egy szabályos pénzdarabot feldobunk végtelen sokszor. Mutassuk meg, hogy annak valószínűsége, hogy az n-ik dobásban lesz az 5. fejdobás, $n \ge 5$, $\binom{n-1}{4} 2^{-n}$. Annak valószínűsége, hogy legalább 5 fejdobás van 1. $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \binom{n-1}{4} 2^{-n} = 1$.

   Megoldás: Összesen $\binom{n-1}{4}$ olyan n hosszúságú fej–írás sorozat van, melynek 5. jegye fej, mert az első $n - 1$ helyen pontosan 4 fej kell, hogy legyen és az n-ik dobás fej. Mivel minden n hosszúságú fej–írás sorozat 2^{-n} valószínűséggel jelenik meg, ezért a keresett valószínűség $\binom{n-1}{4}2^{-n}$. Tekintsünk egy nagy N számot. Annak valószínűsége, hogy az első N dobásban nincs fej, 2^{-N}, így annak a valószínűsége, hogy legalább 1 fejdobás van $1-2^{-N}$. Hasonló érvelés mondható el annak a valószínűségére, hogy az $N+1$-ik és $2N$-ik $2N+1$-ik és $3N$-ik dobás között $1-2^{-N}$ valószínűséggel van fej-dobás, stb. Ezért annak valószínűsége, hogy van 5 fej-dobás nagyobb, mint $(1-2^{-N})^5$ tetszőleges N számra. Ez csak úgy lehetséges, hogy a kérdezett valószínűség 1. Az utolsó azonosság ennek a ténynek az átírása, mert az azonosság baloldalán annak valószínűsége szerepel, hogy valamely $n \geq 5$ számra, az n-ik dobás az ötödik fej dobás.

7. Két ember 8 és 9 óra között megjelenik egy téren egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással. Mind a kettő félórát vár a másikra, és ha az addig nem jön, akkor hazamegy. Mi a valószínűsége annak, hogy találkoznak?
   Megoldás: Tekintsük az egységnégyzetet, és válasszuk azt a véletlen pontot az egységnégyzeten, melynek x koordinátája megadja, hogy az első ember az y koordinátája pedig megadja, hogy a második ember ember mikor érkezett. Ekkor az így definiált pont egyenletes eloszlású az egységnégyzeten, azaz annak valószínűsége, hogy ez a pont az egységnégyzet egy (szép) részhalmazába esik megegyezik e halmaz területével. Az, hogy a két ember találkozik azt az eseményt jelenti, hogy az így definiált (x,y) pont az egységnégyzet

$$A=\left\{(x,y)\colon\ -\frac{1}{2}\leq y-x\leq\frac{1}{2}\right\}\cap[0,1]\times[0,1]$$

   részhalmazába esik. Ennek a halmaznak a területe $1-2\cdot\dfrac{1}{8}=\dfrac{3}{4}$, és ez a keresett valószínűség.
8. Két egy méter hosszú botot véletlenszerűen, (egymástól függetlenül) egyenletes eloszlással eltörünk. A két rövidebb darabot összeragasztjuk. Mi annak a valószínűsége, hogy az így kapott új bot hossza kisebb mint 0.8 méter?
   Megoldás: Ez a feladat is hasonló módon tárgyalható. Tekintsük az egységnégyzetet, és válasszuk azt a véletlen pontot az egységnégyzeten, melynek x koordinátája megadja, hogy hol törtük el az első botot az y koordinátája pedig azt, hogy hol törtük el a második botot. Ekkor az így definiált pont egyenletes eloszlású az egységnégyzeten. Az az esemény, hogy az összeragasztott bot hossza kisebb mint 0.8 megegyezik annak az eseménynek a valószínűségével, hogy az (x,y) pont a következő A_1, A_2, A_3 és A_4 halmazok $A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4$ uniójába esik: $A_1=\{(x,y)\colon x+y<0.8\}\cap[0,1]\times[0,1]$, $A_2=\{(x,y)\colon x+(1-y)<0.8\}\cap[0,1]\times[0,1]$, $A_3=\{(x,y)\colon 1-x+y<0.8\}\cap[0,1]\times[0,1]$ és $A_4=\{(x,y)\colon 1-x+1-y<0.8\}\cap[0,1]\times[0,1]$. Rajzoljuk le ezeket a halmazokat. Az ábra mutatja, hogy az $A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4$ halmaz komplementere az a négyzet melynek csúcsai a (0.3, 0.5), (0.5, 0,3), (0.7, 0.5), és (0.5, 0.7) pontok. Ennek a négyzetnek a területe, 0.08 tehát a minket érdeklő valószínűség $1-0.08=0.92$.