A február 28.-i gyakorlat feladatai

Fontos megérteni a feltételes valószínűség fogalmát, illetve azt, hogyan kell vele számolni. Ezért több ezzel kapcsolatos feladatot foguk tárgyalni. Előtte azonban felelevenítjük a legfontosabb fogalmakat és eredményeket.

A feltételes valószínűség szemléletesen a következőt jelenti. Egy A esemény $P(A)$ valószínűsége azt fejezi ki, hogy mennyire valószínű annak bekövetkezése. Viszont ennek a bizonyosságnak a mértéke megváltozik, ha tudjuk, hogy egy B esemény bekövetkezett. Ezért definiájuk az A esemény feltételes valószínűségét, feltéve, hogy a B esemény bekövetkezett. Ennek definiciója $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Bár az alábbi azonosság triviális, fontossága miatt érdemes külön megfogalmazni.

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(B), \quad \text{ha } P(A) > 0 \text{ és } P(B) > 0.$$

További egyszerű, de hasznos észrevételek:

Ha $B_1, \dots, B_n$ a valószínűségi mező egy particiója, azaz a $B_1, \dots, B_n$ események diszjunktak, és $\bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k = \Omega$, akkor

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_n) \\ &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n) \end{aligned}$$

minden A halmazra. Ezért

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n)}.$$

Természetesen hasonló összefüggés írható fel a $P(B_j|A)$ feltételes valószínűségre tetsző-leges j indexre. A fenti egyszerű összefüggés fontosságát az adja, hogy lehetővé teszi a $P(B_j|A)$ feltételes valószínűségek kiszámítását a ‘fordított’ $P(A|B_j)$ valószínűségek ismeretében, feltéve, hogy ismerjük a $P(B_j)$ valószínűségeket.

1. Egy diák a feltett kérdésre (három lehetőség közül kell kiválasztani a megfelelőt) p valószínűséggel tudja a helyes választ. Ha nem tudja, akkor tippel, és ez $\dfrac{1}{3}$ valószínűséggel ad helyes eredményt. Mi a feltételes valószínűsége annak, hogy tudja a választ feltéve, hogy helyes választ adott?

   Megoldás: Jelölje A azt az eseményt, hogy a diák tudja a helyes választ, B azt az eseményt, hogy helyes választ ad. Ekkor a $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ feltételes valószínűség értékére vagyunk kiváncsiak. Továbbá $P(A \cap B) = P(A) = p$, $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A}) = P(A) + (1 - P(A))P(B|\bar{A}) = p + \dfrac{1}{3}(1-p)$. Innen $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{p}{p + \frac{1}{3}(1-p)}$.

2.) Bizonyítsuk be a következő azonosságot, amelyet teleszkóp szabálynak is szoktak nevezni: Ha adva vannak $A_1, \ldots, A_k$ események egy valószínűségi mezőn, amelyekre $P(A_1 \cap \cdots \cap A_k) > 0$, akkor

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_k|A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1})$$

Megoldás:

$$\begin{aligned} &P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_k|A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1}) \\ &\quad = P(A_1)\frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)}\frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \cdots \frac{P(A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_{k-1} \cap A_k)}{P(A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1})} \\ &\quad = P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k). \end{aligned}$$

3.) Egy urnában z zöld és s sárga golyó van. Egymás után kihúzunk négy golyót úgy, hogy minden húzás után a golyót visszadobjuk az urnába, és vele együtt az urnába dobunk 2 ellenkező színű golyót. Mi a valószínűsége egy zöld, zöld, zöld, sárga húzássorozatnak?

Megoldás: Kiszámoljuk annak valószínűséségét, hogy az első húzás eredménye Z=(zöld), annak feltételes valószínűségét, hogy a második húzás Z, feltéve, hogy az első húzás Z, annak a feltételes valószínűségét, hogy a harmadik húzás eredménye Z feltéve, hogy előtte Z, Z és annak feltételes valószínűségét, hogy a negyedik húzás eredménye S feltéve, hogy előtte Z, Z, Z húzás volt. Ez a valószínűség, illetve feltételes valószínűségek $\frac{z}{z+s}$, $\frac{z}{z+s+2}$, $\frac{z}{z+s+4}$, $\frac{s+6}{z+s+6}$. A keresett valószínűség $\frac{z}{z+s} \cdot \frac{z}{z+s+2} \cdot \frac{z}{z+s+4} \cdot \frac{s+6}{z+s+6}$.

4.) Reggel valaki hazulról elmenve a lakáskulcsot elteszi, mégpedig úgy, hogy 0.5 valószínűséggel teszi a kabátzsebébe, 0.3 valószínűséggel a nadrágzsebébe és 0.2 valószínűséggel a mellényzsebébe. A nap folyamán mindenfelé jár, ezért a lakáskulcs a kabátzsebéből 0.1, a nadrágzsebéből 0.2, a mellényzsebéből viszont 0 valószínűséggel esik ki. Este hazatérve emberünk először a kabát majd a nadrágzsebében keresi a kulcsot, de egyik helyen sem találja. Mi annak a valószínűsége, hogy a lakáskulcs ott van a mellényzsebében?

Megoldás: Jelölje A_1 azt az eseményt, hogy emberünk a lakáskulcsot a kabát A_2, hogy a nadrág és A_3, hogy a mellényzsebébe tette. Jelölje továbbá B azt az eseményt, hogy a kulcs nem veszett el. Ekkor feltételeink szerint az A_1, A_2 és A_3 események egymást kizáróak, $P(A_1) = 0.5$, $P(A_2) = 0.3$, $P(A_3) = 0.2$ továbbá $P(B|A_1) = 0.9$, $P(B|A_2) = 0.8$ és $P(B|A_3) = 1$. Vezessük be a $C = (\bar{B} \cap A_1) \cup (\bar{B} \cap A_2) \cup A_3$ eseményt. Ekkor C jelenti azt az eseményt, hogy emberünk este nem találta a lakáskulcsot sem a kabát sem a nadrágzsebében. Ezért minket a $P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)}$ feltételes valószínűség érdekel. Viszont $P(C) = P(A_1 \cap \bar{B}) + P(A_2 \cap \bar{B}) + P(A_3) = P(\bar{B}|A_1)P(A_1) + P(\bar{B}|A_2)P(A_2) + P(A_3) =$

$0.1 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.3 + 0.2 = 0.31$, és $P(B \cap C) = P(B \cap A_3) = P(A_3) = 0.2$. Innen a minket érdeklő feltételes valószínűség értéke $\frac{0.2}{0.31} = \frac{20}{31}$.

5.) Mi annak a valószínűsége, hogy egy (szabályos) dobókocka mindkét dobásának az eredménye hatos feltéve, hogy legalább az egyik dobás hatos?

Megoldás: Jelölje A_1 azt az eseményt, hogy az első dobás eredménye hatos, A_2 azt az eseményt, hogy a második dobás eredménye hatos. Akkor minket a $P(A_1 \cap A_2 | A_1 \cup A_2)$ feltételes valószínűség érdekel. Viszont

$$P(A_1 \cap A_2 | A_1 \cup A_2) = \frac{P((A_1 \cap A_2) \cap (A_1 \cup A_2))}{P(A_1 \cup A_2)} = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1 \cup A_2)}.$$

Másrészt $P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{36}$, $P(A_1 \cup A_2) = 1 - P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = 1 - P(\bar{A})P(\bar{B}) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$. Innen a keresett feltételes valószínűség $\frac{1}{11}$.

A következő (egyszerű) feladat célja az, hogy összehasonlítsuk annak eredményét az előbb tárgyalt feladattal, és megbeszéljük mást jelent az a feltételt, hogy két kockadobás közül az egyik hatos, és az hogy adódott hatos dobás. Képesek vagyunk-e szemléletünk alapján számolás nélkül megmondani, melyik feltevés mellett nagyobb annak a feltételes valószínűsége, hogy mind a két dobás hatos?

6.) Egy szabályos dobókockát feldobunk kétszer egymás után. Mi annak a valószínűsége, hogy mind a két dobás hatos, feltéve hogy az első dobás hatos?

Megoldás: Jelölje A_1 azt az eseményt, hogy az első dobás hatos, A_2 pedig azt az eseményt, hogy a második dobás hatos. Ekkor $A_1 \cap A_2$ az az esemény, hogy mind a két dobás hatos, és minket a $P(A_1 \cap A_2 | A_1)$ feltételes valószínűség értéke érdekel. Viszont, $P(A_1 \cap A_2 | A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} = \frac{P(A_1)P(A_2)}{P(A_1)} = P(A_2) = \frac{1}{6}$.

Házi feladat:

Egy szabályos pénzdarabot feldobunk háromszor egymás után. Mi a feltételes valószínűsége annak, hogy mind a három dobás fej, feltéve, hogy legalább két fejdobás történt?

7.) A Fazekas könyv egyik feladata (3.4 Példa a 32. oldalon) arról szól, hogy ha egy n létszámú csoportban r véletlenül kiválasztott diáknak dolgozatot kell írni, mi annak a feltételes valószínűsége, hogy a legrosszabb diáknak is dolgozatot kell írni, feltéve, hogy a legjobb diák is dolgozatot ír.

Heurisztikusan úgy érvelhetünk, hogy ha a legjobb diák dolgozatot ír, akkor annak (feltételes) valószínűsége, hogy a legrosszabb diák is dolgozatot ír, azzal egyenlő, hogy a maradék $n-1$ diák közül őt is kiválasztják a maradék $r-1$ dolgozatíró közé, tehát $\frac{r-1}{n-1}$. Kissé pontosabban, annak valószínűsége, hogy mind a ketten dolgozatot írnak, $\frac{r(r-1)}{n(n-1)}$, annak, hogy a legjobb diák dolgozatot ír $\frac{r}{n}$, ahonnan következik az állítás. Ha a könyvben szereplő eredményt egyszerűbb alakra hozzuk, látjuk hogy az eredmény helyes. Adjunk közvetlen, a szemléletet követő precíz bizonyítást arra, hogy a fenti formulák az adott valószínűségekre helyesek.

Megoldás: Az urna visszatevés nélküli húzás modelljének érvelését alkalmazhatjuk ebben az esetben is. Tegyük fel, hogy egymás után kiválasztjuk a dolgozatot írókat, Minden lépésben az eddig ki nem választottak valamelyikét választjuk ki egyforma valószínűséggel. Ha kijelöljük (az urnából való húzásnál szereplő érvelést használva) egy külön (egy elemű) csoportba a legjobb, egy külön (egy elemű) csoportba a legrosszabb diákot, egy külön csportba az összes többit, akkor rögzítve egy $1 \le j, k \le r$, $j \ne k$ számpárt kapjuk, hogy annak a valószínűsége, hogy a j-ik választásnál választunk az első, a k-ik választáskor a második csoportból, megegyezik annak a valószínűségével, hogy az első választáskor választunk az első és a második választáskor a második csoportból. Ennek valószínűsége viszont $\frac{1}{n(n-1)}$. Mivel a fenti események különböző (j, k) számpárokra kizárják egymást, ezért annak valószínűsége, hogy a legjobb és alegrosszabb diák is dolgozatot ír $\frac{r(r-1)}{n(n-1)}$. Hasonlóan, látható, hogy annak a valószínűsége, hogy a legjobb diák dolgozatot ír az $\frac{r}{n}$ számmal egyenlő.

Házi feladat:

A zsebünkben van 30 kulcs, amelyek közül az egyik nyit egy zárat. Egymás után kipróbáljuk véletlenszerűen kipróbálva ezeket a kulcsokat. Mi a valószínűsége annak, hogy a 20. kisérletre sikerül kinyitni a zárat? Mi annak a valószínűsége, hogy a 20. kisérletben sikerül kinyitni a zárat feltéve, hogy az első 19 kisérletben ez nem sikerült?

8.) Feldobunk egy dobókockát, majd utána annyi dobókockát, amennyi az első dobás eredménye volt. Mi a valószínűsége annak, hogy a második dobássorozatban lesz hatos? Mi annak a feltételes valószínűsége, hogy az első dobás eredménye hatos, feltéve hogy a második dobássorozatban volt hatos?

Megoldás: Tekintsünk azokat az eseményeket, amelyek leírják a lehetséges dobássorozatok eredményét, és adjuk meg ezek valószínűségét. Annak valószínűsége, hogy az első dobás eredménye i, majd ezt követően egy i hosszúságú 1 és 6 közötti számokat tartalmazó dobássorozatot kapunk $\left(\frac{1}{6}\right)^{i+1}$. Annak valószínűsége, hogy az első dobás eredménye i, és az utolsó i dobás egyike sem hatos, $\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{i}$. Annak valószínűsége, hogy a második dobássorozatban van hatos

$$\frac{1}{6}\left(\left(1-\frac{5}{6}\right)+\cdots+\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^{6}\right)\right).$$

Annak valószínűsége, hogy az első dobás hatos, utána pedig van hatos dobás $\frac{1}{6}\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^6\right)$. Ezért a keresett feltételes valószínűség

$$\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^6}{\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)\right)+\cdots+\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^6\right)}.$$

9.) Három gép gyárt csavarokat, az egyik 0.01 a második 0.02 a harmadik 0.03 valószínűséggel gyárt hibás csavarokat. A csavarokat egy raktárba viszik összekeverik. Egy gyártott csavar 0.5 valószínűséggel készült az első 0.3 valószínűséggel a második és 0.2 valószínűséggel készült a harmadik gépen. Kiveszünk egy csavart, megnézzük, és azt találjuk, hogy az hibás. Milyen valószínűséggel készült a csavar eme feltételek mellett az első gépen?

Megoldás: Jelölje A_1, A_2 illetve A_3 azt az eseményt, hogy a csavar az elsó, második vagy harmadik gépen készült, B azt az eseményt, hogy a csavar hibás. Ekkor minket a $P(A_1|B)$ feltételes valószínűség érdekel. Tudjuk, hogy $P(A_1) = 0.5$, $P(A_2) = 0.3$, $P(A_3) = 0.2$, továbbá $P(B|A_1) = 0.01$, $P(B|A_2) = 0.02$, és $PB(B|A_3) = 0.03$. Ekkor

$$\begin{aligned} P(A_1|B) = \frac{P(B\cap A_1)}{P(B)} &= \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B\cap A_1)+P(B\cap A_2)+P(B\cap A_3)} \\ &= \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)} \\ &= \frac{0.01\cdot 0.5}{0.01\cdot 0.5+0.02\cdot 0.3+0.03\cdot 0.2}. \end{aligned}$$