A március 21.-i gyakorlat feladatai

Tekintünk néhány feladatot, amelyek független eseményekkel foglalkoznak.

1.) Adjunk példát egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőre azon három A_1, A_2 és A_3 eseményre, amelyekre $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$, de az A_1, A_2 és A_3 események nem függetlenek.

Egy lehetséges konstrukció: Legyen $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$, $\mathcal{A}$ az Ω halmaz összes részhalmazaiból álló σ-algebra, $P(\{1\}) = x$, $P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = y$, $P(\{5\}) = 1 - x - 3y$, alkalmas x és y számokkal, $P(A) = \sum\limits_{u \in A} P(\{u\})$ minden $A \in \mathcal{A}$ halmazra. Definiáljuk az $A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \{1,3\}$ és $A_3 = \{1,4\}$ halmazokat. Ekkor $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{1\}$, ezért $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = x$. Másrészt $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = x + y$. Válasszuk meg az x és y számokat úgy, hogy $x = (x+y)^3$. Egy lehetőség erre, $x + y = \frac{1}{3}$, és ekkor $x = (x+y)^3 = \frac{1}{27}$, $y = \frac{8}{27}$, továbbá $P(\{5\}) = \frac{2}{27}$. Ebben a példában $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$. Viszont $A_1 \cap A_2 = \{1\} = A_1 \cap A_2 \cap A_3$, így nyílván $P(A_1 \cap A_2) \neq P(A_1)P(A_2)$. Tehát a függetlenség nem teljesül.

2.) Definiálunk egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőt, azon három A_1, A_2, A_3-mal jelölt eseményt, amelyek páronként függetlenek, azaz $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$, $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$ és $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$, de nem teljesül a $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$ azonosság, tehát ezek az események nem függetlenek.

Megoldás: Álljon az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőben Ω 4 pontból, a jobb szemlélhetőség kedvéért legyenek ezek az $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(2,2)$ pontok, álljon $\mathcal{A}$ az Ω halmaz összes részhalmazából, és legyen $P(\{(1,1)\}) = P(\{(1,2)\}) = P(\{(2,1)\}) = P(\{(2,2)\}) = \frac{1}{4}$. Tekintsük az $A_1 = \{(1,1),(1,2)\}$ $A_2 = \{(1,1),(2,1)\}$ és $A_3 = \{(1,1),(2,2)\}$ halmazokat. Ekkor teljesülnek a $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$, $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$ és $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$ azonosságok, mert $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}$, és mivel $A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_3 = \{(1,1)\}$, $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}$. Másrészt, $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)$, mert $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(\{(1,1)\}) = \frac{1}{4}$, és $P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{8}$.

3.) Tekintsük a következő valószínűségi mezőt. $\Omega = \{1, \dots, n\}$, ahol n valamely pozitív egész szám, $\mathcal{A}$ az Ω összes részhalmazaiból álló σ-algebra,

$$P(A) = \frac{\text{az } A \text{ halmaz számossága}}{n}.$$

Legyen $n = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ az n szám prímtényezős felbontása, és definiáljuk a következő A_j eseményeket: $A_j = \{m \colon m \text{ osztható a } p_j \text{ számmal}\}$, $1 \leq j \leq k$. Legyen $B = \{m \colon m \text{ relatív prim az } n \text{ számhoz képest}\}$. Mutassuk meg, hogy

a. Az $A_1, \dots, A_k$ események függetlenek.

b. $P(B) = \prod_{j=1}^{k}\left(1 - \frac{1}{p_j}\right)$, azaz összesen $n \cdot \prod_{j=1}^{k}\left(1 - \frac{1}{p_j}\right)$ n-nél kisebb és az n-hez képest relatív prim van.

Megoldás: $A_j = \left\{p_j, 2p_j, \dots, \frac{n}{p_j}p_j\right\}$ egy $\frac{n}{p_j}$ számból álló halmaz, ezért $P(A_j) = \frac{1}{p_j}$, $1 \le j \le k$. Az $A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_s}$ halmaz az n-nél kisebb $p_{j_1} \cdots p_{j_s}$ számmal osztható számokból áll minden $1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_s \le k$ sorozatra, ezért számossága $\frac{n}{p_{j_1} \cdots p_{j_s}}$, és $P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_s}) = \frac{1}{p_{j_1} \cdots p_{j_s}}$. Ez azt jelenti, hogy $P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_s}) = P(A_{j_1})P(A_{j_2}) \cdots P(A_{j_s})$ minden $1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_s \le k$ sorozatra, ezért az A_1, A_2, ... A_k halmazok függetlenek.

Végül $B = \Omega \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_k) = \bigcap_{j=1}^{k} (\Omega \setminus A_j)$. Ezért és az A_j események függetlensége miatt $P(B) = \prod_{j=1}^{k} P(\Omega \setminus A_j) = \prod_{j=1}^{k}\left(1 - \frac{1}{p_j}\right)$, ahonnan következik a B halmaz számosságára megadott képlet.

Házi feladat:

Egy szabályos pénzdarabot feldobunk százszor. Számoljuk ki a három egymást követő fej-dobásból álló részsorozatok várható értékét és szórásnégyzetét.

Házi feladat:

Adott két urna, mind a kettőben 10 piros és 20 fehér golyó. Kihúzunk 10 alkalommal mind a két urnából egy-egy golyót, az elsőből visszatevéssel, a másodikból visszatevés nélkül. Számítsuk ki azon húzáspárok számának a várható értékét és szórásnégyzetét, amelyekben azonos színű golyót húztunk.

4.) A $[0, 1]$ intervallumra véletlenül ledobunk egy pontot. Jelölje ξ azt a valószínűségi változót, amely megmondja, hogy a pont hova esett. Számítsuk ki a ξ valószínűségi változó eloszás és sűrűségfüggvényét. Számoljuk ki a ξ^2 valószínűségi változónak is az eloszlás és sűrűségfüggvényét.

Megoldás. A ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F(x) = 0$, ha $x \le 0$, $F(x) = x$, ha $0 \le x \le 1$, $F(x) = 1$, ha $x > 1$. A ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye ennek deriváltja, $f(x) = 1$, ha $0 \le x \le 1$, $f(x) = 0$, ha $x < 0$ vagy $x > 1$. A ξ^2 valószínűségi változó $G(x)$ eloszlásfüggvénye: $G(x) = P(\xi^2 < x) = P(-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x})$, ahonnan $G(x) = 0$, ha $x < 0$, $G(x) = \sqrt{x}$ ha $0 \le x \le 1$, $G(x) = 1$, ha $x > 1$. ξ^2 $g(x)$ sűrűségfüggvénye: $g(x) = 0$, ha $x < 0$ vagy $x > 1$, $g(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$, ha $0 \le x \le 1$.

A gyakorlaton tárgyalt feladatok elméleti hátteréről. II.

Fontos megtanulni, hogyan lehet kiszámítani általános valószínűségi változók várható értékét és szórásnégyzetét. Ilyen jellegű feladatokat fogunk tárgyalni. De ennek érdekében először meg kell értenünk néhány fontos fogalmat illetve néhány fontos eredmény jelentését. Ezért felelevenítek bizonyos az előadáson már tárgyalt fontos ismeretet. A várható érték tárgyalása előtt meg kell ismernünk az eloszlásfüggvény fogalmát. Meg kell értenünk azt, hogy hogyan tudjuk kiszámolni a várható értéket az eloszlásfüggvény segítségével. Később rátérünk a sűrűségfüggvény fogalmának ismertetésére is, és arra, hogy hogyan tudjuk kiszámolni a várható értéket a sűrűségfüggvény ismeretében.

Valószínűségi változó eloszlásfüggvényének a definiciója. *Legyen adva egy $\xi(\omega)$ (valós értékű) valószínűségi változó egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Ennek $F(x)$ eloszlásfüggvényén az $F(x) = P(\{\omega\colon \xi(\omega) < x\})$, $-\infty < x < \infty$, függvényt értjük.*

Tétel. *Legyen $\xi(\omega)$ valószínűségi változó egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, és legyen $F(x) = P(\{\omega\colon \xi(\omega) < x\})$, $-\infty < x < \infty$, e valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. Az $F(x)$ eloszlásfüggvény teljesíti a következő tulajdonságokat.*

a) *$F(x)$ monoton növekvő függvény.*
b) *$F(x)$ balról folytonos függvény, azaz $\lim\limits_{h\to 0,\, h>0} F(x-h) = F(x)$ minden $-\infty < x < \infty$ számra.*
c) $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$.
d) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

Megfordítva, ha egy $F(x)$ függvény teljesíti az előbb megfogalmazott a)—d) tulajdonságokat, akkor az eloszlásfüggvény. Részletesebben megfogalmazva ez azt jelenti, hogy ha az $F(x)$ függvény teljesíti az a)—d) feltételeket, akkor létezik egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, és azon olyan $\xi(\omega)$ valószínűségi változó, amelynek az eloszlásfüggvénye ez az $F(x)$ függvény.

Valószínűségi változó várható értékének *formális* **definiciója.** *Legyen $\xi(\omega)$ valószínűségi változó egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. E valószínűségi változó várható értékét úgy definiáljuk, mint a $\xi(\omega)$ függvénynek az*

$$E\xi(\omega) = \int \xi(\omega)dP(\omega)$$

Lebesgue integrálját a P valószínűségi mérték szerint, feltéve, hogy $\int |\xi(\omega)|dP(\omega) < \infty$. Ha ez a feltétel nem teljesül, akkor nem definiáljuk a ξ valószínűségi változó várható értékét.

A Lebesgue integrál fogalmának pontos ismerete nem szükséges a továbbiak megértéséhez és a tárgyalt feladatok megoldásához. Érdemes megjegyezni, hogy ez egy a valószínűségi mezőn értelmezett függvénynek azaz valószínűségi változónak a valószínűségi mezőn definiált valószínűségi mérték szerinti integrálja. Ez az integrálfogalom hasonló a tanult Lebesgue integrál fogalmához. Először egyszerű (véges sok értéket felvevő) függvények integrálát definiáljuk természetes módon, majd természetes határátmenet segítségével ezt az integrált értelmezzük általános függvények esetén is. A defició fogalmilag nem nehéz, de a részletes elmélet kidolgozása mély mértékelméleti eredmények ismeretét igényli. Erre nem lesz szükségünk, viszont nagyon fontos tudni, hogy noha a várható érték fogalmát a valószínűségi mező és a rajta definiált valószínűségi változó és valószínűségi mérték segítségével definiáltuk, ahhoz, hogy kiszámoljuk elegendő a valószínűségi változó eloszlásának az ismerete. Ezt az alábbi jelentősége miatt *fontos tételnek* nevezett eredmény segítségével tehetjük meg.

Fontos Tétel. *Legyen $\xi(\omega)$ valószínűségi változó egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, amelynek $F(x)$ az $F(x) = P(\xi < x)$, $-\infty < x < \infty$, eloszlásfüggvénye. Ekkor*

$$E\xi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} xF(\,dx),$$

ahol a fenti integrál Lebesgue–Stieltjes integrált jelöl az F mérték szerint. Ez a formula akkor érvényes, ha $\int_{-\infty}^{\infty} |x|F(\,dx) < \infty$. Ellenkező esetben az $E\xi$ várható értéket nem definiáltuk.

Sőt, igaz a Fontos Tétel következő általánosítása.

A Fontos Tétel általánosítása. *Legyen $\xi(\omega)$ valószínűségi változó egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, amelynek $F(x)$ az $F(x) = P(\xi < x)$, $-\infty < x < \infty$, eloszlásfüggvénye. Legyen $g(x)$ tetszőleges (mérhető) függvény a számegyenesen, és definiáljuk az $\eta(\omega) = g(\xi(\omega))$ valószínűségi változót. Ekkor*

$$E\eta(\omega) = Eg(\xi(\omega)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)F(\,dx),$$

ahol a fenti integrál Lebesgue–Stieltjes integrált jelöl az F mérték szerint. Ez a formula akkor érvényes, ha $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|F(\,dx) < \infty$. Ellenkező esetben az $E\eta$ várható értéket nem definiáltuk.

Tétel. *Ha két ξ_1, ξ_2 valószínűségi változónak (amelyek ugyanazon a valószínűségi mezőn vannak definiálva) létezik várható értéke, c_1 és c_2 két valós szám, akkor a $c_1\xi_1 + c_2\xi_2$ kifejezésnek is létezik várható értéke, és*

$$E\left(c_1\xi_1 + c_2\xi_2\right) = c_1E\xi_1 + c_2E\xi_2.$$

Szórásnégyzet definiciója. *Legyen ξ olyan valószínűségi változó, amelyre $E\xi^2 < \infty$. Ekkor e valószínűségi változó szórásnégyzete*

$$\operatorname{Var}\xi = E\left(\xi - E\xi\right)^2$$

(Ha $E\xi^2 = \infty$, akkor vagy nem definiáljuk a ξ valószínűségi változó szórásnégyzetét, vagy azt mondjuk, hogy $\operatorname{Var}\xi(\omega) = \infty$.)

Lemma.

$$\operatorname{Var}\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 .$$

Sűrűségfüggvény definiciója. *Egy $F(x)$ eloszlásfüggvénynek az $f(u)$, $-\infty < u < \infty$, függvény sűrűségfüggvénye, ha minden $-\infty < x < \infty$ számra teljesül az*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\, du$$

azonosság.

Megjegyzés: Többször fogunk beszélni egy valószínűségi változó sűrűségfüggvényéről is. Ez azt jelenti, hogy e valószínűségi változó eloszlásfüggvényének a sűrűségfüggvényét tekintjük. Sok érdekes és fontos eloszlásfüggvénynek létezik sűrűségfüggvénye, de nem mindegyiknek. Például egy diszkrét eloszlású valószínűségi változónak nincs sűrűségfüggvénye.

Tétel. *Ha egy $F(x)$ eloszlásfüggvénynek létezik $f(u)$ sűrűségfüggvénye, akkor ez teljesíti minden $g(\cdot)$ függvényre a következő azonosságot:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(u)F(\,du) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)f(u)du.$$

Newton–Leibniz formula. *Legyen $F(x)$ folytonos függvény egy $[a,b]$ véges intervallumon, amely véges sok pont kivételével folytonosan deriválható. Legyen $f(u) = \left.\dfrac{dF(x)}{dx}\right|_{x=u}$ minden pontban, ahol az $F(\cdot)$ differenciálható. Ekkor $F(x) - F(a) = \int_a^x f(u)\, du$ minden $a \le x \le b$ számra. Továbbá, ha a fenti feltétel teljesül minden véges $[a,b]$ intervallumban, és létezik a $F(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$ határérték, akkor $F(x) - F(-\infty) = \int_{-\infty}^x f(u)\, du$ minden $-\infty < x < \infty$ számra.*

Megfordítva, ha $f(u)$, (pontosabban annak abszolut értéke) integrálható függvény egy $[a,b]$ intervallumban, és $F(x) = \int_a^x f(u)\, du$, $a \le x \le b$, akkor $f(u) = \left.\dfrac{dF(x)}{dx}\right|_{x=u}$ (majdnem) minden $a \le u \le b$ pontban. Ha az $f(u)$ függvény integrálható az egész számegyenesen, akkor a fenti állítás igaz $a = -\infty$ választással is.

Megjegyzés: A Newton–Leibniz formula jelentősége számunkra az, hogy eszerint az eredmény szerint a sűrűségfüggvény (feltéve, hogy az létezik) egyenlő az eloszlásfüggvény deriváltjával. Megfordítva, a sűrűségfüggvény ismeretében meg tudjuk határozni az eloszlásfüggvényt. Annak értéke az x pontban megegyezik a sűrűségfüggvény integráljával a $[-\infty, x]$ intervallumban.

Tétel. *Egy $f(\cdot)$ (mérhető) függvény akkor és csak akkor sűrűségfüggvénye egy alkalmas eloszlásfüggvénynek, ha $f(u) \ge 0$ majdnem minden $-\infty < u < \infty$ számra, és $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, du = 1$.*

Tétel. *Jelölje* $F(\cdot)$ *illetve* $f(\cdot)$ *egy* ξ *valószínűségi változó eloszlás illetve sűrűségfüggvényét. Legyen* $g(\cdot)$ *mérhető függvény a számegyenesen. Ekkor*

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} uF(\,du) = \int_{-\infty}^{\infty} uf(u)\,du$$

és

$$Eg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)F(\,du) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)f(u)\,du.$$