A március 28.-i gyakorlat feladatai

1.) Tekintsük egy szabályos dobókocka feldobását, illetve azt a valószínűségi változót, amely megmondja mi a dobás eredménye. Adjuk meg ennek a ξ valószínűségi változónak az $F(x)$ eloszlásfüggvényét.

Megoldás: Ez a ξ valószínűségi változó az 1, 2, 3, 4, 5 és 6 értékek valamelyikét veszi fel, mindegyiket $\frac{1}{6}$ valószínűséggel. Ezért annak a valószínűsége, hogy $P(\xi < x)$ nullával egyenlő, ha $x < 1$. Sőt $x = 1$ esetében is teljesül a $P(\xi < 1) = 0$ azonosság, mert annak valószínűségét nézzük, hogy a ξ valószínűségi változó szigorúan kisebb mint az x szám. Ezért $F(x) = 0$, ha $-\infty < x \le 1$. Ha $1 < x < 2$, akkor az $\{\omega\colon \xi(\omega) < x\}$ esemény azt jelenti, hogy a dobás eredménye 1. Ez az állítás igaz $x = 2$ esetében is. Ezért $F(x) = \frac{1}{6}$, ha $1 < x \le 2$. Ha $2 < x \le 3$, akkor az $\{\omega\colon \xi(\omega) < x\}$ esemény azt jelenti, hogy a dobás eredménye 1 vagy 2. Ezért $F(x) = \frac{2}{6}$, ha $2 < x \le 3$. Ezt a gondolatot végigkövetve kapjuk, hogy $F(x) = 0$, ha $-\infty < x \le 1$, $F(x) = \frac{j}{6}$, ha $j < x \le j+1$, $1 \le j \le 5$, és $F(x) = 1$, ha $6 < x < \infty$,

Házi feladat:

Feldobunk egy pénzdarabot, amely p valószínűséggel esik a fej, $1-p$ valószínűséggel az írás oldalra kétszer egymástól függetlenül. Jelölje ξ azt a valószínűségi változót, amely a fejdobások számát adja meg. Adjuk meg a ξ valószínűségi változó $F(x)$ eloszlásfüggvényét.

2.) Legyen ξ valószínűségi változó $f(u)$ sűrűségfüggvénnyel, a és b valós számok. Határozzuk meg az $\eta = a\xi + b$ és $\zeta = \xi^2$ valószínűségi változók sűrűségfüggvényét.

Megoldás: Legyen $F(x) = P(\xi < x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$ a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. Ekkor az $\eta = a\xi + b$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a $G(x) = P(\eta < x) = P\left(\xi < \dfrac{x-b}{a}\right) = F\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$ függvény, ha $a > 0$, és $G(x) = P(\eta < x) = P\left(\xi > \dfrac{x-b}{a}\right) = 1 - F\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$, ha $a < 0$. Innen η sűrűségfüggvénye $g(x) = \dfrac{dG(x)}{dx} = \dfrac{1}{|a|} f\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$.

A $\zeta = \xi^2$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$G(x) = P(\xi^2 < x) = P\left(-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}\right) = F\left(\sqrt{x}\right) - F\left(-\sqrt{x}\right),$$

ha $x \ge 0$, és $G(x) = 0$, ha $x < 0$. Innen deriválással ζ sűrűségfüggvénye $g(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(f\left(\sqrt{x}\right) + f\left(-\sqrt{x}\right)\right)$, ha $x > 0$, és $g(x) = 0$, ha $x < 0$.

Házi feladat:

Legyen egy ξ valószínűségi változónak $f(x)$ sűrűségfüggvénye. Számítsuk ki ξ^3 és ξ^4 sűrűségfüggvényét.

3.) Azt mondjuk, hogy egy λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

Lássuk be, hogy $f_\lambda(x)$ valóban sűrűségfüggvény.

Megoldás: Azt kell belátni, hogy $f_\lambda(x) \geq 0$ minden $-\infty < x < \infty$ számra, ami a definició nyílvánvaló következménye, és $\int_{-\infty}^{\infty} f_\lambda(x)\,dx = 1$. Viszont $\int_{-\infty}^{\infty} f_\lambda(x)\,dx = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^\infty = 1 - 0 = 1$.

4.) Számítsuk ki egy λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó momentumait, azaz számítsuk ki az $E\xi^k$, $k = 1, 2, \dots$, várható értékeket egy olyan ξ valószínűségi változó esetében, amelynek sűrűségfüggvénye $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, ha $x \geq 0$, és $f(x) = 0$, ha $x < 0$.

Megoldás: $E\xi^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_\lambda(x)\,dx$, ezt az integrált kell kiszámítani minden $k = 1, 2, \dots,$ számra. Alkalmazva az $u = \lambda x$ helyettesítést azt kapjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k f_\lambda(x)\,dx = \int_0^\infty x^k \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \lambda^{-k} \int_0^\infty u^k e^{-u}\,du.$$

Parciális integrálással

$$\begin{aligned}\int_0^\infty u^k e^{-u}\,du &= \int_0^\infty u^k \left(-e^{-u}\right)'\,du = \left[-u^k e^{-u}\right]_0^\infty + \int_0^\infty k u^{k-1} e^{-u}\,du \\ &= k \int_0^\infty u^{k-1} e^{-u}\,du,\end{aligned}$$

ahonnan teljes indukcióval azt kapjuk, hogy $\int_0^\infty u^k e^{-u}\,du = k!$. Innen $E\xi^k = k!\lambda^{-k}$.

5.) Legyen ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó egy $[a, b]$ intervallumban, azaz legyen annak a valószínűsége, hogy a ξ valószínűségi változó egy $[u, v] \subset [a, b]$ intervallumba esik $\frac{v-u}{b-a}$. Számítsuk ki a ξ valószínűségi változó eloszlás és sűrűségfüggvényét, valamint várható értékét és szórásnégyzetét.

Megoldás: A ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F(x) = 0$, ha $x \leq a$, $F(x) = \frac{x-a}{b-a}$, ha $a \leq x \leq b$, $F(x) = 1$, ha $x > b$. Ugyanis $F(x) = P(\xi < x)$, és ez a valószínűség 0-val egyenlő, ha $x < a$, 1-gyel egyenlő, ha $x > b$, és $P(\xi < x) = P(a \leq \xi < x) = \frac{x-a}{b-a}$. A ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$, ezért $f(x) = 0$, ha $x < a$ vagy $x > b$, és $f(x) = \frac{1}{b-a}$. Innen $E\xi = \int x f(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{b-a}\,dx = \left[\frac{x^2}{2(b-a)}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{a+b}{2}$, $E\xi^2 = \int x^2 f(x)\,dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$. Innen $\operatorname{Var}\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{4(a^2+b^2+ab)-3(a+b)^2}{12} = \frac{a^2+b^2-2ab}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$.