A március 7.-i gyakorlat feladatai

1.) Bizonyítsuk be a következő azonosságot, amelyet teleszkóp szabálynak is szoktak nevezni: Ha adva vannak $A_1, \dots, A_k$ események egy valószínűségi mezőn, amelyekre $P(A_1 \cap \dots \cap A_k) > 0$, akkor

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_k|A_1 \cap \dots \cap A_{k-1})$$

Megoldás:

$$\begin{aligned}
&P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_k|A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}) \\
&\quad = P(A_1)\frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)}\frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \cdots \frac{P(A_1 \cap A_2 \dots \cap A_{k-1} \cap A_k)}{P(A_1 \cap \dots \cap A_{k-1})} \\
&\quad = P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k).
\end{aligned}$$

2.) Két különböző fáról leszednek 100 almát, és beteszik két különböző (megkülönböztethetetlen) ládába. Ez egyik fáról szedett almák (egymástól függetlenül) $\frac{1}{4}$ a másik fáról szedett almák pedig (szintén egymástól függetlenül) $\frac{1}{10}$ valószínűséggel férgesek. Kiveszünk az egyik (véletlenül kiválasztott) ládából két almát és mind a kettő férges. Ezek után kiveszünk a másik ládából egy almát. Mi annak a valószínűsége, hogy ez az alma már nem férges?

Megoldás: Értsük meg először pontosabban a feladatot. Jelölje B azt az eseményt, hogy első alkalommal a rosszabb fáról leszedett almákat tartalmazó ládához nyúlunk. Ekkor egyrészt $P(B) = \frac{1}{2}$. Másrészt, ha egymás után, esetleg váltogatva a ládákat kiveszünk egymás után a ládákból almákat, definiáljuk a $j_1, \dots, j_k$ húzássorozatot, ahol mindegyik $j_s = \pm 1$, $j_1 = 1$, $j_s = 1$ azt jelenti, hogy a s-ik húzás során az elsőnek kiválasztott ládából, $j_s = -1$ pedig azt, hogy a másik ládából választottunk almát, akkor $A(j_1, \dots, j_n)$-nel jelölve azt az eseményt, hogy minden kiválasztott alma férges, felírhatjuk, hogy

$$P(A(j_1, \dots, j_n)|B) = \left(\frac{1}{4}\right)^{u(j_1,\dots,j_n)} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-u(j_1,\dots,j_n)},$$
$$P(A(j_1, \dots, j_n)|\bar{B}) = \left(\frac{1}{10}\right)^{u(j_1,\dots,j_n)} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-u(j_1,\dots,j_n)},$$

ahol $u(j_1, \dots, j_n)$ jelöli a $j_1, \dots, j_n$ sorozatban szereplő $+1$ jelek számát. Hasonlóan fel tudjuk írni annak feltételes valószínűségét, hogy egy előírt húzássorozat esetén, amelyikben megmondjuk, hogy mikor melyik ládából húztunk almát a férges és jó almahúzásoknak előírt sorozata jelenik meg, feltéve a B eseményt vagy annak komplementerét, a $\bar{B}$ eseményt. Jelölje C azt az eseményt, hogy az első két húzásban férges almát húzunk, D pedig azt, hogy a harmadik húzásban (a láda megváltoztatása után) jó almát húzunk. Ekkor a $P(D|C) = \dfrac{P(C \cap D)}{P(C)}$ feltételes valószínűséget akarjuk kiszámolni. Viszont,

$$P(C) = P(C|B)P(B) + P(C|\bar{B})P(\bar{B}) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^2\right) = \frac{29}{800},$$

$$\begin{aligned} P(C \cap D) &= P(C \cap D|B)P(B) + P(C \cap D|\bar{B})P(\bar{B}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2 \frac{9}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^2 \frac{3}{4}\right) = \frac{51}{1600}. \end{aligned}$$

Innen $P(D|C) = \dfrac{P(C \cap D)}{P(C)} = \dfrac{51}{58}$.

Házi feladat.

Adott két sziget, az igazmondók és a hazugok szigete. Az igazmondók szigetén mindenki 0.9 valószínűséggel igaz választ ad a feltett kérdésre, a hazugok szigetén mindenki 0.8 valószínűséggel hamis választ ad. Valaki éjjel a viharos tengeren hajózva eljut a két sziget valamelyikére, 1/2 valószínűséggel az igazmondók szigetére, 1/2 valószínűséggel a hazugok szigetére. Megkérdezi az első szembejövő embert, hogy az igazmondók szigetére jutott-e. Azt a választ kapja, hogy nem. Mi a valószínűsége annak, hogy az igazmondók szigetére került?

3a. Legyenek $A_1, A_2, \ldots,$ események egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Lássuk be, hogy $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right)$ jelöli azt az eseményt, hogy az $A_1, A_2, \ldots,$ események közül véges sok kivétellel mindegyik bekövetkezik.

Megoldás: Az, hogy az A_n események majdnem mindegyike bekövetkezik, azt jelenti, hogy van olyan n szám, amelyre igaz, hogy minden $k \geq n$ indexre bekövetkezik az A_k esemény, azaz a $B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ esemény is bekövetkezik. Az, hogy a B_n esemény bekövetkezik valamely n számra azt jelenti, hogy bekövetkezik az $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right)$ esemény.

3b. Legyenek $A_1, A_2, \ldots,$ események egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Lássuk be, hogy $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)$ jelöli azt az eseményt, hogy az $A_1, A_2, \ldots,$ események közül végtelen sok esemény bekövetkezik.

Megoldás: Az, hogy az A_n események közül végtelen sok bekövetkezik, azt jelenti, hogy minden n számhoz van olyan $k \geq n$ index, amelyre az A_k esemény bekövetkezik, azaz a $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ esemény minden n számra bekövetkezik. Az, hogy a B_n esemény bekövetkezik minden n számra azt jelenti, hogy bekövetkezik az $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right)$ esemény.

4. Egy (szabályos) pénzdarabot feldobunk végtelen sokszor. Jelölje A_k azt az eseményt, hogy a k-ik dobás fej, $k = 1, 2, \dots$. Fejezzük ki az A_k események segítségével (megszámlálható unió, megszámlálható metszet, komplementerképzés műveletek felhasználásával), azt az E eseményt, hogy a fejdobások számának a relatív gyakorisága tart az $\frac{1}{2}$-hez.

   Megoldás: Az E esemény bekövetkezte azt jelenti, hogy minden $m = 1, 2, \dots$ egész számra bekövetkezik a következő $B(m)$ esemény: Minden elég nagy n számra teljesül a következő $C(m,n)$ esemény. Az első n dobásban bekövetkezett fej-dobások száma nagyobb, mint $n(\frac{1}{2} - \frac{1}{m})$ és kisebb, mint $n(\frac{1}{2} + \frac{1}{m})$. Innen

$$E = \bigcap_{m=1}^{\infty} B(m) = \bigcap_{m=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\bigcap_{n=k}^{\infty} C(m,n)\right)\right).$$

   Ezért a feladat megoldásához elegendő a $C(m,n)$ eseményeket a kívánt módon kifejezni. Ennek érdekében minden $n = 1, 2, \dots$ számra vezessük be az $\{1, \dots, n\}$ halmaz bizonyos $\{j_1, \dots, j_s\}$: $1 \le j_1 < j_2 < \dots, j_s \le n\}$ részhalmazaiból álló $U(m,n)$ halmazt a következő módon: $\{j_1, \dots, j_s\} \in U(m,n)$ akkor és csak akkor, ha $1 \le j_1 < j_2 < \dots, j_s \le n$, és $n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m}\right) < s < n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m}\right)$. Definiáljuk továbbá minden $\{j_1, \dots, j_s\}$; $1 \le j_1 < j_2 < \dots, j_s \le n$ alakú halmazra a

$$D(n; j_1, \dots, j_s) = \bigcap_{l \in \{j_1, \dots, j_s\}} A_l \cap \bigcap_{l \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j_1, \dots, j_s\}} (\Omega \setminus A_l)$$

   halmazt. Ekkor

$$C(m,n) = \bigcup_{\{j_1, \dots, j_l\} \in U(m,n)} D(n; j_1, \dots, j_s),$$

   és ez megadja a $C(m,n)$ halmaz egy kívánt alakú előállítását.

5. Ha egy szabályos pénzdarabot végtelen sokszor feldobunk egymás után, akkor egy valószínűséggel lesz legalább 50 fejdobás.

   Egy lehetséges megoldás: Az is igaz egy valószínűséggel, hogy a

$$B_k = \{\text{azon } j \text{ indexekre, amelyekre } 50k \le j < 50(k+1) \text{ minden dobás fej}\}$$

   események közül végtelen sok fog bekövetkezni. Ugyanis ezek a B_k események függetlenek, $P(B_k) = 2^{-50}$, tehát $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(B_k) = \infty$. Ezért a Borel–Cantelli lemmából következik a kívánt állítás, sőt az is, hogy végtelen sok B_k esemény következik be egy valószínűséggel. Valójában a Borel–Cantelli lemmára nincs is szükség. Annak valószínűsége, hogy egyik B_k esemény sem következik be $\lim\limits_{N\to\infty}\left(1 - 2^{-50}\right)^N = 0$, tehát egy valószínűséggel valamelyik B_k esemény bekövetkezik.

6. Egy 100 tagú társaság minden egyes tagja egymástól függetlenül $\frac{1}{1000}$ valószínűséggel betegszik meg. Mi annak a valószínűsége, hogy a társaságnak lesz beteg tagja? A kapott eredményről mit mondhatunk? Az nagyon nagy, majdnem 1 vagy nagyon kicsi majdnem nulla?

   Megoldás: Jelölje A_j azt az eseményt, hogy a társaság j-ik megbetegszik meg. Ekkor a $P(A_j) = \frac{1}{1000}$, és az A_j események függetlenek. Számoljuk ki először a minket érdeklő esemény komplementerének, azaz annak az eseménynek a valószínűségét, hogy mindenki egészséges. Ez az $\bigcap\limits_{j=1}^{1000} (\Omega \setminus A_j)$ esemény. Mivel $P(\Omega \setminus A_j) = 1 - \frac{1}{1000}$, és az A_j események függetlenségéből következik az $\Omega \setminus A_j$ események függetlensége is, ezért $P\left(\bigcap\limits_{j=1}^{1000} (\Omega \setminus A_j)\right) = \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{100}$. Innen a minket érdeklő esemény valószínűsége $1 - \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{100}$.

   Végül jegyezzük meg, hogy $\left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{100} = \left(\left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{1000}\right)^{1/10} \sim e^{-1/10}$. Miért? Ez a szám nagyon közel van az egyhez, ezért a minket érdeklő valószínűség értéke kicsi.

7. Tekintsük a következő valószínűségi mezőt. $\Omega = \{1, \dots, n\}$, ahol n valamely pozitív egész szám, $\mathcal{A}$ az Ω összes részhalmazaiból álló σ-algebra,

$$P(A) = \frac{\text{az } A \text{ halmaz számossága}}{n}.$$

   Legyen $n = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ az n szám prímtényezős felbontása, és definiáljuk a következő A_j eseményeket: $A_j = \{m \colon m \text{ osztható a } p_j \text{ számmal}\}$, $1 \le j \le k$. Legyen $B = \{m \colon m \text{ relatív prim az } n \text{ számhoz képest}\}$. Mutassuk meg, hogy

   a. Az $A_1, \dots, A_k$ események függetlenek.

   b. $P(B) = \prod\limits_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right)$, azaz összesen $n \cdot \prod\limits_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right)$ n-nél kisebb és az n-hez képest relatív prim van.

   Megoldás: $A_j = \left\{p_j, 2p_j, \dots, \frac{n}{p_j} p_j\right\}$ egy $\frac{n}{p_j}$ számból álló halmaz, ezért $P(A_j) = \frac{1}{p_j}$, $1 \le j \le k$. Az $A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_s}$ halmaz az n-nél kisebb $p_{j_1} \cdots p_{j_s}$ számmal osztható számokból áll minden $1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_s \le k$ sorozatra, ezért számossága $\frac{n}{p_{j_1} \cdots p_{j_s}}$, és $P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_s}) = \frac{1}{p_{j_1} \cdots p_{j_s}}$. Ez azt jelenti, hogy $P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_s}) = P(A_{j_1}) P(A_{j_2}) \cdots P(A_{j_s})$ minden $1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_s \le k$ sorozatra, ezért az A_1, A_2, … A_k halmazok függetlenek.

Végül $B = \Omega \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_k) = \bigcap_{j=1}^{k} (\Omega \setminus A_j)$. Ezért és az A_j események függetlensége miatt $P(B) = \prod_{j=1}^{k} P(\Omega \setminus A_j) = \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right)$, ahonnan következik a B halmaz számosságára megadott képlet.

8. Egy urnában 30 piros és 70 fehér golyó van. Kihúzunk 20 golyót. Mi a valószínűsége annak, hogy az első 10 húzásban 5 piros golyót húzunk, a második 10 húzásban megint 5 piros golyót húzunk, ha
   a.) A golyókat visszatevéssel húzzuk?
   b.) A golyókat visszatevés nélkül húzzuk?

   Megoldás: Az a) esetben a válasz $\left(\binom{10}{5}\left(\frac{3}{10}\right)^5\left(\frac{7}{10}\right)^5\right)^2$. A b) esetben $\frac{\binom{30}{5}\binom{70}{5}}{\binom{100}{10}} \frac{\binom{25}{5}\binom{65}{5}}{\binom{90}{10}}$.

   Házi feladat.

   Mi a valószínűsége annak, hogy az előző feladatban tekintett húzássorozatban az első 10 húzásban 5 piros golyót húzunk, a második 10 húzásban megint 5 piros golyót húzunk, ha az első 10 húzásban visszatevéssel, a második 10 húzásban visszatevés nélkül húzunk?