A november 14-i gyakorlat témája

1.) Száz alkalommal a következő (független) kisérletet végezzük. Ledobunk egy pontot egyenletes eloszlással a $[0,3]$ intervallumra, és feldobunk egy szabályos szabályos dobókockát egymástól függetlenül. Ha hatost dobtunk a kockával megnyerjük a ledobott pont értékének a kétszerését, ha egyest dobunk, akkor annyi büntetést kell fizetnünk, amennyi a ledobott pont értéke. Számítsuk ki nyereményünk várható értékét és szórásnégyzetét.

Megoldás: Jelölje ζ_j, $1 \le j \le 100$, a j-ik fordulóban szerzett nyereményünket, és számoljuk ki az $E\zeta_j$ várható értéket és $\mathrm{Var}\,\zeta_j$ szórásnégyzetet. Ennek érdekében vezessük be a következő ξ_j és η_j valószínűségi változókat: ξ_j a j-ik ledobott pont helye a $[0,3]$ intervallumban, $\eta_j = 2$, ha a j-ik kockadobás eredménye hatos, $\eta_j = -1$, ha a j-ik dobás eredménye 1, és $\eta_j = 0$, ha a j-ik kockadobás értéke 2, 3, 4 vagy 5. Ekkor $\zeta_j = \xi_j\eta_j$, és $E\zeta_j = E\xi_j E\eta_j$, $E\zeta_j^2 = E\xi_j^2 E\eta_j^2$ a ξ_j és η_j valószínűségi változók függetlensége miatt. Innen $E\xi_j = \frac{1}{3}\int_0^3 u\,du = \left[\frac{u^2}{6}\right]_0^3 = \frac{3}{2}$, $E\xi_j^2 = \frac{1}{3}\int_0^3 u^2\,du = \left[\frac{u^9}{3}\right]_0^3 = 3$, $E\eta_j = \frac{1}{6}(2-1) = \frac{1}{6}$, $E\eta_j^2 = \frac{1}{6}(4+1) = \frac{5}{6}$, ahonnan $E\zeta_j = \frac{1}{4}$, $E\zeta_j^2 = \frac{5}{2}$. Ezért $E\zeta_j = \frac{1}{4}$, $\mathrm{Var}\,\zeta_j = E\zeta_j^2 - (E\zeta_j)^2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{16} = \frac{39}{16}$, és a keresett várható érték és szórásnégyzet $E\left(\sum\limits_{j=1}^{100}\zeta_j\right) = \sum\limits_{j=1}^{100} E\zeta_j = 25$, $\mathrm{Var}\left(\sum\limits_{j=1}^{100}\zeta_j\right) = \sum\limits_{j=1}^{100}\mathrm{Var}\,\zeta_j = \frac{3900}{16}$.

2.) Legyen ξ valószínűségi változó $f(u)$ sűrűségfüggvénnyel, a és b valós számok. Határozzuk meg az $\eta = a\xi + b$ és $\zeta = \xi^2$ valószínűségi változók sűrűségfüggvényét.

Megoldás: Legyen $F(x) = P(\xi < x) = \int_{-\infty}^x f(u)\,du$ a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. Ekkor az $\eta = a\xi + b$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a $G(x) = P(\eta < x) = P\left(\xi < \frac{x-b}{a}\right) = F\left(\frac{x-b}{a}\right)$ függvény, ha $a > 0$, és $G(x) = P(\eta < x) = P\left(\xi > \frac{x-b}{a}\right) = 1 - F\left(\frac{x-b}{a}\right)$, ha $a < 0$. Innen η sűrűségfüggvénye $g(x) = \frac{dG(x)}{dx} = \frac{1}{|a|}f\left(\frac{x-b}{a}\right)$.

A $\zeta = \xi^2$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$G(x) = P(\xi^2 < x) = P\left(-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}\right) = F\left(\sqrt{x}\right) - F\left(-\sqrt{x}\right),$$

ha $x \ge 0$, és $G(x) = 0$, ha $x < 0$. Innen deriválással ζ sűrűségfüggvénye $g(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(f\left(\sqrt{x}\right) + f\left(-\sqrt{x}\right)\right)$.

3.) Ha ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó, m, σ valós számok, akkor az $\sigma\xi+m$ valószínűségi változó várható értéke m szórásnégyzete σ^2, sűrűségfüggvénye pedig $g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}|\sigma|}e^{-(u-m)^2/2\sigma^2}$.

Megoldás: $E(\sigma\xi + m) = \sigma E\xi + m = m$, és $\mathrm{Var}\,(\sigma\xi + m) = \sigma^2\mathrm{Var}\,\xi = \sigma^2$. Továbbá, az előző feladat eredménye alapján a $\sigma\xi+m$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye az $f(x) = \frac{1}{|\sigma|}\varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$, ahol $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$, a standard normális sűrűségfüggvény. Innen következik a feladat állítása.

4.) Ha ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó, akkor$E\xi^{2k-1} = 0$, $E\xi^{2k} = 1 \cdot 3 \cdots (2k-1)$ minden $k = 1, 2, \ldots$ számra.

Számítsuk ki egy λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó momentumait.

Megoldás:

$$E\xi^{2k-1} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k-1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx = 0,$$

mert az integrandus páratlan függvény. Másrészt parciális integrálással $f(x) = x^{2k-1}$ és $g(x) = x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\right)$ kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} E\xi^{2k} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}(2k-1)x^{2k-2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx \\ &= (2k-1)E\xi^{2k-2}. \end{aligned}$$

Innen k szerinti indukcióval kapjuk a feladat második állítását.

5.) Számítsuk ki egy az $[a, b]$ intervallumban egyenletes eloszlású ξ valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.

Megoldás:

$$E\xi = \int_a^b u\frac{1}{b-a}\,du = \frac{1}{b-a}\left[\frac{u^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2},$$

$$\operatorname{Var}\xi = E\left(\xi - \frac{b-a}{2}\right)^2 = \int_a^b \left(u - \frac{b-a}{2}\right)^2 \frac{1}{b-a}\,du = \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \frac{u^2}{b-a}\,du$$

Innen $v = \frac{2u}{b-a}$ helyettesítéssel

$$\operatorname{Var}\xi = \frac{(b-a)^2}{8}\int_{-1}^{1} v^2\,dv = \frac{(b-a)^2}{8}\left[\frac{v^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

6.) Dobjunk le egy pontot egyenletes eloszlással a $[0, 4]$ intervallumra. Írjuk fel e pont értékét, ha a ledobott pont a $[0, 2]$ intervallumba esik, írjuk le a 2 számot, ha a pont a $[2, 3]$, a 3 számot, ha a pont a $(3, 4]$ intervallumba esik. Mutassuk meg, hogy a leírt szán értékével egyenlő ξ valószínűségi változó $F(x)$ eloszlásfüggvénye a következő: $F(x) = 0$, ha $x \leq 0$, $F(x) = \frac{x}{4}$, ha $0 \leq x \leq 2$, $F(x) = \frac{3}{4}$, ha $x < 2 \leq 3$, és $F(x) = 1$, ha $x \leq 3$. Mutassuk meg továbbá, hogy $F(x)$ felírható $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$ alakban a következő módon: $F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$, $f(u = \frac{1}{2}$, ha $0 \le x \le 2$, $f(u) = 0$, ha $u < 0$ vagy $u > 2$, és $F_2(x) = 0$, ha $x \le 2$, $F(x) = \frac{1}{4}$, ha $2 < x \le 3$, $F(x) = \frac{1}{2}$, ha $x \ge 3$. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $g(x)$ függvényre $Eg(\xi) = \frac{1}{4}\int_0^2 g(u)\,du + \frac{1}{4}g(2) + \frac{1}{4}g(3)$.

Első megoldás: Hasonlóan a múlt órán tárgyalt 2. feladathoz ellenőrizhetjük, hogy a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a feladatban megadott $F(x)$ eloszlásfüggvény. Az $F(x)$ függvényt felírhatjuk $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$ alakban, ahol $F_1(x) = 0$, ha $x \le 0$, $F_1(x) = \frac{1}{4}x$, ha $0 \le x \le 2$, $F_1(x) = \frac{1}{2}$, ha $x \ge 2$, és $F_2(x) = 0$, ha $x \le 2$, $F_2(x) = \frac{1}{4}$, ha $2 < x \le 3$, $F_2(x) = \frac{1}{2}$, ha $x > 3$. Tulajdonképpen azt tettük, hogy leválasztottuk a tisztán ugró függvény részt az $F(x)$ eloszlásfüggvényről, így kaptuk az $F_2(x)$ függvényt, a maradék $F_1(x) = F(x) - F_2(x)$ függvény pedig mindenütt folytonos. Az $F_1(x)$ függvény minden pontban folytonos, és 0 és 2 pont kivételével mindenütt deriválható. Ezért a sűrűségfüggvény létezéséről szóló tétel segítségével felírhatjuk, hogy $F_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,du$, valamint $\int g(u)\,dF_1(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)f(u)\,du$ minden $-\infty < x < \infty$ számra, ahol $f(x) = \frac{1}{4}$, ha $0 \le x \le 2$, és $f(x) = 0$, ha $x < 0$ vagy $x > 2$. Másrészt a diszkrét eloszlású valószínűségi változó várható értékének a kiszámolásáról szóló tétel alapján $F_2(x)$ felírható az ott megadott módon $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $p_1 = p_2 = \frac{1}{4}$ paraméterekkel. Ezért $\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\,dF_2(u) = \frac{1}{4}g(2) + \frac{1}{4}g(3)$. Ezután a Lemma segítségével kapjuk a feladat végső állítását.

Második megoldás: Jelölje η a ledobott pont helyét, ami egy a $[0,4]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Ennek a valószínűségi változónak a sűrűségfüggvénye a következő $f(x)$ függvény: $f(x) = \frac{1}{4}$, ha $0 \le x \le 4$, $f(x) = 0$, ha $x < 0$ vagy $x > 4$ függvény Továbbá definiáljuk a következő $y = h(x)$ függvényt a $[0,4]$ intervallumon: $h(x) = x$, ha $0 \le x \le 2$, $h(x) = 2$, ha $2 < x \le 3$, $h(x) = 3$, ha $3 < x \le 4$. Ekkor $\xi = h(\eta)$, ezért $g(\xi) = g(h(\eta))$, és $Eg(\xi) = Eg(h(\eta)) = \int_0^4 \int g(h(x))\frac{1}{4}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^2 g(x)\,dx + \frac{1}{4}g(2) + \frac{1}{4}g(3)$.

A fenti feladat első megoldási módszere azt jelzi, hogy az eloszlásfüggvény felbontásának segítségével egy tisztán ugró és folytonos részre a kívánt várható értéket ki lehet számolni a fenti két tétel és lemma segítségével. Felmerülhet a kérdés, hogy van-e olyan eloszlásfüggvény, amelynek esetében a fenti ismeretek nem elegendőek a várható érték kiszámolásához. A válasz az, hogy lehet rosszindulatú és mesterkélt módon ilyen példákat konstruálni, de a gyakorlatban előforduló összes feladat megoldásához elegendő a fenti eredmények használata (és a megfelelő integrálok és összegek kiszámítása).