A november 7-i gyakorlat témája

1.) Tekintsük egy szabályos dobókocka feldobását, illetve azt a valószínűségi változót, amely megmondja mi a dobás eredménye. Határozzuk meg ennek a ξ valószínűségi változónak az $F(x)$ eloszlásfüggvényét. Határozzuk meg a dobásértékek négyzetének az eloszlásfüggvényét.

Megoldás: Ez a ξ valószínűségi változó az 1, 2, 3, 4, 5 és 6 értékek valamelyikét veszi fel, mindegyiket $\frac{1}{6}$ valószínűséggel. Ezért annak a valószínűsége, hogy $P(\xi < x)$ nullával egyenlő, ha $x < 1$. Sőt $x = 1$ esetében is teljesül a $P(\xi < 1) = 0$ azonosság, mert annak valószínűségét nézzük, hogy a ξ valószínűségi változó szigorúan kisebb mint az x szám. Ezért $F(x) = 0$, ha $-\infty < x \le 1$. Ha $1 < x < 2$, akkor az $\{\omega\colon \xi(\omega) < x\}$ esemény azt jelenti, hogy a dobás eredménye 1. Ez az állítás igaz $x = 2$ esetében is. Ezért $F(x) = \frac{1}{6}$, ha $1 < x \le 2$. Ha $2 < x \le 3$, akkor az $\{\omega\colon \xi(\omega) < x\}$ esemény azt jelenti, hogy a dobás eredménye 1 vagy 2. Ezért $F(x) = \frac{2}{6}$, ha $2 < x \le 3$. Ezt a gondolatot végigkövetve kapjuk, hogy $F(x) = 0$, ha $-\infty < x \le 1$, $F(x) = \frac{j}{6}$, ha $j < x \le j+1$, $1 \le j \le 5$, és $F(x) = 1$, ha $6 < x < \infty$. Ha a dobások négyzetének az eloszásfüggvényére vagyunk kiváncsiak, akkor hasonlóan vizsgálhatjuk a helyzetet. Ekkor a vizsgált valószínűségi változó $G(x)$ eloszlásfüggvénye a következő lesz: $G(x) = 0$, ha $-\infty < x \le 1$, mert ebben annak valószínűsége, hogy a dobás értékének négyzete kisebb, mint x egy $x \le 1$ szám esetén 0. $G(x) = \frac{1}{6}$, ha $1 < x \le 4$, mert az az esemény, hogy a dobás értékének négyzete kisebb mint x egy $1 < x < 4$ szám esetén akkor következik be, ha a dobás értéke 1. $G(x) = \frac{2}{6}$, ha $x < 4 \le 9$, mert a dobás értékének a négyzete akkor kisebb, mint x egy $4 \le x < 9$ szám esetében, ha a dobás eredménye 1 vagy 2. Hasonlóan, $G(x) = \frac{3}{6}$, ha $9 \le x < 16$, $G(x) = \frac{4}{6}$, ha $16 \le x < 25$, $G(x) = \frac{5}{6}$, ha $25 < x \le 36$, és $G(x) = 1$, ha $36 < x$.

2.) Ledobunk egy pontot egyenletesen a $[0, 2]$ intervallumra, azaz annak valószínűsége, hogy a ledobott pont egy $[a, b] \subset [0, 2]$ intervallumba esik $\frac{b-a}{2}$. Mi a ledobott pont helyének az eloszlás és sűrűségfüggvénye?

Írjuk fel a ledobott pont helyének az értékét akkor, ha az a $[0, 1]$ intervallumba esik, de az 1 számot írjuk fel, ha a dobás értéke az $[1, 2]$ intervallumba esik. Mi a felírt szám eloszlásfüggvénye? Mi lesz a felírt szám eloszlásfüggvénye akkor, ha abban az esetben, amikor a ledobott pont az $[1, 2]$ intervallumba esik nullát írunk, abban az eseben, ha a $[0, 1]$ intervallumba esik, akkor magát a számot írjuk fel?

Megoldás: Annak valószínűsége, hogy a ledobott pont ξ értéke kisebb, mint x $P(\xi < x) = 0$, ha $x \le 0$, $P(\xi < x) = \frac{x}{2}$, ha $0 \le x \le 2$, és $P(\xi < x) = 1$, ha $x > 1$. Ezért a ξ valószínűségi változó $F(x)$ eloszlásfügggvénye $F(x) = 0$, ha $x \le 0$, $F(x) = \frac{x}{2}$, ha $0 \le x \le 2$, és $F(x) = 1$, ha $x > 1$, azaz egy $\frac{1}{2}$ meredekségű egyenes a $[0, 2]$ intervallumon, és $F(x)$ a vízszintes $x = 1$ egyenes az $x > 2$, és az $x = 0$ vízszintes egyenes az $x < 0$ félegyenesen. A ξ valószínűségi változó létező sűrűségfüggvényét megkapjuk, mint az $F(x)$ eloszlásfüggvény deriváltját. $f(x) = \frac{1}{2}$, ha $0 \le x \le 2$, $f(x) = 0$, ha $x < 0$ vagy $x > 2$. (A sűrűségfüggvény valóban létezik, mert az eloszlásfüggvény minden pontban folytonos, és két pont (az $x = 0$ és $x = 2$ pontok) kivételével mindenütt deriválható is.

A felírt (véletlen) η szám $G(x)$ eloszlásfüggvénye az első esetben $P(\eta < x) = 0$, ha $-\infty < x \le 0$, ha $x \le 0$, $P(\eta < x) = \frac{x}{2}$, ha $0 < x \le 1$, és $P(\eta < x) = 1$, ha $x > 1$. Ez azt jelenti, hogy $G(x) = 0$, ha $x \le 0$, $G(x) = \frac{x}{2}$, ha $x \le 1$, (ebben hasonló a viselkedése az előbb tekintett $F(x)$ függvényhez), de az $x = 1$ pontban ugrik, és $G(x) = 1$, ha $x > 1$.

A második esetben tekintett véletlen szám $H(x)$ eloszlásfüggvénye hasonlóan határozható meg. A különbség az, hogy ekkor a $[0,1]$ intervallumban $H(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$, $0 \le x \le 1$. Ekkor ugyanis a felírt szám akkor lesz kisebb, mint x, $0 \le x \le 1$, ha a ledobott pont vagy a $[0,1]$ vagy az $1,2]$ intervallumba esik, és ennek valószínűsége $\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$. Továbbá $H(x) = 0$, ha $x \le 0$, és $H(x) = 1$, ha $x > 1$.

Házi feladat:

Feldobunk egy pénzdarabot, amely p valószínűséggel esik a fej, $1-p$ valószínűséggel az írás oldalra kétszer egymástól függetlenül. Jelölje ξ azt a valószínűségi változót, amely a fejdobások számát adja meg. Adjuk meg a ξ valószínűségi változó $F(x)$ eloszlásfüggvényét.

Ledobunk egy pontot véletlenül egyenletes eloszlással a $[0,1]$ intervallumba, azaz annak valószínűsége, hogy a pont egy $[a,b] \subset [0,1]$ intervallumba esik $b-a$. Határozzuk meg a ledobott pont négyzetének az eloszlásfüggvényét.

3.) Egy m és σ^2 paraméterű η normális eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(u-m)^2/2\sigma^2}$, $-\infty < u < \infty$

Megoldás: Legyen $\eta = \sigma\xi + m$, ahol ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó. Jelölje $\Phi(x)$ a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. Ekkor η eloszlásfüggvénye $G(x) = P(\sigma\xi + m, x) = P\left(\xi < \frac{x-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$, sűrűségfüggvénye pedig $g(x) = \frac{d}{dx}G(x) = \frac{1}{\sigma}\left.\frac{d\Phi(u)}{du}\right|_{u=\frac{x-m}{\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(u-m)^2/2\sigma^2}$.

4.) Számítsuk ki egy az $[a,b]$ intervallumban egyenletes eloszlású ξ valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.

Megoldás:

$$E\xi = \int_a^b u\frac{1}{b-a}\,du = \frac{1}{b-a}\left[\frac{u^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{b-a}{2},$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}\xi = E\left(\xi - \frac{b-a}{2}\right)^2 &= \int_a^b \left(u - \frac{b-a}{2}\right)^2 \frac{1}{b-a}\,du = \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \frac{u^2}{b-a}\,du \\ &= \frac{1}{b-a}\left[\frac{u^3}{3}\right]_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} = \frac{2}{3(b-a)}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 = \frac{(b-a)^2}{12}.\end{aligned}$$

5.) Számoljuk ki egy λ paraméterű ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.

Megoldás: Parciális integrálással kapjuk, hogy

$$E\xi = \int_0^\infty u\lambda e^{-\lambda u}\,du = \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty ue^{-u}\,du = \frac{1}{\lambda}\left(\left[-ue^{-u}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-u}\,du\right) = \frac{1}{\lambda},$$

$$E\xi^2 = \int_0^\infty u^2\lambda e^{-\lambda u}\,du = \frac{1}{\lambda^2}\left(\left[u^2 e^{-u}\right]_0^\infty + \int_0^\infty 2ue^{-u}\,du\right) = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Ezért $\operatorname{Var}\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$.

6.) Mutassuk meg, hogy egy exponenciális eloszlású ξ valószínűségi változó teljesíti a következő úgynevezett örökifjú tulajdonságot:

$$P(\xi > x + y | \xi > y) = P(\xi > x)$$

minden $x \geq 0$ és $y \geq 0$ számra.

Megoldás: Mivel $P(\xi > u) = e^{-\lambda u}$ minden $u \geq 0$ számra, ezért $P(\xi > x + y|\xi > y) = \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda y}} = e^{-\lambda x} = P(\xi > x)$.

7.) Legyen ξ valószínűségi változó $f(u)$ sűrűségfüggvénnyel, a és b valós számok. Határozzuk meg az $\eta = a\xi + b$ és $\zeta = \xi^2$ valószínűségi változók sűrűségfüggvényét.

Megoldás: Legyen $F(x) = P(\xi < x) = \int_{-\infty}^x f(u)\,du$ a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. Ekkor az $\eta = a\xi + b$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a $G(x) = P(\eta < x) = P\left(\xi < \frac{x-b}{a}\right) = F\left(\frac{x-b}{a}\right)$ függvény, ha $a > 0$, és $G(x) = P(\eta < x) = P\left(\xi > \frac{x-b}{a}\right) = 1 - F\left(\frac{x-b}{a}\right)$, ha $a < 0$. Innen η sűrűségfüggvénye $g(x) = \frac{dG(x)}{dx} = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{x-b}{a}\right)$.

A $\zeta = \xi^2$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$G(x) = P(\xi^2 < x) = P\left(-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}\right) = F\left(\sqrt{x}\right) - F\left(-\sqrt{x}\right),$$

ha $x \geq 0$, és $G(x) = 0$, ha $x < 0$. Innen deriválással ζ sűrűségfüggvénye $g(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(f\left(\sqrt{x}\right) + f\left(-\sqrt{x}\right)\right)$.

Házi feladat:

Legyen egy ξ valószínűségi változónak $f(x)$ sűrűségfüggvénye. Számítsuk ki ξ^3 és ξ^4 sűrűségfüggvényét.