Az október 10-i gyakorlat feladatai

1.) Húsz héten keresztül játszunk a lottón. Minden héten kitöltünk (egymástól függetlenül) 10 lottószelvényt. Mi annak a valószínűsége, hogy pontosan két olyan hét lesz, amelyen lesz hármas négyes vagy ötös találatunk?

Megoldás: Megtárgyaltuk egy korábbi gyakorlaton, hogy annak a valószínűsége, hogy egy kitöltött lottószelvény tartalmaz három, négy vagy öt találatot

$$p_1 = \frac{1 + \binom{85}{1}\binom{5}{4} + \binom{85}{2}\binom{5}{3}}{\binom{90}{5}}.$$

Annak a valószínűsége, hogy valamely héten van három vagy négy találatunk úgy számolható ki, hogy tekintünk 10 független kisérletet, amelyek mindegyike p_1 valószínűséggel következik be, és annak valószínűségét kívánjuk kiszámolni, hogy ezen kisérletek legalább egyike sikeres. Annak valószínűsége, hogy nem volt sikeres kisérlet $(1-p_1)^{10}$, így annak a valószínűsége, hogy volt (legalább egy) sikeres kisérlet $p_2 = 1-(1-p_1)^{10}$. Tehát minden héten p_2 valószínűséggel következik sikeres lottószelvény kitöltés. Annak valószínűsége, hogy az i-edik és j-ik (például a harmadik és ötödik) héten következik be sikeres lottókitöltés, a többi héten pedig nem $p_2^2(1-p_2)^{18}$. Mivel az ilyen hétpárokat $\binom{20}{2}$-féleképp választhatjuk ki, a keresett valószínűség

$$\begin{aligned}\binom{20}{2}p_2^2(1-p_2)^{18} &= \binom{20}{2}\left(1-(1-p_1)^{10}\right)^2(1-p_1)^{180}\\ &= \binom{20}{2}\left(1-\left(1-\frac{1 + \binom{85}{1}\binom{5}{4} + \binom{85}{2}\binom{5}{3}}{\binom{90}{5}}\right)^{10}\right)^2\\ &\quad\left(1-\frac{1 + \binom{85}{1}\binom{5}{4} + \binom{85}{2}\binom{5}{3}}{\binom{90}{5}}\right)^{180}.\end{aligned}$$

2.) Ledobunk az egységintervallumra véletlenül, egymástól függetlenül 2 pontot. (Az, hogy egy pont az egységintervallum valamely részintervallumába esik megegyezik ezen intervallum hosszával.) Ez a két ledobott pont az egységkört három részintervallumra osztja. Mi annak a valószínűsége, hogy az így létrejött három részintervallumból szerkeszthető háromszög?

Megoldás: A három szakaszból akkor és csak akkor szerkeszthető háromszög, ha teljesítik a háromszögegyenlőtlenséget, azaz bármely kettő összhossza nagyobb, mint a harmadik intervallum hossza. Mivel a három intervallum összhossza 1, ez ekvivalens azzal, hogy mindegyik intervallum hossza kisebb, mint $\frac{1}{2}$. Legyen az első ledobott pont koordinátája x a második ledobott ponté pedig y. Ekkor az (x,y) pont egyenletes eloszlású a $[0,1]\times[0,1]$ egységnégyzeten, és keletkezett szakaszok hossza x, $y-x$ és $1-y$, ha $x<y$, és y, $x-y$ és $1-x$, ha $x>y$. A három szakaszból akkor és csak akkor szerkeszthető háromszög, ha a következő két (egymást kizáró) esemény valamelyike bekövetkezik:

a.) $0 \le x < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < y < 1$, $0 < y - x < \frac{1}{2}$,
b.) $0 \le y < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < x < 1$, $0 < x - y < \frac{1}{2}$.
(Az a.) eset felel meg annak, hogy $x < y$, a b.) eset annak, hogy $y < x$.) Egyszerű geometriai meggondolás mutatja, hogy mind az a) mind a b) eset teljesülése azt jelenti, hogy az (x, y) pont az egységnégyzet egy $\frac{1}{2}$ befogókkal rendelkező szabályos derékszögű egyenlőszárú háromszögbe esik. Így a keresett valószínűség $2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$.

3.) Egy szabályos dobókockát sokszor feldobunk egymás után. Mi annak a valószínűsége, hogy a 3. hatos dobás a 20. vagy az egyik későbbi dobásban jelenik meg?

Megoldás: Ez azt jelenti, hogy az első 19 dobásban nulla, egy vagy két hatos jelenik meg. Ennek valószínűsége $\left(\frac{5}{6}\right)^{19} + \binom{19}{1}\left(\frac{5}{6}\right)^{18} \cdot \frac{1}{6} + \binom{19}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{17} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{2}$.

Második megoldás: Ez azt jelenti, hogy a harmadik hatos dobás eredménye a 20, 21, 22 vagy valamelyik későbbi dobás eredménye. (Tudni kell, hogy egy valószínűséggel előbb-utóbb megjelenik a harmadik fej-dobás.) Ennek valószínűsége

$$\left(\frac{1}{6}\right)^3 \sum_{k=20}^{\infty} \binom{k-1}{2} \left(\frac{5}{16}\right)^{k-3}.$$

Annak érdekében, hogy megértsük az első megoldás jogosságát lássuk be, hogy

3a.) Annak, hogy egy szabályos dobókocka végtelen sok egymás utáni feldobása során nem jelenik meg három hatos nulla a valószínűsége.

Megoldás: Az állítás ekvivalens azzal, hogy annak valószínűsége, hogy bekövetkezik legaláb három hatos dobás 1. Ez utóbbi esemény valószínűsége viszont nagyobb mint az, hogy (akárhogyan is rögzítünk egy n egész számot) annak valószínűsége, hogy az első n dobás közül legalább egy hatos, az $n+1$-ik és $2n$-ik dobás közötti dobások közül legalább az egyik hatos és a $2n+1$-ik éa $3n$-ik dobás közötti dobások közül legalább az egyik hatos. Ennek valószínűsége viszont $\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^3$. Ezért a vizsgált valószínűségnek ennél a számnál nagyobbnak kell lenni tetszőleges n-re, ami csak úgy lehetséges, hogy ez a valószínűség 1.

Felmerülhet az a kérdés, hogy hogyan lehet megmutatni valószínűségi meggondolások nélkül azt, hogy az előbb tárgyalt feladat két megoldásában szereplő két látszólag teljesen különböző kifejezés megegyezik. Megmutatom, hogy hogy a második összegben szereplő végtelen összeg összegezhető a $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$, ha $|x| < 1$ azonosság segítségével, ahol $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$. (A fenti azonosság minden valós α számra érvényes, tekinthető úgy mint az általánosított binomiális tétel, és az $(1+x)^\alpha$ függvény Taylor sorfejtéséből következik.) Azt kell észrevenni, hogy

$$\binom{k-1}{2} = \frac{(2-k)(1-k)}{2} = (-1)^{k-1} \frac{(-3)(-4)\cdots(1-k)}{(k-3)!} = (-1)^{k-1} \binom{-3}{k-3},$$

ahonnan $\sum_{k=3}^{\infty} \binom{k-1}{2}\left(\frac{5}{16}\right)^{k-3} = \sum_{k=3}^{\infty} \binom{-3}{k-3}\left(-\frac{5}{16}\right)^{k-3} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-3}{k}\left(-\frac{5}{16}\right)^{k} = \left(1 - \frac{5}{6}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{6}\right)^{-3}$. Tehát $\left(\frac{1}{6}\right)^3 \sum_{k=3}^{\infty} \binom{k-1}{2}\left(\frac{5}{16}\right)^{k-3} = 1$. Ez az azonosság ekvivalens azzal az állítással, hogy egy szabályos dobókocka végtelen sok egymás utáni feldobása esetén 1 valószínűséggel legalább 3 hatos dobás történik.

4.) Feldobunk egy szabályos pénzdarabot végtelen sokszor egymás után. Mi annak a valószínűsége, hogy pontosan az ötödik dobásban jelenik meg az első fej-dobás? Mi annak a valószínűsége, hogy a második fej-dobás pontosan öt dobással az első fej-dobás után következik be?

Megoldás: Akkor lesz az első fej-dobás az ötödik dobás, ha először négy írás-dobás majd egy fej-dobás történik. Ennek valószínűsége $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$. Hasonlóan, annak a valószínűsége, hogy a k-ik dobás lesz az első fej-dobás 2^{-k}, $k = 1, 2, \ldots$, annak valószínűsége pedig, hogy a k-ik dobás lesz az első fej-dobás, utána pedig 5 dobás múlva következik be a második fej-dobás $2^{-k} \cdot 2^{-5} = 2^{-k-5}$. Annak a valószínűségét, hogy az első és második fej-dobás között pontosan 5 dobás következik be kiszámolhatjuk úgy is, hogy kiszámoljuk minden $k = 1, 2, \ldots$ számra kiszámoljuk annak valószínűségét, hogy a k-ik dobás volt az első és a $k+5$-ik dobás a második fej-dobás, majd összegezünk $k = 1, 2, \ldots$-ra. Így azt kapjuk, hogy a keresett valószínűség $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k-5} = 2^{-5} \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-5}$.

Házi feladat:

Egy szabályos dobókockát feldobunk végtelen sokszor. Mi annak a valószínűsége annak, hogy az első hatos dobásig ugyanannyi dobás történt, mint az első és második hatos dobás között?

5.) Egy szabályos érmét feldobunk egymás után egészen addig, amíg másodszor megjelenik egy fej. Azután a dobássorozatot abbahagyjuk. Mi annak a valószínűsége, hogy az utolsóelőtti dobás eredménye fej?

Megoldás: Az esemény, amelyiknek a valószínűségét ki akarjuk számolni, a következő módon is jellemezhető: Először k darab írásdobás történik valamely $k = 0, 1, 2, \ldots,$ számmal, majd utána két fejdobás következik be. Ennek valószínűsége

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Házi feladat:

Egy szabályos érmét feldobunk egymás után egészen addig, amíg másodszor megjelenik egy fej. Azután a dobássorozatot abbahagyjuk. Mi annak a valószínűsége, hogy legalább három dobást végzünk, és az utolsót kettővel megelőző dobás eredménye fej?

6.) Legyenek $A_1, A_2, \ldots,$ események egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Lássuk be, hogy $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ jelöli azt az eseményt, hogy az $A_1, A_2, \ldots,$ események közül véges sok kivétellel mindegyik bekövetkezik.

Megoldás: Az, hogy az A_n események majdnem mindegyike bekövetkezik, azt jelenti, hogy van olyan n szám, amelyre igaz, hogy minden $k \geq n$ indexre bekövetkezik az A_k esemény, azaz a $B_n = \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ esemény is bekövetkezik. Az, hogy a B_n esemény bekövetkezik valamely n számra azt jelenti, hogy bekövetkezik az $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ esemény.

4.) Ha egy szabályos pénzdarabot végtelen sokszor feldobunk egymás után, akkor egy valószínűséggel lesz legalább 50 fejdobás.

Egy lehetséges megoldás: Az is igaz egy valószínűséggel, hogy a

$$B_k = \{\text{azon } j \text{ indexekre, amelyekre } 50k \le j < 50(k+1) \text{ minden dobás fej}\}$$

események közül végtelen sok fog bekövetkezni. Ugyanis ezek a B_k események függetlenek, $P(B_k) = 2^{-50}$, tehát $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(B_k) = \infty$. Ezért a Borel–Cantelli lemmából következik a kívánt állítás, sőt az is, hogy végtelen sok B_k esemény következik be egy valószínűséggel. Valójában a Borel–Cantelli lemmára nincs is szükség. Annak valószínűsége, hogy egyik B_k esemény sem következik be $\lim\limits_{N\to\infty} \left(1-2^{-50}\right)^N = 0$, tehát egy valószínűséggel valamelyik B_k esemény bekövetkezik.

7.) Egy 100 tagú társaság minden egyes tagja egymástól függetlenül $\frac{1}{1000}$ valószínűséggel betegszik meg. Mi annak a valószínűsége, hogy a társaságnak lesz beteg tagja? A kapott eredményről mit mondhatunk? Az nagyon nagy, majdnem 1 vagy nagyon kicsi majdnem nulla?

Megoldás: Jelölje A_j azt az eseményt, hogy a társaság j-ik megbetegszik meg. Ekkor a $P(A_j) = \frac{1}{1000}$, és az A_j események függetlenek. Számoljuk ki először a minket érdeklő esemény komplementerének, azaz annak az eseménynek a valószínűségét, hogy mindenki egészséges. Ez az $\bigcap\limits_{j=1}^{1000} (\Omega \setminus A_j)$ esemény. Mivel $P(\Omega\setminus A_j) = 1 - \frac{1}{1000}$, és az A_j események függetlenségéből következik az $\Omega \setminus A_j$ események függetlensége is, ezért $P\left(\bigcap\limits_{j=1}^{1000} (\Omega\setminus A_j)\right) = \left(1-\frac{1}{1000}\right)^{100}$. Innen a minket érdeklő esemény valószínűsége $1-\left(1-\frac{1}{1000}\right)^{100}$.

Végül jegyezzük meg, hogy $\left(1-\frac{1}{1000}\right)^{100} = \left(\left(1-\frac{1}{1000}\right)^{1000}\right)^{1/10} \sim e^{-1/10}$.

Miért? Ez a szám nagyon közel van az egyhez, ezért a minket érdeklő

8.) Egy házibulira 50 embert hívnak meg. Mindenki egymástól függetlenül 0.5 valószínűséggel megy el.

a) Mi annak a valószínűsége, hogy pontosan 3 ember jön el?

b) Mi annak a valószínűsége, hogy Annak, hogy legalább három ember jön el?

Megoldás: a) $\binom{50}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$, b) $1-\left(1+\binom{50}{1}+\binom{50}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$.

9.) Egy gyakorlatra véletlenszerűen 24 hallgató jön el. Mi annak a valószínűsége, hogy van közöttük két ember, akiknek ugyanazon a napon van a születésnapjuk?

Megoldás: Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy nincs két ilyen ember. Képzeljük el, hogy egymásután megjelennek a hallgatók, valaki felírja a születésnapjukat, és minden egyes lépésben más dátumot ír fel. Az első hallgató megjelenésekor biztos, hogy új számot ír fel, a második hallgató megjelenésekor $\left(1-\frac{1}{365}\right)$, a harmadik hallgató megjelenésekor, (feltéve, hogy az első két hallgató esetében különböző számokat írt fel $\left(1-\frac{2}{365}\right)$, a negyedik hallgató esetében $\left(1-\frac{3}{365}\right)$ valószínűséggel írt fel különböző számokat, és így tovább. Annak a valószínűsége, hogy mind a 24 esetben különböző számokat írt fel $\prod\limits_{k=1}^{23}\left(1-\frac{k}{365}\right)$, a keresett valószínűség pedig $1-\prod\limits_{k=1}^{23}\left(1-\frac{k}{365}\right)$.

Kiváncsiak lehetünk, hogy ez a szám mekkora. Nagyon kicsi vagy nagyon nagy, azaz majdnem 1. Meg tudjuk-e ezt határozni viszonylag kevés számolással? A következő számolás tanulságos lehet. A vizsgálandó szorzatot felírhatjuk mint

$$1-\prod_{k=1}^{23}\left(1-\frac{k}{365}\right)=1-\exp\left\{\sum_{k=1}^{23}\log\left(1-\frac{k}{365}\right)\right\}.$$

Használjuk fel a $\log(1+x)\sim x$ kis x számokra való közelítést. Ez azt sugallja, hogy $\log\left(1-\frac{k}{365}\right)\sim-\frac{k}{365}$, és a vizsgált valószínűség közelítőleg

$$1-\exp\left\{-\sum_{k=1}^{23}\frac{k}{365}\right\}=1-\exp\left\{-\frac{12\cdot 23}{365}\right\}=1-e^{-276/365}.$$

10.) Tekintsük a következő valószínűségi mezőt. $\Omega=\{1,\dots,n\}$, ahol n valamely pozitív egész szám, $\mathcal{A}$ az Ω összes részhalmazaiból álló σ-algebra,

$$P(A)=\frac{\text{az } A \text{ halmaz számossága}}{n}.$$

Legyen $n=p_1^{r_1}\cdots p_k^{r_k}$ az n szám prímtényezős felbontása, és definiáljuk a következő A_j eseményeket: $A_j=\{m\colon m \text{ osztható a } p_j \text{ számmal}\}$, $1\le j\le k$. Legyen $B=\{m\colon m \text{ relatív prim az } n \text{ számhoz képest}\}$. Mutassuk meg, hogy

a. Az $A_1,\dots,A_k$ események függetlenek.

b. $P(B)=\prod\limits_{j=1}^{k}\left(1-\dfrac{1}{p_j}\right)$, azaz összesen $n\cdot\prod\limits_{j=1}^{k}\left(1-\dfrac{1}{p_j}\right)$ n-nél kisebb és az n-hez képest relatív prim van.

Megoldás: $A_j=\left\{p_j,2p_j,\dots,\dfrac{n}{p_j}p_j\right\}$ egy $\dfrac{n}{p_j}$ számból álló halmaz, ezért $P(A_j)=\dfrac{1}{p_j}$, $1\le j\le k$. Az $A_{j_1}\cap A_{j_2}\cap\dots\cap A_{j_s}$ halmaz az n-nél kisebb $p_{j_1}\cdots p_{j_s}$ számmal osztható számokból áll minden $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_s \le k$ sorozatra, ezért számossága $\dfrac{n}{p_{j_1} \cdots p_{j_s}}$, és $P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_s}) = \dfrac{1}{p_{j_1} \cdots p_{j_s}}$. Ez azt jelenti, hogy $P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_s}) = P(A_{j_1})P(A_{j_2}) \cdots P(A_{j_s})$ minden $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_s \le k$ sorozatra, ezért az A_1, A_2, ... A_k halmazok függetlenek.

Végül $B = \Omega \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_k) = \bigcap\limits_{j=1}^{k} (\Omega \setminus A_j)$. Ezért és az A_j események függetlensége miatt $P(B) = \prod\limits_{j=1}^{k} P(\Omega \setminus A_j) = \prod\limits_{j=1}^{k} \left(1 - \dfrac{1}{p_j}\right)$, ahonnan következik a B halmaz számosságára megadott képlet.

11.) Legyen adva végtelen sok $A_1, A_2, \dots$ esemény. Fejezzük ki ezen események segítségével az únió, metszet és komplementer leképezések felhasználásával azt az eseményt, hogy az $A_1, A_2, \dots$ események közül végtelen sok következik be.

Megoldás: Az az esemény, hogy az $A_1, A_2, \dots$ események közül végtelen sok következik be úgy is megfogalmazható, hogy bármely n indexre létezik olyan $N \ge n$ index melyre az A_N esemény bekövetkezik. Rögzített n számra az az esemény, hogy bekövetkezett az A_N esemény valamely $N \ge n$ indexre felírható mint a $B_n = \bigcup\limits_{n=N}^{\infty} A_N$ esemény. Az, hogy a B_n események mindegyike bekövetkezik az $C = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ esemény. Ezért a vizsgált esemény felírható $C = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup\limits_{n=N}^{\infty} A_N \right)$ alakban írható.