Az október 17-i gyakorlat témája

Az előző gyakorlaton tekintettünk néhány feladatot, amelynek hátterében a következő probléma megoldása volt. Legyenek $A_1 \dots, A_n$ független események, amelyeknek ismerjük $P(A_j)$, $1 \le j \le n$, valószínűségeit. Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy legalább egy A_j esemény bekövetkezik. Egy általánosabb feladat azon esemény valószínűségének a kiszámolása, hogy pontosan k darab A_j esemény következik be, $0 \le k \le n$. Hasonlóan annak a valószínűségét is ki akarjuk számolni, hogy legalább k A_j esemény következik be.

Korábban a következő típusú feladatokat tárgyaltunk. Legyenek $B_1, \dots, B_n$ egymást kizáró események, azaz legyen $B_j \cap B_k = \emptyset$ minden $1 \le j, k \le n$ indexre, ha $j \ne k$, ahol $\emptyset$ az üres halmazt jelöli. Mi annak a valószínűsége, hogy pontosan egy B_j esemény következik be? E kérdés megválaszolása nagyon egyszerű, mert az az esemény, hogy legalább egy B_j esemény következik be megegyezik a $B_1 \cup \dots \cup B_n$ eseménnyel, és $P(B_1 \cup \dots \cup B_n) = P(B_1) + \dots + P(B_n)$. Annak a valószínűsége, hogy pontosan $k \ge 2$ B_j esemény következik be nulla, annak valószínűsége, hogy nulla B_j esemény következik be $1 - P(B_1) - \dots - P(B_n)$.

Annak a valószínűségét, hogy pontosan egy A_j esemény következik be a következő módon számolhatjuk ki a Morgan azonosság felhasználásával. A keresett valószínűség

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \dots \cup A_n) &= 1 - P(\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n}) = 1 - P(\bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_n) \\ &= 1 - P(\bar{A}_1) \cdots P(\bar{A}_n) = 1 - (1 - P(A_1)) \cdots (1 - P(A_n)) \end{aligned}$$

ahol $\bar{A} = \Omega \setminus A$ az A esemény komplementerét jelöli. (A fenti számolásban kihasználtuk azt az eredményt, amely szerint, ha $A_1, \dots, A_n$ független események, akkor $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n$ is az.)

1.) Legyenek $A_1 \dots, A_n$ független események, amelyeknek ismerjük $P(A_j)$, $1 \le j \le n$, valószínűségeit. Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy pontosan k darab, illetve hogy legalább k darab A_j esemény következik be, $0 \le k \le n$.

Megoldás: Az, hogy pontosan k darab A_j esemény következik be azt jelenti, hogy léteznek olyan $1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_k \le n$ számok, hogy az $A_{j_1}, \dots, A_{j_k}$ események bekövetkeznek, míg $s \ne j_l$, $1 \le l \le k$, $1 \le s \le n$ indexekre az A_s esemény nem következik be, azaz az $\bar{A}_s$ esemény következik be. Ennek valószínűsége rögzített $1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_k \le n$ indexekre

$$P\left(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_k} \cap \bigcap_{s \in \{1,\dots,n\} \setminus \{j_1,\dots,j_k\}} \bar{A}_s\right) = \prod_{s=1}^{k} P(A_{j_s}) \prod_{t \in \{1,\dots,n\} \setminus \{j_1,\dots,j_k\}} (1 - P(A_t)).$$

Így annak a valószínűsége, hogy pontosan k darab A_j esemény következik be

$$\begin{aligned} P_k &= \sum_{(j_1,\dots,j_k) : 1 \le j_1 < j_2 \le \dots j_k \le n} P\left(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_k} \cap \bigcap_{s \in \{1,\dots,n\} \setminus \{j_1,\dots,j_k\}} \bar{A}_s\right) \\ &= \sum_{(j_1,\dots,j_k) : 1 \le j_1 < j_2 \le \dots j_k \le n} \prod_{s=1}^{k} P(A_{j_s}) \prod_{t \in \{1,\dots,n\} \setminus \{j_1,\dots,j_k\}} (1 - P(A_t)). \end{aligned}$$

Annak a valószínűsége, hogy legalább k darab A_j esemény következik be $Q_k = \sum\limits_{l=k}^{n} P_l$.

2.) Egy szabályos pénzdarabot feldobunk 100-szor egymás után. Számoljuk ki a fejdobások számának a várható értékét és szórásnégyzetét. Számítsuk ki ezt egyrészt direkt módon felírva és kiszámolva a várható értéket és szórásnégyzetet kifejező összegeket, másrészt egyszerűbben az előző tétel segítségével.

Megoldás: A fejdobások száma 0 és 100 között van. Annak valószínűsége, hogy k fejdobás következik be, $0 \le k \le 100$, $p_k = \binom{100}{k} 2^{-100}$. Ezért a dobások számának várható értéke $E\xi = \sum\limits_{k=0}^{100} k\binom{100}{k} 2^{-100}$, ahol ξ jelöli a fejdobások számát megadó valószínűségi változót. Továbbá $E\xi^2 = \sum\limits_{k=0}^{100} k^2\binom{100}{k} 2^{-100}$, a szórásnégyzet pedig $\operatorname{Var}\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$. Ezeket az összegeket közvetlenül kiszámíthatjuk. Valóban, $k\binom{100}{k} = 100\binom{99}{k-1}$, $E\xi = \sum\limits_{k=0}^{100} k\binom{100}{k} 2^{-100} = 50 \sum\limits_{k=0}^{99} k\binom{99}{k} 2^{-99} = 50\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^{99} = 50$. Továbbá, $k^2\binom{100}{k} = [k(k-1)+k]\binom{100}{k} = 100\cdot 99\cdot\binom{98}{k-2} + 100\cdot\binom{100}{99}$, $E\xi^2 = 2^{-100}\cdot 100\cdot 99\cdot \sum\limits_{k=0}^{98}\binom{98}{k} + 2^{-100}\cdot 100\cdot \sum\limits_{k=0}^{99}\binom{99}{k} = 2^{-100}\left(100\cdot 99\cdot(1+1)^{98} + 100\cdot(1+1)^{99}\right) = 25\cdot 99 + 50$, $\operatorname{Var}\xi = E\xi^2 - (E\xi^2) = 25$.

Valójában a vizsgált várható értéket és szórásnégyzetet egyszerűbben is kiszámíthatjuk. Vezessük be a következő ξ_j valószínűségi változókat: $\xi_j = 1$, ha a j-ik dobás eredménye fej $\xi_j = 0$, ha a j-ik dobás eredménye írás, $1 \le j \le 100$. Ekkor a fejdobások száma $\xi = \sum\limits_{j=1}^{100} \xi_j$, $E\xi = \sum\limits_{j=1}^{100} E\xi_j$, $\operatorname{Var}\xi = \sum\limits_{j=1}^{100} \operatorname{Var}\xi_j$. Mivel $E\xi_j = \frac{1}{2}$, $E\xi_j^2 = \frac{1}{2}$, $\operatorname{Var}\xi_j = \frac{1}{4}$, $1 \le j \le 100$, ezért $E\xi = \frac{1}{2}\cdot 100 = 50$, $\operatorname{Var}\xi = \frac{1}{4}\cdot 100 = 25$.

3.) Egy szabályos dobókockát feldobunk 100-szor egymás után. Számoljuk ki a dobáseredmények összegének várható értékét és szórásnégyzetét.

Megoldás: Legyenek $\eta_1, \dots, \eta_{100}$ *független* valószínűségi változók, amelyekre $P(\eta_j = k) = \frac{1}{6}$, $1 \le j \le 100$, $1 \le k \le 6$. Ekkor a kiszámítandó várható érték és szórásnégyzet $E\sum\limits_{j=1}^{100}\eta_j = \sum\limits_{j=1}^{100} E\eta_j$, $\operatorname{Var}\sum\limits_{j=1}^{100}\eta_j = \sum\limits_{j=1}^{100}\operatorname{Var}\eta_j$. (A második reláció felhasználja a tekintett valószínűségi változók függetlenségét.) $E\eta_j = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{7}{2}$, $E\eta_j^2 = \frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36) = \frac{91}{6}$, $\operatorname{Var}\eta_j = E\eta_j^2 - (E\eta_j)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{182-147}{12} = \frac{35}{12}$, $E\xi = 350$, $\operatorname{Var}\xi = \frac{3500}{12}$.

4.) Egy szabályos dobókockát feldobunk egymás után addig, amíg meg nem jelenik a 100. hatos dobás. Számoljuk ki a dobások számának a várható értékét és szórásnégyzetét.

Megoldás: Jelölje T_1 azt a valószínűségi változót, hogy hányszor kellett a kockát feldobni addig, amíg az első hatos dobás megjelent (az első hatos dobást is beleszámítva ebbe a dobássorozatba), T_2 azt, hányszor kellett a kockát az első hatos dobás után feldobni, amíg a második hatos dobás megjelent, és általában legyen T_j az a valószínűségi változó, amelyik azt számolja meg, hogy hány dobás következett be a $j-1$-k és j-ik hatos dobás között. (A j-ik hatos dobást beszámítjuk a $j-1$-ik hatos dobást viszont nem számítjuk be ebbe a sorozatba.) Ekkor a minket érdeklő valószínűségi változó, a dobások száma a 100. hatos dobásig $T=\sum\limits_{j=1}^{100} T_j$, továbbá, a T_j valószínűségi változók függetlenek, és $P(T_j=k)=\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\frac{1}{6}$, $k=1,2,\dots$. Ezért $ET=\sum\limits_{j=1}^{100} ET_j$, $\operatorname{Var} T=\sum\limits_{j=1}^{100}\operatorname{Var} T_j$, $ET_j=\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$, $ET_j^2=\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$, $\operatorname{Var} T_j=ET_j^2-(ET_j)^2$.

Az ET_j várható érték egy lehetséges kiszámolási módja: Deriváljuk a

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k=\frac{1}{1-x}, \quad |x|<1$$

azonosságot. Azt kapjuk, hogy

$$(*) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1}=\frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x|<1,$$

ahonnan $x=\frac{5}{6}$ helyettesítéssel

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}=6^2,$$

és $ET_j=6$, $ET=100ET_1=600$. Hasonlóan, a $(*)$ azonosságot x-szel beszorozva, deviválva, majd az $x=\frac{5}{6}$ behelyettesítést alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2x^{k-1}=\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{2x}{(1-x)^3}, \quad |x|<1,$$

$ET_j^2=\frac{1}{6}(36+360)=66$, $\operatorname{Var} T_j=ET_j^2-(ET_j)^2=30$, $\operatorname{Var} T=100\operatorname{Var} T_1=3000$.

5.) Legyen egy urnában 20 piros és 30 fehér golyó. Húzzunk ki 20 golyót visszatevés nélkül. Számoljuk ki a kihúzott piros golyók számának várható értékét.

Megoldás: Vezessük be a következő ξ_j, $1\le j\le 20$, valószínűségi változókat: $\xi_j(\omega)=1$, ha a j-ik húzás eredménye piros, $\xi_j(\omega)=0$, ha a j-ik húzás eredménye fehér. Ekkor a $\xi=\sum\limits_{j=1}^{20}\xi_j$ összeg várható értékét kell kiszámolnunk. Továbbá $E\xi_j=E\xi_1=\frac{2}{5}$, mert $E\xi_j=1\cdot P(\xi_j=1)=p(\xi_1=1)$. Innen a 20 dobásban kihúzott piros golyók számának várható értéke $20\cdot\frac{2}{5}=8$.

Házi feladat:

Egy szabályos dobókockát feldobunk egymás után százszor. Tekintsük a páros értékű dobások összegét, és számítsuk ki ennek várható értékét és szórásnégyzetét.