Az október 24-i gyakorlat témája

1.) Elvégzünk egy kisérletet végtelen sokszor egymás után egymástól függetlenül, és az minden alkalommal p valószínűséggel sikerül, $1-p$ valószínűséggel nem sikerül. Legyen T_1 az első, T_2 a második, és így tovább T_k a k-ik sikeres kisérlet időpontja. Mutassuk meg, hogy az egymást követő sikeres kisérletek közötti T_1, T_2-T_1, $\dots$ T_k-T_{k-1} (véletlen) időintervallumok egymástól függetlenek, és $P(T_1=l)=P(T_j-T_{j-1}=l)=(1-p)^{l-1}p$ minden j indexre, és $l=1,2,\dots$ számra.

Megoldás. Tetszőleges k és $l_1,\dots,l_k$ pozitív egész számokra felírhatjuk, hogy

$$P(T_1=l_1,T_2-T_1=l_2,\dots,T_k-T_{k-1}=l_k)=(1-p)^{l_1+\cdots+l_k-k}p^k=\prod_{s=1}^{k}P(l_s)$$

ahol $P(l)=(1-p)^{l-1}p$, $l=1,2,\dots$, mert a keresett valószínűség megegyezik annak a valószínűségével, hogy egy $l_1+\cdots+l_k$-szor elvégzett kisérlet k előírt időpontban (az l_1, l_1+l_2, $\dots$, $l_1+\cdots+l_k$ időpontokban) sikeres, a többi időpontban sikertelen.

Vegyük észre, hogy

$$\sum_{l=1}^{\infty}P(l)=\sum_{l=1}^{\infty}p(1-p)^l=p\frac{1}{1-(1-p)}=1.$$

Innen

$$\begin{aligned}&P(T_j-T_{j-1}=l)\\&\quad=\sum_{(l_1,\dots,l_{j-1}):1\le l_s<\infty,\ 1\le s\le j-1}P(T_1=l_1,T_2-T_1=l_2,\dots,T_{j-1}-T_{j-2}=l_{j-1},T_j-T_{j-1}=l)\\&\quad=\sum_{(l_1,\dots,l_{j-1}):1\le l_s<\infty,\ 1\le s\le j-1}\prod_{s=1}^{j-1}P(l_s)P(l)=P(l)\left(\sum_{r=1}^{\infty}P(r)\right)^j=P(l)\end{aligned}$$

2). Feldobunk egy szabályos pénzdarabat 100-szor egymás után. Tekintsük az egymást követő fej-fej dobássorozatok számát, és számítsuk ki ennek várható értékét.

Megoldás: Vezessük be a következő ξ_j, $1\le j\le 99$, valószínűségi változókat: $\xi_j=1$, ha a j-ik és $j+1$-ik dobások mindegyikének eredménye fej, $\xi_j=0$ egyébként. Vegyük észre, hogy minket az $S=\sum\limits_{j=1}^{99}\xi_j$ valószínűségi változó várható értéke érdekel. Ezért $ES=E\left(\sum\limits_{j=1}^{99}E\xi_j\right)=\dfrac{99}{4}$, mivel $E\xi_j=\dfrac{1}{4}$. (Érdemes megjegyezni, hogy az ebben a feladatban tekintett ξ_j valószínűségi változók nem függetlenek, de a függetlenségre nincs szükség a várható érték additivításához.)

3.) Legyenek $A_1,A_2,\dots,$ események egy $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mezőn. Lássuk be, hogy $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k$ jelöli azt az eseményt, hogy az $A_1,A_2,\dots,$ események közül véges sok kivétellel mindegyik bekövetkezik.

Megoldás: Az, hogy az A_n események majdnem mindegyike bekövetkezik, azt jelenti, hogy van olyan n szám, amelyre igaz, hogy minden $k \geq n$ indexre bekövetkezik az A_k esemény, azaz a $B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ esemény is bekövetkezik. Az, hogy a B_n esemény bekövetkezik valamely n számra azt jelenti, hogy bekövetkezik az $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ esemény.