A szeptember 12-i gyakorlat témája

1. Egy szabályos pénzdarabot feldobunk kétszer egymás után. Mi annak a valószínűsége, hogy egy fej és egy írás dobás lesz?

   Megoldás: A dobások lehetséges kimenetei (F,F), (F,I), (I,F), (F,F). Ezen kimenetek mindegyikének a valószínűsége ugyanannyi, tehát $\frac{1}{4}$. Két lehetséges kimenet jó a mi számunkra, a (F,I) és (I,F). Tehát a keresett valószínűség $\frac{1}{2}$. Azt érdemes meggondolni, hogy amennyiben azt a három lehetséges kimenetet tekintjük, hogy két fej, két írás. egy fej és egy írás dobás, akkor ezen kimenetek valószínűsége nem egyforma. Ezért az ezáltal sugallt $\frac{1}{3}$ eredmény hibás.

   Házi feladat:

   Egy szabályos dobókockát feldobunk kétszer egymás után. Mi a valószínűsége annak, hogy a dobások összege 9? Annak, hogy a dobások összege 10?

2. Kitöltünk egy lottószelvényt. Mi annak a valószínűsége, hogy 5-ös találatot érünk el?

   Megoldás: Gondoljuk, meg, hány különböző eredménye lehet a húzásoknak. Az első számot 90 féleképpen húzhatjuk, a másodikat 89 féleképp, a harmadikat 88 a negyediket 87 az ötödiket 86 féleképpen. Felírva egymás után ezeket a számokat összesen $90\cdot89\cdot88\cdot87\cdot86$ különböző sorozat lehetséges. Ugyanakkor két húzássorozatot nem különböztetünk meg, ha ugyanazok a számok jelennek meg bennük csak más sorrendben. Írjuk fel egy húzássorozat számait növekvő sorrendben. Hány különböző módon jelenhet meg ugyanaz a növekvő számsorozat? A legnagyobb szám 5 helyen, a második legnagyobb szám ezután 4, a harmadik legnagyobb szám ezután 3, a negyedik legnagyobb szám ezután két különböző helyen szerepelhet, a legkisebb szám helye pedig végül egyértelmű. Így összesen $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 = 120$ különböző módon jelenhet meg ugyanaz az eredmény. Összesen tehát $\frac{90\cdot89\cdot88\cdot87\cdot86}{120}$ különböző húzássorozat lehetséges. Mivel minden húzássorozat egyforma valószínű, annak valószínűsége, hogy egy adott (nagyság szerint rendezett számsorozat) jelenik meg $\frac{120}{90\cdot89\cdot88\cdot87\cdot86}$.

3. Egy n elemű halmaznak $\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot2\cdots k}$ különböző részhalmaza van, $k \le n$.

   Megoldás: Feltehetjük, hogy a tekintett halmaz az $1, 2, \ldots, n$ számokból áll. Ebből $n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)$ különböző módon választhatunk ki egymás után k számot. Viszont mivel két választás, amelyben ugyanazokat a számokat választottuk ki egymás után más sorrendben ugyanazt a halmazt adja, ezért minden halmazt $1\cdot 2\cdots k$ féle módon választottunk. Innen adódik az eredmény.

4. Az $1, 2, \ldots, n$ számokat $n! = 1\cdot2\cdots n$ módon lehet sorrendbe rakni.

5. Binomiális tétel:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^nb^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}a^nb^0 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k},$$

ahol $\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$.

Magyarázat: Végezzük el az $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdots(a+b)}_{n \text{ tényező}}$ szorzásokat. Ez olyan n hosszúságú szorzatokból álló összeg lesz, amely a és b számokból fog állni. Hány olyan tag szerepel, amely k darab a és $n-k$ darab b jegyet tartalmaz? A fenti kombinatorikai meggondolások alapján látható, hogy $\binom{n}{k}$.

Tárgyaltuk a binomiális tétel egy általánosítását is. Ennek érdekében bevezettük a következő definiciót: Ha k pozitív egész szám, n pedig *tetszőleges valós szám* akkor $\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}$. Fontos, hogy ez a definició nemcsak egész n számokra van definiálva. Ki akarjuk számolni az $(1+x)^n$ függvény Taylor sorát tetszőleges (valós) n számra.

6. Bizonyítsuk be, hogy az $f(x) = (1+x)^n$ függvény Taylor sora az

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k$$

hatványsor tetszőleges valós n szám esetén.

Megoldás: Egy (analitikus) $f(x)$ függvény hatványsora $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, ahol $c_0 = f(0)$, $c_k = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k} f(x)\Big|_{x=0}$. Jelen esetben, amikor $f(x) = (1+x)^n$, $\frac{d^k}{dx^k} f(x) = n(n-1)\cdots(n-k+1)(1+x)^{n-k}$, ahonnan $c_k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$. Ezért az $(1+x)^n$ függvény hatványsora $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k$.

Be lehet látni, hogy $|x| < 1$ esetén az $(1+x)^n$ függvény egyenlő a hatványsorával. Megjegyeztük, hogy abban az esetben, ha n pozitív egész szám, $k > n$, akkor $\binom{n}{k} = 0$. Ezért, ha n pozitív egész szám, akkor az $(1+x)^n$ függvény Taylor sora véges sok tagból áll, és ez az összeg megegyezik azzal az összeggel, amelyet a binomiális tétel sugall.

Hogyan viselkedik az $\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$ függvény hatványsora? Vegyük észre, hogy $\binom{-1}{k} = \frac{(-1)(-2)\cdots(-k)}{k!} = (-1)^k$, ahonnan $(1+x)^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$. Ismerős-e ez az eredmény? Hogyan néz ki az $\frac{1}{1-x}$ függvény hatványsora? Mutassuk meg, (például az $\frac{1}{1+x}$ függvény hatványsorát integrálva, hogy

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}.$$

Helyettesítsünk be $x = 1$ értéket a fenti azonosságba. Azt kapjuk, hogy

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots ,$$

Valójában, indoklásra szorul, hogy az $\ln(1+x)$ függvény hatványsorába az $x = 1$ értéket behelyettesítve valóban az $\ln(1+1) = \ln 2$ értéket kapjuk. Ez azonban következik néhány általános (nem triviális) eredményből.

Házi feladat:

Számítsuk ki az $\arctan x$ függvény hatványsorát. Mutassuk meg ennek segítségével a következő híres Leibniz nevéhez fűződő azonosságot.

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots .$$

7. Egy urnában golyók vannak, amelyek tartalmazzák az $1, \dots, n$ számokat. Kihúzunk egymás után k golyót. Hány különböző húzáseredmény lehetséges. Ha különbséget teszünk két húzássorozat között, amelyekben ugyanazokat a számokat húztuk ki, de más sorrendben, akkor $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ lehetőség van, ha nem teszünk különbséget, akkor $\binom{n}{k}$. Ha visszatevéssel húzunk és különbséget teszünk különböző sorrendben kihúzott ugyanazokat a számokat (ugyanolyan multiplicitással) tartalmazó húzássorozatok között, akkor a lehetséges húzások száma n^k.

   Az az eset, amikor visszatevéssel húzunk, de nem számít a különböző kihúzott számok sorrendje nehezebb, de egy ravasz észrevétel segítségével megoldható. Ez a következő feladat tárgya.

8. Egy urnában golyók vannak, amelyek tartalmazzák az $1, \dots, n$ számokat. Kihúzunk egymás után visszatevéssel k golyót. A kihúzott golyókat nagyság szerint sorba rakjuk. Hány különböző húzáseredmény lehetséges?

   Válasz: $\binom{n+k-1}{k}$. Ugyanis tekintsünk egy kapott húzássorozatot. Az első számhoz adjunk 0-t a másodikhoz 1-et, a harmadikhoz 2-t, ... a k-ikhoz $k-1$-et. Ilyen módon egy szigorúan növekvő k hosszúságú sorozatot kapok amelyek elemei az $1, 2, \dots, n+k-1$ számok valamelyikét veszik fel. Sőt ilyen módon kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést adunk a lehetséges kihúzott sorozatok és az $1, 2, \dots, n+k-1$ halmaz k elemű részhalmazai között. Innen következik, hogy az adott tipusú sorozatok száma $\binom{n+k-1}{k}$.

9. Mi annak a valószínűsége, hogy lottóhúzás eredményeként legalább négyes találatot érünk el?

   Megoldás: Hány olyan kitöltése van a lottószelvénynek, amely (pontosan) 4 találatot biztosít? Az 5 jó számból 4-et 5 féleképpen, a rosszat 85 féleképpen választhatjuk, ezek mind különböző sorozatok, így $5 \cdot 85$ féleképp lehet pontosan 4 találatunk, és 1 féleképpen 5 találatunk. Az összes lehetőség $\binom{90}{5}$, és minden sorozat egyforma valószínű. Ezért a keresett valószínűség $\frac{5 \cdot 85 + 1}{\binom{90}{5}}$.

10. Bizonyítsuk be a következő azonosságot: Minden nem negatív n, m és k egész számokra (tegyük fel, hogy $n + m \geq k$)

$$\binom{n+m}{k} = \binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \binom{n}{2}\binom{m}{k-2} + \cdots + \binom{n}{k}\binom{m}{0}.$$

Megoldás: A következő kombinatorikai meggondolás bizonyítást ad. Számoljuk ki két különböző módon annak valószínűségét, hogy egy urnából, amelyben $n + m$ (megkülönböztethető) golyó van, hányféleképp választhatunk ki k golyót. Ez egyrészt $\binom{n+m}{k}$, ami a baloldali kifejezéssel egyenlő. Fessünk n golyót piros és m golyót fehér színűre. Ekkor $\binom{n}{s}\binom{m}{k-s}$ féle módon választhatunk ki k golyót úgy, hogy ezek közül s piros és $k - s$ fehér. Ezeket a kifejezéseket összegezve minden $0 \le s \le k$ számra egyrészt megkapjuk az azonosság jobboldalán szereplő kifejezést, másrészt a balaldalon szereplő kifejezést számoltuk ki más módon.

Második megoldás: Érdekes lehet a következő megoldás, ami valójában általánosabb eredményt ad, mert azt mutatja, hogy az eredmény tetszőleges valós n és m számra érvényes. Azt használjuk ki, hogy egy függvény egyértelműen meghatározza a Taylor sorának együtthatóit, másrészt Taylor sorokkal (tehát végtelen összegekkel) ugyanúgy lehet számolni, mint véges összegekkel.

Írjuk fel, mit jelent az $(1 + x)^{n+m} = (1 + x)^n(1 + x)^m$ azonosság e függvények hatványsoraira. Azt kapjuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+m}{k} x^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} x^k\right).$$

Az azonosság baloldalán x^k együtthatója $\binom{n+m}{k}$, a jobb oldalon elvégezve a szorzásokat olyan kifejezést kapunk, amelyben x^k együtthatója $\sum_{s=0}^{k} \binom{n}{s}\binom{m}{k-s}$, és ez a két kifejezés megegyezik.