A szeptember 19-i gyakorlat témája

A múlt gyakorlaton megbeszéltük, hogy hány különböző módon lehet kiválasztani n elemből k elemet. Valójában ez négy különböző probléma. Azt kell nézni, hány különböző módon lehet n elemből k elemet kiválasztani, ha

a) Visszatevés nélkül választjuk ki az elemeket, és a sorrend számít.
b) Visszatevés nélkül választjuk ki az elemeket, és a sorrend nem számít.
c) Visszatevéssel választjuk ki az elemeket, és a sorrend számít.
d) Visszatevéssel választjuk ki az elemeket, és a sorrend nem számít.

Ezen esetek közül a b) eset a legfontosabb. Több ekvivalens megfogalmazású probléma van, amely gyakran felmerül. Ezért érdemes ezeket részletesebben megtárgyalni.

A múlt gyakorlaton megbeszéltük, hogy a b) kérdésre adott válasz ekvivalens a következő állítással.

Azon k hosszúságú szigorúan monoton egész számokból álló sorozatok száma, amelyek elemei az $\{1,\dots,n\}$ halmazból vannak kiválasztva. $\binom{n}{k}$.

1.) Lássuk be, hogy az előző állítás ekvivalens a következő állítással: Egy n elemű halmaznak $\binom{n}{k}$ k elemű részhalmaza van.

Megoldás: Feltehetjük, hogy az n elemű halmaz az $\{1,\dots,n\}$ halmaz. Ennek k elemű részhalmazai azonosíthatóak (a részhalmaz elemeit nagyság szerint sorba rendezve) azon k hosszúságú szigorúan monoton egész számokból álló sorozatokkal, amelyek elemei az $\{1,\dots,n\}$ halmazból vannak kiválasztva. Az ilyen sorozatok száma viszont $\binom{n}{k}$.

Egy másik ekvivalens megfogalmazás:

2.) Legyen adva két urna, és dobjunk be egymás után n golyót e két urna valamelyikébe. Hány különböző olyan dobássorozat van, amelyik során az első urnába k a második urnába pedig $n-k$ golyó kerül?

Megoldás: A válasz $\binom{n}{k}$. Egy ilyen dobássorozatot egyértelműen megadunk, ha megmondjuk, hányadik dobások kerülnek az első urnába. Az ilyen indexek száma $\binom{n}{k}$, mert az $\{1,2,\dots,n\}$ dobások száma $\binom{n}{k}$, mert az első urnába k golyó esik.

3.) Legyen adva k urna, és dobjunk be egymás után n golyót e k urna valamelyikébe. Rögzítsünk k nem-negatív $l_1,\dots,l_k$ egész számot úgy, hogy $\sum\limits_{j=1}^{k} l_j = n$. Hány különböző olyan dobássorozat van, amelyek során a j-ik urnába l_j golyó esik minden $1\le j\le k$ indexre?

Megoldás: A válasz $\frac{n!}{l_1!\cdots l_k!}$. Az első urnába eső l_1 golyó dobás időpontját $\binom{n}{l_1}$-féle módon választhatjuk. A maradék $n-l_1$ golyóból a második urnába eső dobások időpontját $\binom{n-l_1}{l_2}$-féleképp választhatjuk. A harmadik urnába eső golyók dobás időpontja az első két urnába eső golyók dobás időpontját korábban rögzítve

$\binom{n-l_1-l_2}{l_3}$-féleképp választható. Hasonlóan a j-ik urnába eső golyók dobás időpontja $\binom{n-l_1-\cdots-l_{j-1}}{l_j}$-féleképp választható, ha az előző $j-1$ urnába eső golyók dobás időpontját már rögzítettük. Ez igaz minden $1 \le j \le k$ számra, ha bevezetjük az $l_0 = 0$ jelölést (abból a célból, hogy az állítás $j=1$ esetre is érvényes legyen). Ezért a keresett dobássorozatok száma

$$\prod_{j=1}^{k} \binom{n-l_1-\cdots-l_{j-1}}{l_j} = \prod_{j=1}^{k} \frac{(n-l_1-\cdots-l_{j-1})!}{(n-l_1-\cdots-l_j)!\,l_j!} = \frac{n!}{l_1!\cdots l_k!},$$

ahol az $n-l_1-\cdots-l_{j-1} = n$ konvenciót alkalmazzuk a $j=1$ esetben.

Második megoldás. (Rövid megoldásvázlat.) Sorsoljuk ki először azt az l_1 időpontot, amikor az első urnába, azután azt az l_2 időpontot amikor a második urnába dobjuk a golyót, és így tovább, végül azt az l_1 időpontot, amikor a k-ik urnába dobjuk a golyót. Az ilyen húzássorozatok száma $n!$. (Az első urnába eső dobások időpontjait $n(n-1)\cdots(n-l_1+1$, a második urnába eső dobások időpontjait $(n-l_1)\cdots(n-l_1-l_2+1)$-féleképp, és így tovább a k-ik urnába eső dobások időpontjait $(n-l_1-\cdots-l_{k-1})\cdots(n-l_1-\cdots-l_k+1)$ módon választhatjuk. Emlékezzünk, hogy $\sum\limits_{j=1}^{k} l_j = n$.) Viszont ily módon minden lehetséges húzássorozatot $l_1!\cdots l_k!$ multiplicitással számoltuk, mert nincs jelentősége annak, hogy a j-ik urnába eső l_j dobások időpontot milyen sorrendben sorsoltuk ki.

4.) Legyen adva k urna, és dobjunk be egymás után n golyót e k urna valamelyikébe. Legyen minden dobássorozat valószínűsége egyforma. Rögzítsünk k nem-negatív $l_1, \dots, l_k$ egész számot úgy, hogy $\sum\limits_{j=1}^{k} l_j = n$. Mi annak a valószínűsége, hogy a j-ik urnába l_j golyó minden $1 \le j \le k$ indexre?

Megoldás: A válasz $\frac{1}{k^n}\frac{n!}{l_1!\cdots l_k!}$. Ugyanis k^n lehetséges dobássorozat van, így minden dobássorozat valószínűsége $\frac{1}{k^n}$. Innen, és az előző feladat eredményéből következik az állítás.

5. Egy urnában 20 piros és 30 fehér golyó van. Kihúzunk 25 golyót visszatevéssel. Mi annak a valószínűsége annak, hogy az első húzás eredménye piros. Annak, hogy az első húzás eredménye piros és a másodiké fehér? Annak, hogy az ötödik húzás eredménye piros? Annak, hogy az ötödik húzás eredménye piros és a tízenhatodik húzás eredménye fehér?

Megoldás: Annak a valószínűsége, hogy az első húzás piros $\frac{20}{50} = \frac{2}{5}$, mert 50 golyóból húzzuk ki a 20 piros golyó valamelyikét, és minden golyót egyforma valószínűséggel húzunk ki. Annak a valószínűsége, hogy az első húzás piros, a második fehér, $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{6}{25}$, mert először 50 golyó közül választjuk ki a húsz piros golyó valamelyikét majd 50 golyó valamelyikéből a 30 fehér golyó valamelyikét, és minden húzás egyforma valószínű. Hasonlóan annak valószínűsége, hogy az 5. húzásban piros golyót húzunk ki $\frac{2}{5}$, és annak valószínűsége, hogy az 5. húzás során piros és a 16. húzás során fehér golyót húzunk $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{6}{25}$.

Jegyezzük meg, hogy a következő feladat megoldása egy olyan érvet tartalmaz, amelyik ebben az esetben is alkalmazható, és megmutatja, hogy annak valószínűsége, hogy az 5. húzás piros és a 16. húzás fehér megegyezik annak valószínűségével, hogy az első húzás piros és a második húzás fehér. Érdemes ezeket az érveléseket mégegyszer végiggondolni azután, hogy megtárgyaltuk a valószínűségi mező pontos definicióját.

6. Egy urnában 20 piros és 30 fehér golyó van. Kihúzunk 25 golyót *visszatevés nélkül*. Mi a valószínűsége annak, hogy az első húzás eredménye piros? Annak, hogy az első húzás eredménye piros és a másodiké fehér? Annak, hogy az ötödik húzás eredménye fehér? Annak, hogy az ötödik húzás eredménye piros és a tízenhatodik húzás eredménye fehér?

   Megoldás: Annak a valószínűsége, hogy az első húzás piros $\frac{20}{50}=\frac{2}{5}$, mert 50 golyóból húzzuk ki a 20 piros golyó valamelyikét, és minden golyót egyforma valószínűséggel húzunk ki. Annak a valószínűsége, hogy az első húzás piros, a második fehér, $\frac{2}{5}\cdot\frac{30}{49}=\frac{60}{245}$, mert először 50 golyó közül választjuk ki a húsz piros golyó valamelyikét, majd 49 golyó valamelyikéből a 30 fehér golyó valamelyikét, és minden húzás egyforma valószínű. Belátjuk, hogy annak valószínűsége, hogy a 16. húzásban piros golyót húzunk ki, megegyezik annak a valószínűségével, hogy az első húzás piros, azaz ez $\frac{2}{5}$. Továbbá annak a valószínűsége, hogy az 5. húzás során piros és a 16. húzás során fehér golyót húzunk megegyezik annak a valószínűségével, hogy az első húzás eredménye fehér, a második húzás eredménye piros. Ezért ez a valószínűség is $\frac{2}{5}\cdot\frac{30}{49}=\frac{60}{245}$.

   Tekintsük ugyanis az összes 25 hosszúságú húzássorozatot. Ekkor annak valószínűsége, hogy az 5. húzás eredménye piros a 16. húzás eredménye fehér megegyezik az összes olyan 25 hosszúságú húzássorozat valószínűségének az összegével, amelyek 5. helyén piros és a 16. helyén fehér jegy áll. Hasonlóan számítható ki annak a valószínűsége, hogy az első húzás piros és a második húzás eredménye fehér, azzal a különbséggel, hogy az 5. hely helyett az első és a 16. hely helyett a második helyet kell tekinteni. Be fogjuk látni, hogy ugyanaz a képlet fejezi ki ezt a két különböző valószínűséget, erért ezek a valószínűségek megegyeznek.

   Vegyük észre, hogy annak valószínűsége, hogy egy előírt konkrét 25 hosszúságú sorozat jelenik meg csak attól függ, hogy a sorozat hány piros és hány fehér golyót tartalmaz, de nem függ a fehér és piros húzások sorrendjétől. Valóban, ha egy húzássorozat k piros és $25-k$ fehér golyót tartalmaz, akkor ennek valószínűsége $P(k)=\frac{25\cdot24\cdots(25-k+1)\cdot30\cdot29\cdots(30-(25-k)+1)}{50\cdot49\cdots26}$. Ugyanis egy előírt húzássorozat valószínűsége $\prod\limits_{j=1}^{25}\frac{l(j)}{50-j+1}$, ahol $l(j)$ az a $j-1$-ik húzás után az urnában maradt piros golyók száma, ha a j-ik húzás piros, és a $j-1$-ik húzás után az urnában maradt fehér golyók száma, ha a j-ik húzás fehér. Gondoljuk meg, hogy ez a kifejezés megegyezik a megadott formulával.

   Jelölje $A(k;5,16)$ az olyan 25 hosszúságú sorozatok számát, amelyek k piros és $25-k$ fehér jelet tartalmaznak, és az 5. helyen piros a 16. helyen pedig fehér jel áll. Jelölje továbbá $A(k;1,2)$ az olyan 25 hosszúságú sorozatok számát, amelyek k piros és $25-k$ fehér jelet tartalmaznak, az 1. helyen piros a 2. helyen pedig fehér jel áll. Ekkor a két összehasonlítandó valószínűség $\sum\limits_k A(k;5,16)P(k)$ illetve $\sum\limits_k A(k;1,2)P(k)$. Ezért annak érdekében, hogy megmutassuk a kívánt azonosság teljesülését elegendő belátni azt, hogy $A(k;5,16)=A(k;1,2)$ minden k számra.

Viszont nem nehéz belátni, hogy $A(k;5,16)=A(k;1,2)=\binom{23}{k-1}$, mert mind a két esetben 23 előírt helyre kell írni $k-1$ piros és $25-(k+1)$ fehér golyót.

Az utolsó azonosság egy másik lehetséges bizonyítása: Mutassuk meg, hogy ha tekintjük az összes 25 hosszúságú k piros és $25-k$ fehér golyót tartalmazó sorozatot, akkor az ilyen sorazatok 5. jelét kicserélve az elsővel és a 16. jelét a másodikkal kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést kapunk azon halmazok között, amelyek számosságaként definiáltuk az $A(k;5,16)$ és $A(k;1,2)$ számokat.

Hasonlóan mutatható meg, hogy annak a valószínűsége, hogy az első, illetve hogy az ötödik húzás piros megegyezik.

7. Egy urnában 20 piros és 30 fehér golyó van. Kihúzunk 25 golyót. Minden húzás után a kihúzott golyót visszadobjuk egy másik ugyanolyan színű golyóval. Lássuk be, hogy annak a valószínűsége, hogy a 3. és 7. húzáskor piros golyót húzunk megegyezik annak valószínűségével, hogy az első és második húzáskor piros golyót húzunk. Számítsuk ki ezt a valószínűséget.

   Megoldás: Tekintsünk egy olyan 25 hosszúságú húzássorozatot, amely k piros és $25-k$ fehér golyót tartalmaz. Vegyük észre, hogy egy ilyen sorozat p_k valószínűsége csak a k számtól függ, de nem függ attól, hogy mely helyeken vannak a piros húzások. Valóban,

$$p_k = \frac{20(20+1)\cdots(20+k-1)30(30+1)\cdots(30+(25-k)-1)}{50(50+1)\cdots(50+25-1)}$$

   Jelőlje, $A(k)$ azon 25 hosszúságú sorozatok számát, amelyek k piros és $25-k$ fehér golyót tartalmaznak, és az 1. és 2. húzás piros; $B(k)$ azon 25 hosszúságú sorozatok számát, amelyek k piros és $25-k$ fehér golyót tartalmaznak, és a 3. és 7. húzás piros. Ekkor a két vizsgált valószínűség a $\sum\limits_k A(k)p_k$, illetve $\sum\limits_k B(k)p_k$ kifejezéssel egyenlő. Ezért a feladat megoldásához elég belátni, hogy $A(k)=B(k)$ minden k számra is. Ez valóban igaz, mert $A(k)=B(k)=\begin{pmatrix}23\\k-2\end{pmatrix}$. Könnyű közvetlenül kiszámolni, annak valószínűségét, hogy az első két húzás piros. $\frac{20}{50}\cdot\frac{21}{51}$, mivel az első húzásban $\frac{20}{50}$ valószínűséggel húzunk pirosat, és ha az első húzás piros volt, akkor a második húzásban $\frac{21}{51}$ valószínűséggel húzunk pirosat a 21 piros és 30 fehér golyó közül.

Házi feladat:

Számítsuk ki annak valószínűségét, hogy lottón legalább három találatot érünk el.