A szeptember 26-i gyakorlat témája

1.) Számítsuk ki annak valószínűségét, hogy lottón (pontosan) három találatot érünk el.

Megoldás: Számoljuk ki, hány olyan húzássorozat van, amely a (majdani lottóhúzáson) kihúzott 5 számból pontosan 3-at tartalmaz, és összesen hány 5 hosszúságú húzássorozat van. (A húzássorozatok összeszámolásánál nem vesszük figyelembe, hogy milyen sorrendben húztuk ki a golyókat, csak azt, hogy mi a kihúzott 5 golyó.) Képzeljük el úgy, hogy a kihúzott (eltalálandó) golyók pirosra, a nem kihúzott golyók fehérre vannak festve. Akkor az a kérdés, hogy hányféleképp tudunk az 5 piros golyóból 3-at, a 85 fehér golyóból 2-t kiválasztani. Megtárgyaltuk, hogy a 85 golyóból $\binom{85}{2}$-féleképpen tudunk kiválasztani 2-t, és 5 golyóból $\binom{5}{3}$-féleképpen tudunk kiválasztani 3-t. Az összes olyan 5 elemű sorozat száma, amely 3 piros és 2 fehér golyót tartalmaz $\binom{85}{2}\binom{5}{3}$. Megbeszéltük korábban, hogy 90 golyóból 5-öt $\binom{90}{5}$-féleképpen választhatunk ki. Minden húzássorozat valószínűsége egyforma, ezért a három találat valószínűsége

$$\frac{\text{kedvező eset}}{\text{összes eset}} = \frac{\binom{85}{2}\binom{5}{3}}{\binom{90}{5}}.$$

Megjegyzés. Azt mondtuk, hogy minden húzássorozat valószínűsége egyforma nagy. Ez közvetlenül akkor látható, ha a húzássorozatokban a kihúzott golyók húzásának a sorrendjét is figyelembe vesszük, míg számunkra az az eset az érdekes, amikor azt nem vesszük figyelembe. De ez a második eset könnyen visszavezethető az első esetre, mert minden a húzássorozat sorrendjét figyelembe nem vevő sorozat megjelenése ugyanannyi (nevezetesen 5!) a húzássorozat sorrendjét figyelembe vevő sorozat valamelyikének a megjelenését jelenti.

2.) Számítsuk ki annak valószínűségét, hogy lottón legalább három találatot érünk el.

Megoldás: Az, hogy legalább három találatunk van azt jelenti, hogy három, négy vagy öt találatunk van. Továbbá ez a három esemény egymást kizárja, (másképp fogalmazve ezek diszjunkt események). Ezért a kiszámolandó valószínűség egyenlő annak a valószínűségével, hogy 5 találatunk van plusz annak a valószínűségével, hogy 4 találatunk van plusz annak a valószínűségével, hogy 3 találatunk van. Ezt az előző feladathoz hasonlóan tudjuk kiszámolni, és az eredmény:

$$\frac{1 + \binom{85}{1}\binom{5}{4} + \binom{85}{2}\binom{5}{3}}{\binom{90}{5}}.$$

Megjegyzés: A kérdés természetes folytatása olyan valószínűségek kiszámolása, mint például a két találat elérésének valószínűsége akkor, ha több szelvényt is kitöltünk. Az ilyen kérdések vizsgálatát azonban elhalasztom. Ezekre akkor térünk vissza, ha tanultuk a függetlenség fogalmát.

Házi feladat:

Egy urnában l_1 darab 1-es színű, l_2 darab 2-es színű, és így tovább l_s darab s-es színű golyó van. Hány olyan (visszatevéses) $r = r_1 + \cdots + r_s$ hosszú húzássorozat van, amelyik pontosan r_1 darab 1-es színű, r_2 darab 2-es színű, és így tovább r_s darab s színű golyót tartalmaz?

3. Két ember 8 és 9 óra között megjelenik egy téren egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással. Mind a kettő félórát vár a másikra, és ha az addig nem jön, akkor hazamegy. Mi a valószínűsége annak, hogy találkoznak?

   Megoldás: Tekintsük az egységnégyzetet, és válasszuk azt a véletlen pontot az egységnégyzeten, melynek x koordinátája megadja, hogy az első ember az y koordinátája pedig megadja, hogy a második ember ember mikor érkezett. Ekkor az így definiált pont egyenletes eloszlású az egységnégyzeten, azaz annak valószínűsége, hogy ez a pont az egységnégyzet egy (szép) részhalmazába esik megegyezik e halmaz területével. Az, hogy a két ember találkozik azt az eseményt jelenti, hogy az így definiált (x, y) pont az egységnégyzet

   $$A = \left\{(x, y)\colon\ -\frac{1}{2} \le y - x \le \frac{1}{2}\right\} \cap [0,1] \times [0,1]$$

   részhalmazába esik. Ennek a halmaznak a területe $1 - 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$, és ez a keresett valószínűség.

4. Két egy méter hosszú botot véletlenszerűen, (egymástól függetlenül) egyenletes eloszlással eltörünk. A két rövidebb darabot összeragasztjuk. Mi annak a valószínűsége, hogy az így kapott új bot hossza kisebb mint 0.8 méter?

   Megoldás: Ez a feladat is hasonló módon tárgyalható. Tekintsük az egységnégyzetet, és válasszuk azt a véletlen pontot az egységnégyzeten, melynek x koordinátája megadja, hogy hol törtük el az első botot az y koordinátája pedig azt, hogy hol törtük el a második botot. Ekkor az így definiált pont egyenletes eloszlású az egységnégyzeten. Az az esemény, hogy az összeragasztott bot hossza kisebb mint 0.8 megegyezik annak az eseménynek a valószínűségével, hogy az (x, y) pont a következő A_1, A_2, A_3 és A_4 halmazok $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ uniójába esik: $A_1 = \{(x, y)\colon x + y < 0.8\} \cap [0,1] \times [0,1]$, $A_2 = \{(x, y)\colon x + (1 - y) < 0.8\} \cap [0,1] \times [0,1]$, $A_3 = \{(x, y)\colon 1 - x + y < 0.8\} \cap [0,1] \times [0,1]$ és $A_4 = \{(x, y)\colon 1 - x + 1 - y < 0.8\} \cap [0,1] \times [0,1]$. Rajzoljuk le ezeket a halmazokat. Az ábra mutatja, hogy az $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ halmaz komplementere az a négyzet melynek csúcsai a (0.3, 0.5), (0.5, 0, 3), (0.7, 0.5), és (0.5, 0.7) pontok. Ennek a négyzetnek a területe, 0.08 tehát a minket érdeklő valószínűség $1 - 0.08 = 0.92$.

Értsük meg azt a valószínűségi modellt, amelyben a fenti problémákat tárgyaltuk. Milyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőben tudjuk tárgyalni a 3. feladatot?

Az ω elemi eseményeket természetes módon definiálhatjuk. Egy lehetséges kimenetel az, hogy az első ember $8{+}x$ órakor a második ember $8{+}y$ órakor érkezik, $0 \le x, y \le 1$.

Ezt természetes módon azonosíthatjuk az (x,y) pontpárral. Ilyen módon definálhatjuk az $\Omega=[0,1]\times[0,1]$ egységnégyzetet, mint a biztos eseményt, és egy $(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$ elemi esemény azt jelenti, hogy az első ember $8+x$ a második ember pedig $8+y$ órakor érkezett.

A $\mathcal{A}$ σ-algebra és a $\mathcal{A}$ σ-algebrán értelmezett P valószínűségi mérték definiciója sokkal nehezebb. Ez néhány a matematika mély és az Önök tananyagában nem szereplő eredményén alapul. Viszont az eredmények szemléletesek, ezért a probléma az eredmények pontos ismerete nélkül is tárgyalható. Az természetes, hogy $P(\{\omega\})=0$ minden $\omega=(x,y)$ elemi eseményre. Az $\mathcal{A}$ σ-algebra az Ω részhalmazaiból áll, és természetes egy A halmaz valószínűségét úgy definiálni, mint ennek a halmaznak a területét. De beszélhetünk-e az egységnégyzet tetszőleges részhalmazának a területéről? A válasz erre a kérdésre nemleges, és a helyzet pontos tisztázásához a matematika mély eredményeire van szükség. Lényeges különbség a korábban tekintett és most tárgyalt probléma között, hogy a jelen esetben az elemi események ismert $P(\{\omega\})=0$ valószínűsége nem segít az általános halmazok valószínűségének a meghatározásában. Már egy $[a,b]\times[c,d]$ téglalap valószínűségének a definiciójához sem elegendő az elemi események valószínűségének az ismerete. (Itt találkozunk azzal az eredménnyel, hogy egy téglalapnak kontinum sok, tehát több mint megszámlálhatóan sok pontja van.) Mit lehet tenni e probléma megoldása érdekében?

Természetes, hogy az $[a,b]\times[c,d]\subset\Omega$ téglalapok definicióját a $P([a,b]\times[c,d])=(b-a)(d-c)$ képlettel definiáljuk, azaz egy téglalap valószínűsége megegyezik e téglalap területével. Ezenkívül megköveteljük, hogy a valószínűség σ-additív, azaz véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok diszjukt halmaz uniójának a valószínűsége megegyezik az unióban szereplő halmazok valószínűségének az összegével. Ez a tulajdonság sok halmaz valószínűségét egyértelműen meghatározza. A matematika itt nem tárgyalt eredményeiből következik, hogy a téglalapokon definiált és a területtel egyenlő valószínűség egyértelműen kiterjeszthető a téglalapokat tartalmazó legszűkebb σ-algebrára, (az, hogy beszélhetünk a téglalapokat tartalmazó legszűkebb σ-algebráról szintén része az eredménynek), és szép halmazokra ez megegyezik a halmaz területével. A P valószínűséget a téglalapok területének a fenti kiterjesztéseként definiáljuk a téglalapokat tartalmazó legszűkebb $\mathcal{A}$ σ-algebrán.

Ilyen módon definiáljuk az $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mezőt. Felmerülhet a kérdés, hogy nem okoz-e problémát az, hogy nem definiáltuk minden halmaz valószínűségét. A válasz erre a kérdésre nemleges. Ugyanis csak olyan halmazok valószínűségére vagyunk kiváncsiak, amelyeket alkalmas (megszámlálható uniók, metszetek és komplementer képzés) műveletek segítségével definiálni tudunk, és az ilyen halmazok benne vannak az $\mathcal{A}$ σ-algebrában.

5. Adjunk természetes módon valószínűségszámítási modellt arra, hogy egy szabályos pénzdarabot végtelen sokszor feldobunk. Más megfogalmazásban feladatunk a következő: Konstruáljunk olyan $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mezőt, amelyben értelmezni tudjuk azt az A_j eseményt, hogy a j-ik dobás eredménye fej, $P(A_j)=\frac12$ minden $j=1,2,\dots$, sőt teljesül a $P(A_1^{\varepsilon_1}\cap\cdots\cap A_k^{\varepsilon_k})=\left(\frac12\right)^k$ azonosság is minden $k=1,2,\dots,$ számra $\varepsilon_j=\pm1$, $j=1,2,\dots$ kitevőre, ahol $A_j^1=A_j$ és $A_j^{-1}=\Omega\setminus A_j$.

Megoldás: Legyenek az ω elemi események a végtelen fej-írás sorozatok, és definiáljuk az Ω biztos eseményt mint az összes ω-t tartalmazó halmazt. Definiálnunk kell még az $\mathcal{A}$ σ-algebrát és a $P(A)$ valószínűségeket az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező teljes definiciója érdekében. Jelen esetben $P\{\omega\} = 0$ minden ω elemi eseményre, és a kívánt $\mathcal{A}$ σ-algebrát, illetve P valószínűséget nem tudjuk olyan egyszerűen definiálni, mint véges dobássorozatok esetében. Valójában csak a mértékelmélet néhány fontos, de nem tanult eredményére hivatkozva tudjuk ezt megtenni. Legyen $A_j \subset \Omega$ az a halmaz, amelyik megegyezik azzal az eseménnyel, hogy a j-ik dobás fej, azaz $A_j = \bigcup\limits_{\omega\ j\text{-ik koordinátája fej}} \{\omega\}$, azaz az összes olyan $\omega = (\dots, F, \dots, I, \dots)$ végtelen fej-írás sorozat unióját tekintjük, amelyek j-ik koordinátája fej. Definiáljuk az összes $A(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) = \bigcap\limits_{j=1}^{k} A_j^{\varepsilon_j}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $1 \le j \le k$ halmazt. Ez annak felel meg, hogy azokat a dobássorozatokat tekintjük, amelyekben az első k dobás eredményét előírjuk, a többi dobás eredménye tetszőleges lehet. Természetes elvárás, hogy ezek az $A(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ halmazok benne legyenek az $\mathcal{A}$ σ-algebrában. Egy viszonylag egyszerűen bizonyítható eredmény azt mondja ki, hogy létezik egy legszűkebb az összes $A(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ alakú halmazt tartalmazó σ-algebra. Ez lesz a $\mathcal{A}$ σ-algebra. Definiáljuk a $P(A(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k))$ valószínűségeket a $P(A(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$ képlet segítségével. (Ez a természetes definició.) A mértékelmélet egy mély eredménye szerint ezen események valószínűsége egyértelműen kiterjeszthető az $\mathcal{A}$ σ-algebrára úgy, hogy σ-addítív halmazfüggvényt, azaz valószínűségi mértéket kapjunk. Másképp kifejezve, meg lehet adni a $P(A)$ valószínűségeket minden $A \in \mathcal{A}$ halmazra, mégpedig egyértelműen úgy, hogy σ-additív halmazfüggvényt kapjunk, és a $0 \le P(A) \le 1$, $A \in \mathcal{A}$, és $P(\Omega) = 1$ relációk is teljesülnek. Ez a kiterjesztés lesz a P valószínűség $\mathcal{A}$-n.

6. Egy szabályos érmét feldobunk egymás után egészen addig, amíg másodszor megjelenik egy fej. Azután a dobássorozatot abbahagyjuk. Mi annak a valószínűsége, hogy az utolsóelőtti dobás eredménye fej?

   Megoldás: Az esemény, amelyiknek a valószínűségét ki akarjuk számolni, a következő módon is jellemezhető: Először k darab írásdobás történik valamely $k = 0, 1, 2, \dots$, számmal, majd utána két fejdobás következik be. Ennek valószínűsége

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

7. Ledobunk az egység intervallumra egy pontot véletlenül egyenletes eloszlásban, azaz annak valószínűsége, hogy a ledobott pont egy $[a, b]$ intervallumba esik, $[a, b] \subset [0, 1]$ $b - a$-val egyenlő. Lássuk be, hogy annak valószínűsége, hogy a ledobott pont pontosan a $\frac{\pi}{6}$ pontba esik nulla.

   Megoldás: Annak valószínűsége, hogy a ledobott pont a $\frac{\pi}{6}$ pontba esik kisebb, mint annak a valószínűsége, hogy a ledobott pont a $\left[\frac{\pi}{6} - \varepsilon, \frac{\pi}{6} + \varepsilon\right]$ intervallumba esik, és ennek valószínűsége 2ε. Ez igaz minden $\varepsilon > 0$ számra. Ez csak úgy lehetséges, ha a vizsgált valószínűség nulla.

Fontos megjegyzés: *Az üres, be nem következő esemény valószínűsége nulla. Az előbb tárgyalt egyszerű feladatok azt mutatják, hogy lehetséges az, hogy egy esemény bekövetkezhet, a valószínűsége mégis nulla. Nagyon fontos, hogy ezt jól megértsük.*

8. Egy szabályos pénzdarabot feldobunk végtelen sokszor. Mutassuk meg, hogy annak a valószínűsége, hogy nem lesz fejdobás nulla. Annak valószínűsége, hogy legfeljebb 100 fejdobás lesz szintén nulla.

   Megoldás: Annak valószínűsége, hogy az első n dobásban nem lesz fejdobás, azaz csupa írásdobás következik be 2^{-n}. Annak valószínűsége, hogy egyáltalán nem lesz fejdobás megegyezik annak az eseménynek a valószínűségével, hogy minden n számra az első n dobásban nem lesz fejdobás, aminek valószínűsége kisebb, mint 2^{-n} minden $n = 1, 2, \dots$ számra. Ezért a vizsgált esemény valószínűsége, amely különböző 2^{-n} valószínűségű események metszete, $n = 1, 2, \dots$, nulla.

   Hasonlóan annak az eseménynek a valószínűsége, hogy az első $100n$ dobásban legfeljebb 100 fejdobás következik be kisebb, mint annak a valószínűsége, hogy vagy az első 100 sem a 101. és 200. közötti sem az $100(n-1)+1$. és $100n$. közötti dobásban nem történik tiszta fejdobás sorozat, és ennek valószínűsége $\left(1-2^{-100}\right)^n$. Ezért annak valószínűsége, hogy egyáltalán nem következik be fejdobás kisebb, mint $\left(1-2^{-100}\right)^n$ minden n számra, tehát nulla.