AZ AUGUSZTUS 27.-i DOLGOZAT FELADATAI

1. Egy éven át lottózunk. Mind az 52 héten kitöltünk egy szelvényt (90 számból kell eltalálni ötöt). Mi a valószínűsége annak, hogy legalább két alkalommal lesz (pontosan) hármas találatunk?
2. Feldobunk egy szabályos pénzdarabot 102 alkalommal egymástól függetlenül. Legyen a ξ valószínűségi változó egyenlő az olyan három egymást követő dobásból álló részsorozatok számával ebben a dobássorozatban, amelyeknek mindegyik eleme fejdobás. Számítsuk ki a ξ valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.
3. Van két sziget, az igazmondók és a hazugok szigete. Az igazmondók szigetén mindenki 0.9 valószínűséggel igaz, a hazugok szigetén pedig 0.8 valószínűséggel hamis választ ad bármely kérdésre. Valaki éjjel a viharos tengeren hajózva eljut a két sziget valamelyikére, 1/2 valószínűséggel az igazmondók, 1/2 valószínűséggel a hazugok szigetére. Megkérdezi az első szembejövő embert, hogy az igazmondók szigetére került-e. Azt a választ kapja, hogy igen. A második embertől, akivel találkozik azt kérdezi, hogy igaz-e, hogy kétszer kettő néggyel egyenlő. Erre a kérdésre is igenlő választ kap. Mi annak a valószínűsége, hogy emberünk az igazmondók szigetére került?
4. Legyen ξ és η két független valószínűségi változó, amelyek közül ξ λ paraméterű és η μ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó, azaz a ξ valószínűségi változó $f(\cdot)$ sűrűségfüggvénye $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, ha $x \geq 0$, $f(x) = 0$, ha $x < 0$, az η valószínűségi változó $g(\cdot)$ sűrűségfüggvénye $g(x) = \mu e^{-\mu x}$, ha $x > 0$, $g(x) = 0$, ha $x < 0$, továbbá $\lambda > 0$, $\mu > 0$ és $\lambda \neq \mu$. Számítsuk ki a $\xi + \eta$ összeg sűrűségfüggvényét.
5. Ledobunk 6000 pontot egymástól függetlenül egyenletes eloszlással a $[0, 3]$ intervallumra. Azaz a ledobott pontok egy valószínűséggel a $[0, 3]$ intervalumba esnek, és annak valószínűsége, hogy egy ledobott pont egy $[a, b] \subset [0, 3]$ alakú intervallumba esik $\frac{b-a}{3}$. Ha egy pont a $[0, 1]$ intervallumba esik, akkor felírjuk a ledobott pont helyének pontos értékét egy jegyzőkönyvbe, ha a pont az $(1, 2]$ intervalumba esik, akkor az 1 számot, ha pedig a $(2, 3]$ intervallumba esik, akkor a 2 számot írjuk a jegyzőkönyvbe. Adjunk jó közelítő becslést annak valószínűségére, hogy a jegyzőkönyvbe írt számok összege 6900 és 7070 közé esik.
6. Legyen A, B, C, D négy esemény egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Mikor mondjuk, hogy ezek függetlenek?