A Valószínűségszámítás I. előadássorozat második előadása.
2007. február 13.

Kolmogorov valószínűségszámítási modelljének a vizsgálata

Az előző előadáson tárgyaltam néhány valószínűségszámítási probléma megoldását. Ennek során bevezettem olyan a valószínűségszámítás Kolmogov-féle definicióját kielégítő modelleket, amelyekben e problémák vizsgálhatóak. A vizsgált feladatokban olyan kisérletek ereményét kellett tekinteni, amelyeknek véges sok különböző (véletlen) kimenetele lehetséges, és ezt a tényt a feladatokat leíró modellek konstrukciójában ki is használtam. E modellek definiciójában először bevezettem az ω elemi eseményeket, amelyek a tekintett kisérlet lehetséges kimenetelei voltak, és a kisérlet összes lehetséges kimenetelét felsoroltam. Az Ω biztos biztos eseményt úgy definiáltam, mint az összes ω elemi eseményt tartalmazó halmazt, az $\mathcal{A}$ σ-algebrát, pedig mint az Ω összes lehetséges részhalmazából álló σ-algebrát. Végül minden lehetséges ω kimenetelnek megadtam a valószínűségét, és egy $A \in \mathcal{A}$ halmaz valószínűségét úgy definiáltam, mint az általa tartalmazott elemi események valószínűségének az összegét. Ez a konstrukciós módszer jól működik, ha a tekintett kisérlet lehetséges kimeneteleinek száma véges vagy megszámlálhatóan végtelen. De olyan esetekben, amikor a lehetséges kimenetelek száma ennél is nagyobb, például úgynevezett kontinum számosságú, akkor új gondolatokat és a mértékelmélet néhány mély eredményét kell alkalmazni egy a valószínűségszámítási problémák vizsgálatában alkalmas modell megkonstruálásához.

Tekinthetjük például annak a valószínűségét, hogy egy az egységnégyzetbe véletlenül ledobott pont az egységnégyzet egy részhalmazába esik vagy annak a valószínűségét, hogy egy végtelen fej-írás sorozatban az első n dobásban megjelenő fej-dobások számának a relatív gyakorisága konvergál egy előírt α számhoz. Az ilyen feladatok vizsgálata nehezebb, és ezek igényelték a Kolmogorov-féle modellben szereplő olyan az első hallásra kissé talán szokatlan fogalmak és tulajdonságok bevezetését, mint a σ-algebra vagy a σ-additív halmazfüggvény. Néhány példát mutatok, amelyek jelzik, hogy hogyan lehet ilyen bonyolultabb problémákat Kolmogorov elméletének a segítségével tárgyalni. Előtte azonban megfogalmazok néhány olyan kérdést, amelyek vizsgálata segíthet Kolmogorov elméletének megértésében.

Néhány Kolmogorov elméletével kapcsolatos probléma.

A) Természetes volt-e az $\mathcal{A}$ σ-algebra bevezetése a valószínűségi mező definiciójában? Mivel csak az $\mathcal{A}$ σ-algebra által tartalmazott halmazok valószínűségét definiáltuk, felmerülhet a kérdés: Nem fordulhat-e elő, hogy olyan esemény valószínűségére vagyunk kiváncsiak, amelyre ezt a valószínűséget nem definiáltuk?

B) Van-e mélyebb oka annak, hogy a valószínűségi mező definiciójában szereplő P valószínűségi mértékről nem csak azt tettük fel, hogy additív, hanem azt is, hogy σ-additív? A fő probléma annak tisztázása, hogy nem okoz-e ez a követelmény nehézségeket. Előfordulhat-e, hogy egy véletlen jelenségnek azért nem tudjuk megadni a valószínűségi modelljét, mert nem tudjuk biztosítani a modellben megjelenő P valószínűség σ-additivítását?

A fenti kérdésekre megnyugtató választ lehet adni. Ezt fogom ismertetni, részben az előadás fő részében, részben egy kiegészítésben. De e kérdések tisztázása több mély mértékelméleti eredményen alapul, amelyek bizonyítása nem része ezen kurzus anyagának. Ezért ezek bizonyítását elhagyom. Viszont egy kiegészítésben felidézek néhány (korábban tanult) fontos tényt a végtelen és azon belül a megszámlálható halmazokról. E kérdések tárgyalása előtt egy olyan feladat megoldását írom le, amely jelzi, hogy a fent jelzett problémák még viszonylag egyszerű és természetes kérdések vizsgálatában is megjelennek.

1. feladat:

Dobjunk fel egy szabályos pénzdarabot végtelen sokszor. Mi a valószínűsége annak, hogy az első fej-dobásig kevesebb ideig kell várni, mint arra, hogy az első fej-dobás után megjelenjen a második fej-dobás?

Megoldás: Jelölje $A(i,j)$ azt az eseményt, hogy az első fej-dobás az i-ik, a második fej-dobás pedig az $i+j$-ik dobás. Ekkor minket a $B = \bigcup\limits_{(i,j)\colon\, j>i\ge 1} A(i,j)$ esemény valószínűsége érdekel. Továbbá, az $A(i,j)$ esemény azt az eseményt jelenti, hogy először $i-1$ írás, azután fej, utána $j-1$ írás, utána pedig fej-dobás következik. Ennek valószínűsége $2^{-(i+j)}$. Innen

$$
\begin{aligned}
P(B) &= P\left(\bigcup_{(i,j)\colon\, j>i\ge 1} A(i,j)\right) = \sum_{(i,j)\colon\, j>i\ge 1} P(A(i,j)) \\
&= \sum_{(i,j)\colon\, j>i\ge 1} 2^{-(i+j)} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=i+1}^{\infty} 2^{-i}2^{-j} = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \sum_{j=i+1}^{\infty} 2^{-j} = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-2i} = \frac{1}{3}.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Érdemes meggondolni, hogy milyen valószínűségi modellben tudjuk a fenti megoldást tárgyalni, és milyen matematikai ismeretek szükségesek annak igazolásához, hogy jogunk van ebben a modellben dolgozni. Vegyük észre, hogy mivel az első fej-dobásig vagy az első és második fej-dobás között végzett dobások száma tetszőlegesen nagy lehet, ezért a feladatot természetes olyan modellben tárgyalni, ahol végtelen sok független fej-írás dobás lehetséges. Megmutatom, hogyan lehet ilyen modellt konstruálni, és milyen matematikai eredményekre van szükségünk annak igazolásához, hogy ez a modell teljesíti a kívánt feltételeket.

Szabályos pénzdarab végtelen számú feldobásának a valószínűségszámítási modellje.

A következő problémát tekintjük. Egy szabályos pénzdarabot feldobunk *végtelen sokszor* egymás után. Alkossuk meg ennek egy lehetséges valószínűségszámítási modelljét, és vizsgáljuk meg, képesek vagyunk-e vizsgálni abban az ilyen dobássorozatokra megfogalmazható természetes problémákat.

A természetes hozzáállás a következő: Legyenek az elemi események az

$$\omega = (\cdots, F, \cdots, I, \cdots)$$

végtelen fej-írás sorozatok, és legyen az Ω biztos esemény az összes ilyen sorozatból álló halmaz. Ezután ki kell jelölni az Ω bizonyos részhalmazaiból álló $\mathcal{A}$ σ-algebrát és definiálni kell az $A \in \mathcal{A}$ halmazok $P(A)$ valószínűségét. Hangsúlyozni szeretném, hogy nem vagyunk kötelesek az Ω minden lehetséges részhalmazát belevenni az $\mathcal{A}$ σ-algebrába, és azoknak a halmazoknak, amelyek nincsenek benne ebben a σ-algebrában nem kell definiálnunk a valószínűségét. Ezzel a szabadságunkkal élni is fogunk.

Vegyük észre, hogy minden ω elemi eseménynek nulla a valószínűsége, továbbá egy ,,tipikus" Ω-beli halmaz kontinum sok ω elemi eseményből áll. Gondoljuk például meg, hogy az az esemény, hogy az első dobás fej azon végtelen fej-írás sorozatokból áll, amelynek első jegye F, ezt pedig tetszőleges további sorrendben követhetik F és I jelek. Az az esemény, hogy az első 20 dobásban több fej-dobás történt, mint írás dobás azon végtelen fej-írás sorozatból áll, amelynek első 20 jegyében legalább 11 F jel van, és más megkötés nincsen. Az előbb definiált halmazok kontinum sok null mértékű halmazból állnak. Viszont ez az információ nem elegendő egy halmaz (esemény) valószínűségének a definicójához. Milyen módszert érdemes választani? Természetes gondolat a következő: Vannak bizonyos ,,szép" halmazok, amelyeknek egy szabályos pénzdobás esetén meg tudjuk mondani a valószínűségét. Abból, hogy a valószínűségi mérték σ-additív következik, hogy további halmazok valószínűsége is egyértelműen meg van határozva. Abban bízhatunk, hogy ily módon halmazok elég gazdag osztályának meg van határozva a valószínűsége, és e halmazok valószínűségét a kívánt módon definiálva jó modellt kapunk. Látni fogjuk, hogy ez az elképzelés helyes, és bizonyos (mély) mértékelméleti ismeretek segítségével jó modellt kapunk.

Fejtsük ki a fent mondottakat részletesebben: Definiáljuk minden $k = 1, 2, \dots$ számra, és k hosszúságú $(\cdots, F, \cdots, I, \cdots)$ sorozatra az

$$\begin{aligned} A_k(\cdots, F, \dots, I, \dots) = \{\omega\colon & \ \omega \text{ olyan végtelen fej-írás sorozat,} \\ & \text{amelynek első } k \text{ jegye ez a } (\dots, F, \dots, I, \dots) \text{ sorozat}\} \end{aligned} \qquad (*)$$

halmazt, és legyen $P(A_k(\dots, F, \dots, I, \dots)) = 2^{-k}$ e halmaz valószínűsége. Szemléletesen azt tettük, hogy tekintettük azokat az eseményeket, amelyek azt írják le, hogy mi volt az első k dobás eredménye, és ezek valószínűségét úgy definiáltuk ahogy egy szabályos pénzdobás esetében azt tenni kell. Természetes elvárás, hogy az előbbi események legyenek benne a konstruálandó valószínűségi mező $\mathcal{A}$ σ-algebrájában, és ezek valószínűsége legyenek az előbb megadott számok. A valószínűségi mező definiciója lényegében ezen követelmények teljesítéséből áll. A formális definició megadása érdekében bebizonyítom a következő egyszerű lemmát.

Lemma: *Legyen adva egy Ω halmaz, és Ω részhalmazainak valamilyen $\mathcal{F}_0$ rendszere. Létezik egy az $\mathcal{F}_0$ halmazrendszert tartalmazó legszűkebb σ-algebra, azaz egy olyan $\mathcal{F}$ σ-algebra, amelyre igaz, hogy*

a.) $\mathcal{F}$ tartalmazza az $\mathcal{F}_0$ halmazrendszert, azaz, ha $F \in \mathcal{F}_0$, akkor $F \in \mathcal{F}$.

b.) Ha egy $\bar{\mathcal{F}}$ σ-algebra tartalmazza az $\mathcal{F}_0$ halmazrendszert, akkor az tartalmazza a $\mathcal{F}$ σ-algebrát is, azaz, ha $F \in \mathcal{F}$, akkor $F \in \bar{\mathcal{F}}$.

Megjegyzés: A fenti $\mathcal{F}$ σ-algebrát szokták az $\mathcal{F}_0$ által generált σ-algebrának is hívni.

Bizonyítás: Vegyük észre, hogy létezik az $\mathcal{F}_0$ halmazrendszert tartalmazó σ-algebra. Ilyen például, az Ω összes részhalmazát tartalmazó σ-algebra. Tekintsük az $\mathcal{F}_0$ halmazrendszert tartalmazó összes $\mathcal{G}$ σ-algebra

$$\mathcal{F}^* = \bigcap_{\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{G}} \mathcal{G}$$

metszetét, ahol $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{G}$ azt jelenti, hogy a $\mathcal{G}$ σ-algebra tartalmazza az $\mathcal{F}_0$ halmazrendszert, a metszet pedig úgy értendő, hogy $F \in \bigcap \mathcal{G}$, ha $F \in \mathcal{G}$ a metszetben szereplő mindegyik $\mathcal{G}$ σ-algebrára. Nyílván $F \in \mathcal{F}^*$ minden $F \in \mathcal{F}_0$ halmazra. Azt állítom továbbá, hogy $\mathcal{F}^*$ σ-algebra. Valóban, ha F_n, $n = 1, 2, \dots$ halmazokra igaz, hogy $F_n \in \mathcal{F}^*$, akkor az $F = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ halmazra szintén teljesül, hogy $F \in \mathcal{F}^*$. Ugyanis, ekkor minden $\mathcal{G} \supset \mathcal{F}_0$ σ-algebrára, $F_n \in \mathcal{G}$, tehát a σ-algebra tulajdonság miatt $F \in \mathcal{G}$ az ilyen σ-algebrákra. Innen következik, hogy $F = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{F}^*$. Hasonlóan $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{F}^*$, $\Omega \in \mathcal{F}^*$, és $\Omega \setminus F \in \mathcal{F}^*$, ha $F \in \mathcal{F}^*$.

Ezért $\mathcal{F}^*$ egy az $\mathcal{F}_0$ halmazrendszert tartalmazó σ-algebra. Innen, illetve $\mathcal{F}^*$ definiciójából viszont következik, hogy ez az $\mathcal{F}_0$-t tartalmazó legszűkebb σ-algebra.

Jelen esetben tekinthetjük az összes $(*)$ alakú halmazból álló $\mathcal{F}_0$ halmazrendszert és az általa generált σ-algebrát. Ez lesz a definiálandó $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ rendszerben az $\mathcal{A}$ σ-algebra. Definiálnunk kell még a P valószínűségi mértéket is az $\mathcal{A}$ σ-algebrán. Ez lehetséges az alább kimondott, és ebben az előadássorozatban bizonyítás nélkül elfogadott tétel alapján.

Tétel. *Tekintsük az összes fej-írás sorozatból álló Ω halmaz $(*)$ képlet által definiált $A_k(F, \dots, I, \dots)$ alakú halmazokból álló $\mathcal{F}_0$ halmazrendszert, és a $\mathcal{F}_0$ halmazrendszer által generált $\mathcal{A}$ σ-algebrát. Minden rögzített k-ra legyen $P(A_k(F, \dots, I, \dots) = 2^{-k}$ tetszőleges k-hosszúságú fej-írás sorozatra. (Azaz, akárhogy is adjuk meg az első k dobás eredményét, annak valószínűsége, hogy ez bekövetkezik, legyen 2^{-k}.) Ekkor létezik egy és csak egy olyan az $\mathcal{A}$ σ-algebra halmazain definiált σ-additív halmazfüggvény, amely az $A_k(\dots, F, \dots)$ alakú halmazokon az előbb előírt értékeket veszi fel.*

Megjegyzés: Egy mértékelméleti kiegészítésben megfogalmazom a fenti eredménynek egy hasznos általánosítását, amelyet mértékterek végtelen szorzatáról szóló eredménynek neveznek. Ez lehetővé teszi, hogy véletlen kisérletek végtelen sokszori egymástól független elvégzését leíró, és a valószínűségszámítás Kolmogorov-féle axiómarendszerét kielégítő modelleket konstruáljunk.

A fenti eredmény azt jelenti, hogy létezik a természetes elvárásokat kielégítő valószínűségi mérték, sőt ezek a feltételek egyértelműen meghatározzák a $\mathcal{A}$ σ-algebra összes eseményének a valószínűségét. A mérték egyértelműsége is fontos tulajdonság. Ez azt fejezi ki, hogy az $\mathcal{A}$ σ-algebrában szereplő halmazok valószínűségi mértéke értelmes, egyértelműen meghatározott szám. Megjegyzem, hogy ez a nem-triviális eredmény valójában speciális esete egy általánosabb eredménynek. Ezeket az eredményeket itt nem tárgyalom, de az ezen előadáshoz írt Kiegészítés 2 függelékben megadom a kérdéskör vizsgálatához szükséges legfontosabb eredményeket. A részletek pontos kidolgozása a mértékelmélet tantárgy témája. Fazekas István könyve a 45. oldalon szintén tárgyalja ezt a problémát, sőt a könyv 7. fejezete (Appendix) további értékes információkat tartalmaz.

Megjegyzem, hogy a fent kimondott tétel nem csak azt állította, hogy a valószínűségi mérték additív, hanem azt is, hogy az σ-additív. Vegyük észre, hogy az 1. feladat megoldásában a valószínűségi mértékeknek nem csak az additívitását hanem a σ-additívitását is kihasználtuk. (Lásd az (1) formulát.) A következőkben tárgyalok néhány további példát. Látni fogjuk, hogy a 4. feladat két különböző megoldásának az összehasonlítása azt mutatja, hogy a valószínűségi mérték σ-additivításából nemtriviális azonosságok is következnek.

Feladatok:

2.) Dobjunk fel egy szabályos dobókockát egymás után egymástól függetlenül végtelen sokszor. Mutassuk meg, hogy annak a valószínűsége, hogy az első n dobásban pontosan k darab 6-os dobás van $\binom{n}{k}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}\left(\frac{1}{6}\right)^{k}$. Annak a valószínűsége, hogy az n-ik dobásban lesz a k-ik 6-os dobás $\binom{n-1}{k-1}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}\left(\frac{1}{6}\right)^{k}$.

Megoldás: Minden dobássorozatnak feleltessük meg azt a J és R jelekből álló sorozatot, amelynek az i-ik helyén a J jel áll, ha a i-ik dobás 6-os, és az R jel, ha az i-ik dobás 1, 2, 3, 4 vagy 5. Ezzel a jelöléssel a feladat első része úgy fogalmazható át, hogy mi annak a valószínűsége, hogy az így definiált J és R jelekből álló sorozat első n tagjában pontosan k darab J és $n-k$ R jel áll. A sorozat minden helyén egymástól függetlenül $\frac{1}{6}$ valószínűséggel J, és $\frac{5}{6}$ valószínűséggel R jel áll. Minden olyan n hosszúságú sorozatnak, amely k darab J és $n-k$ R jelből áll $\left(\frac{1}{6}\right)^{k}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$ a valószínűsége. Mivel $\binom{n}{k}$ olyan n hosszúságú sorozat van, amelyiknek első az n jegyében pontosan k darab J jel van, ezért annak a valószínűsége, hogy a sorozat első n jelében pontosan k darab J jel van $\binom{n}{k}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}\left(\frac{1}{6}\right)^{k}$.

Az, hogy a k-ik J jel a sorozat n-ik tagjában jelenik meg azt jelenti, hogy a sorozat első $n-1$ tagjában pontosan $k-1$ J-jel van, és az n-ik jel J. Összesen $\binom{n-1}{k-1}$ ilyen n hosszúságú sorozat van, és minden ilyen sorozat valószínűsége $\left(\frac{1}{6}\right)^{k}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$. Ezért a második kérdésre a válasz $\binom{n-1}{k-1}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}\left(\frac{1}{6}\right)^{k}$.

3.) Dobjunk fel egy szabályos dobókockát egymás után egymástól függetlenül végtelen sokszor. Mutassuk meg, hogy nulla annak a valószínűsége, hogy ebben a végtelen dobássorozatban háromnál kevesebb 6-os dobás van. (Valójában, mint a bizonyítás is mutatni fogja, a három helyett tetszőleges k egész számot is írhattam volna.)

Megoldás: Kényelmesebb azt megmutatni, hogy a vizsgált esemény komplementerének, tehát annak az eseménynek, hogy van legalább 3 hatos dobás a végtelen dobássorozatban 1 a valószínűsége. Jelölje ezt az eseményt A. Elég belátni, hogy minden $\varepsilon > 0$ számra lehet definiálni olyan $A(\varepsilon)$ eseményt, amelyre $A(\varepsilon) \subset A$ és $P(A(\varepsilon)) > 1-\varepsilon$. Valóban, innen következik, hogy $P(A) \geq P(A(\varepsilon)) > 1-\varepsilon$ minden $\varepsilon > 0$ számra. Ez viszont csak úgy lehetséges, ha $P(A) = 1$.

Tekintsünk egy nagy N számot, és definiáljuk azt az A_N eseményt, hogy az első N dobás tartalmaz legalább egy hatos dobást, és az $N+1$-ik és $2N$-ik, illetve a $2N+1$-ik és $3N$-ik dobások között is szerepel legalább egy hatos dobás. Nyílván $A_N \subset A$, ezért elég megmutatni, hogy minden $\varepsilon > 0$ számra létezik olyan $N = N(\varepsilon)$ index, amelyre $P(A(\varepsilon)) = P(A_{N(\varepsilon)}) > 1 - \varepsilon$.

Viszont az $P(A_N)$ valószínűséget nem nehéz kiszámolni. Annak valószínűsége, hogy az első N dobás nem tartalmaz hatos dobást $\left(\frac{5}{6}\right)^N$, így annak a valószínűsége, hogy legalább egy hatos dobást tartalmaz $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^N$. Hasonlóan számolható ki az is, hogy annak a valószínűsége, hogy az $N+1$-ik és $2N$-ik, illetve a $2N+1$-ik és $3N$-ik dobások között szerepel legalább egy hatos dobás szintén $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^N$. Innen $P(A_N) = \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^N\right)^3$. E formula alapján $\lim\limits_{N\to\infty} P(A_N) = 1$, ezért létezik olyan $N = N(\varepsilon)$, amelyre $P(A_{N(\varepsilon)}) > 1 - \varepsilon$, amint állítottuk.

Második megoldás: Jelölje B_N azt az eseményt, hogy az első N dobásban legalább 3 hatos dobás van. Mint az előző megoldásban láttuk, elég megmutatni azt, hogy $\lim\limits_{N\to\infty} P(B_N) = 1$ vagy ami ezzel ekvivalens, azt hogy $\lim\limits_{N\to\infty} P(\Omega \setminus B_N) = 1 - \lim\limits_{N\to\infty} P(B_N) = 0$. Viszont az $\Omega \setminus B_N$ esemény azt jelenti, hogy az első N dobás 0, 1 vagy 2 dobás hatos dobást tartalmaz. Ezért a 2. feladat eredménye alapján $P(\Omega \setminus B_N) = \binom{N}{0}\left(\frac{5}{6}\right)^N + \binom{N}{1}\left(\frac{5}{6}\right)^{N-1}\frac{1}{6} + \binom{N}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{N-2}\left(\frac{1}{6}\right)^2$. Innen látható, hogy valóban $\lim\limits_{N\to\infty} P(\Omega \setminus B_N) = 0$.

Megjegyzés: A valószínűségi mező definiciójából következik, hogy az üres esemény (szemléletesen a be nem következő esemény) valószínűsége nulla. Van olyan esemény, ami bekövetkezhet, a valószínűsége mégis nulla. Erre mutat példát az előző feladat eredménye. Később még több ilyen példát fogunk látni.

4.) Dobjunk fel egy szabályos dobókockát egymás után egymástól függetlenül végtelen sokszor. Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy a harmadik hatos dobás vagy a huszadik vagy valamely későbbi dobásban jelenik meg.

Első megoldás. Annak a valószínűsége, hogy a 3. hatos dobás az n-ik dobásban jelenik meg a 2. feladat eredménye alapján $\binom{n-1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}\left(\frac{1}{6}\right)^3$. Ezért a tekintett esemény a valószínűsége

$$\sum_{n=20}^{\infty} \binom{n-1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}\left(\frac{1}{6}\right)^3.$$

Második megoldás. Először megmutatom, hogy annak a valószínűsége, hogy a harmadik hatos dobás a 20. dobásban vagy azután jelenik meg egyenlő annak a valószínűségével, hogy a az első tizenkilenc dobásban 0, 1 vagy két hatos dobás történt. Valóban, a keresett esemény komplementere az az esemény, hogy a harmadik hatos dobás vagy az első tizenkilenc dobás valamelyikében vagy soha nem következett be. De mivel az utóbbi esemény valószínűsége nulla, (lásd a 3. feladat eredményét) és egy esemény bekövetkezésének a valószínűsége egyenlő egy minusz a komplementer esemény valószínűségével, ezért a keresett valószínűség egyenlő egy minusz annak a valószínűsége, hogy az első 19 dobásban legalább három hatos dobás történt. Ez viszont egyenlő annak a valószínűségével, hogy az első 19 dobásban 0, 1 vagy két hatos dobás történt. Ezért a második feladat eredménye alapján a keresett valószínűség

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{19} + \binom{19}{1}\left(\frac{5}{6}\right)^{18}\frac{1}{6} + \binom{19}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{17}\left(\frac{1}{6}\right)^{2}.$$

5.) Az előző feladat két megoldásában ugyanannak az eseménynek a valószínűségére két formálisan különböző kifejezést kaptunk. Mutassuk meg közvetlenül (valószínűségi meggondolások nélkül), hogy a két kifejezés egyenlő. Adjunk az analizís módszereit alkalmazó bizonyítást a 3. feladat eredményére is.

Megoldás. Először a 3. feladatban szereplő valószínűséget kifejező végtelen összeget számolom ki az $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$, ha $|x|<1$ azonosság segítségével, ahol $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$. (A fenti azonosság minden valós α számra érvényes, és az $(1+x)^\alpha$ függvény Taylor sorfejtéséből következik.) Vegyük észre, hogy

$$\binom{n-1}{2} = \binom{n-1}{n-3} = (-1)^{n-1}\frac{(-3)(-4)\cdots(1-n)}{(n-3)!} = (-1)^{n-1}\binom{-3}{n-3},$$

ahonnan $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\binom{n-1}{2}x^{n-3} = \sum\limits_{n=3}^{\infty}\binom{-3}{n-3}(-x)^{n-3} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{-3}{n}(-x)^n = (1-x)^{-3}$ minden $|x|<1$ számra. Speciálisan, $x=\frac{5}{6}$ választással $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\binom{n-1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}\left(\frac{1}{6}\right)^3 = 1$. Ez az azonosság ekvivalens azzal az állítással, hogy egy szabályos dobókocka végtelen sok egymás utáni feldobása esetén 1 valószínűséggel legalább 3 hatos dobás megjelenik.

Hasonló számolással bebizonyítom az

$$\begin{aligned}&\binom{19}{0}x^{19}(1-x)^{-3} + \binom{19}{1}x^{18}(1-x)^{-2} + \binom{19}{2}x^{17}(1-x)^{-1}\\ &= \sum_{n=17}^{\infty}\binom{n+2}{2}x^n = \sum_{n=20}^{\infty}\binom{n-1}{2}x^{n-3}\end{aligned}$$

azonosságot. Az azonosság mind a két oldalát megszorozva $(1-x)^3$-nel, és behelyettesítve az $x=\frac{5}{6}$ értéket az így kapott azonosságba megkapjuk, hogy a 4. feladatban szereplő valószínűségre adott két kifejezés egyenlő.

Az azonosság baloldalán szereplő kifejezést Taylor sorba fejthetjük a következő azonosságok segítségével: $(1-x)^{-3} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{-3}{n}(-1)^n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{n}x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{2}x^n$, $(1-x)^{-2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{-2}{n}(-1)^n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{n+1}{1}x^n$, és $(1-x)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{n}{0}x^n$. Ezen azonosságok segítségével azt kapjuk, hogy

$$x^{19}(1-x)^{-3} + \binom{19}{1} x^{18}(1-x)^{-2} + \binom{19}{2} x^{17}(1-x)^{-1}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2}\binom{19}{0} x^{n+19} + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{1}\binom{19}{1} x^{n+18} + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{0}\binom{19}{2} x^{n+17}.$$

Ebben a kifejezésben a megfelelő tagokat összevonva egy olyan hatványsort kapunk, amelyben x^n együtthatója $\binom{n-17}{2}\binom{19}{0} + \binom{n-17}{1}\binom{19}{1} + \binom{n-17}{0}\binom{19}{2}$ minden $n \geq 17$ kitevőre, és az $n < 17$ kitevőkre az x^n tag együtthatója nulla. Viszont tudjuk, hogy $\binom{n-17}{2}\binom{19}{0} + \binom{n-17}{1}\binom{19}{1} + \binom{n-17}{0}\binom{19}{2} x^{n+17} = \binom{(n-17)+19}{2} = \binom{n+2}{2}$. (Lásd az első előadás kiegészítésében szereplő 7. feladatot, amely ennek az azonosságnak egy általánosítását tartalmazza.) Innen következik a bizonyítandó azonosság.

Az előző feladatokban olyan azonosságokat bizonyítottunk viszonylag egyszerű valószínűségszámítási meggondolások segítségével, amelyeknek analitikus bizonyítása sok munkát igényel. Érdemes megjegyezni, hogy valójában a valószínűségszámítási meggondolások hátterében is mély és nehezen bizonyítható eredmények rejtőznek. Érveléseinkben kihasználtuk, hogy egy szabályos dobókocka végtelen sok egymást követő független feldobásának van valószínűségi modellje, és ebben a modellben a valószínűségi mérték σ-additív. Az előző példák azt mutatták, hogy a valószínűség σ-additivitásának nemtriviális következményei vannak.

Tekintsünk még egy egyszerű valószínűségszámítási modellt, valójában a legegyszerűbb modellt, amely sok feladatban megjelenik. Tekintsünk egy kisérletet, amelynek N lehetséges kimenetele van, és ezek mindegyike egyformán valószínű. Egy ilyen kisérlet valószínűségi modellje a következő. Vegyünk egy N elemű $\{x_1, \dots, x_N\}$ halmazt. Definiáljuk az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőt a következő módon. $\Omega = \{x_1, \dots, x_N\}$, $\mathcal{A}$ az Ω összes részhalmazából álló halmaz, és egy $A \in \mathcal{A}$ halmazra $P(A) = \frac{|A|}{N}$, ahol $|A|$ az A halmaz elemeinek számát jelöli. Ezt a képletet úgy is szokás interpretálni, hogy

$$\text{valószínűség} = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}},$$

ahol a kedvező eset egy a vizsgált A esemény által tartalmazott elemi eseményt jelent. Természetesen ez a képlet csak akkor érvényes, ha minden lehetséges kimenet (elemi esemény) valószínűsége egyenlő. Sokszor találkozunk olyan feladattal, amelyben ez a feltétel teljesül, viszont az A halmaz közvetett módon, az X halmaz elemeinek bizonyos tulajdonságai által van definiálva. Ilyen feladatokban az A halmaz elemeinek összeszámlása valamilyen nem feltétlenül egyszerű kombinatorikus meggondolásokat igényel.

Tekintsünk egy ilyen feladatot, egy a lottóhúzás lehetséges eredményének a viselkedésével kapcsolatos problémát. Értsük először meg, hogy a lottóhúzás eredményéről szóló feladatok, vagyis azok a problémák, amelyek arról szólnak, hogy a húzás eredménye milyen valószínűséggel esik egy halmazba, (milyen valószínűséggel teljesít valamilyen tulajdonságot) az előbb említett feladattipusba tartozik. Valóban, ha előírjuk azt is, hogy mi volt az első, a második, … ötödik húzás, akkor minden húzássorozat valószínűsége egyenlő, (történetesen $\frac{1}{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}$). De minket most nem érdekel a húzássorozatban megjelenő számok sorrendje, csak az, hogy melyik 5 húzáseredmény jelent meg. Egy előírt eredmény annak az 5! húzássorozat valószínűségének az összege, amely húzássorozatok ezt az 5 számot tartalmazzák tetszőleges sorrendben. Innen következik, hogy minden lehetséges húzáseredménynek ugyanannyi a valószínűsége, nevezetesen $\frac{1}{\binom{90}{5}}$. Oldjuk meg a következő feladatot.

6.) Mi annak a a valószínűsége, hogy öt, négy illetve, hogy három találatot érünk el egy kitöltött lottószelvénnyel?

Megoldás: Egy lottóhúzás során minden lehetséges húzássorozatnak egyforma a valószínűsége. Mint azt korábban láttuk, 90 számból 5 számot $\binom{90}{5}$-féleképpen lehet kiválasztani, (ha nem számít az, hogy milyen sorrendben húztuk ki a számokat). Ezért annak a valószínűsége, hogy 5 találatunk lesz, azaz pont a lottószelvényen levő számokat húzták ki, $\frac{1}{\binom{90}{5}}$. Az az esemény, hogy 4 találatunk van azt jelenti, hogy egy olyan számötöst húztak ki, amely pontosan 4 olyan számot tartalmaz, amely megegyezik az általunk bejelölt 5 szám valamelyikével. Hány ilyen sorozat van? Egy ilyen sorozat a lottószelvényen megjelölt 5 számból 4-et, az ott meg nem jelölt 85 számból 1-et tartalmaz. Összesen $\binom{5}{4}\binom{85}{1} = 5 \cdot 85$ ilyen sorozat van. Annak a valószínűsége, hogy ezek valamelyikét húzták ki, azaz 4 találatunk lesz $\frac{\binom{85}{1}\binom{5}{4}}{\binom{90}{5}}$. Hasonló meggondolások alapján annak a valószínűsége, hogy 3 találatunk lesz $\frac{\binom{85}{2}\binom{5}{3}}{\binom{90}{5}}$.

Tárgyaljuk az előadás elején felvetett másik kérdést is: Nem okoz-e gondot az, hogy nem minden halmaznak definiáltuk a valószínűségét, hanem csak azoknak, amelyek egy alkalmas σ-algebrába esnek? Erre a kérdésre is megnyugtató, nemleges választ lehet adni, de ez a válasz némi indoklásra szorul. Az indoklás hátterében az az érv van, hogy csak az olyan események valószínűsége érdekel minket, amelyeket bizonyos egyszerű megfigyeléseknek a segítségével pontosan definiálni tudunk. Azt kell megértenünk, hogy az eredeti események segítségével definiált új események (halmazok) benne vannak az ezen események által generált σ-algebrában. Ugyanis az új halmazok definiciója leírható az eredeti halmazok unióinak, metszeteinek és különbségeinek a segítségével. Egy körülményre azonban figyelni kell. Csak olyan definiciókat tekinthetünk, amelyekben véges vagy megszámlálható sok halmaz metszetét vagy unióját vesszük, mert csak így tudjuk biztosítani azt, hogy az újonnan definiált halmazok benne legyenek az eredeti halmazok által generált σ-algebrában. Az e korlátozás miatt felmerülő nehézségek leküzdése érdekében érdemes felidézni néhány klasszikus eredményt. Ilyen számunkra érdekes eredmény például az a tény, hogy a racionális számok a valós számok egy mindenütt sűrű, megszámlálható részhalmazát alkotják. A probléma jobb megértése érdekében tekintsünk néhány példát.

Az első példa a következő:

Állítás: *Tekintsük az előbb definiált valószínűségi mezőt, ahol egy szabályos pénzdarab végtelen dobássorozatát definiáltuk. Adva egy ω végtelen fej-írás dobássorozat, jelölje $k(n,\omega)$ az ω sorozat első n jelében szereplő F betűk számát. Lássuk be, hogy az az A halmaz, amelyet úgy definiálunk, hogy*

$$A = \left\{\omega\colon \text{Létezik a } \lim_{n\to\infty} \frac{k(n,\omega)}{n} \text{ határérték.}\right\}$$

teljesíti az $A \in \mathcal{A}$ tulajdonságot. Más szavakkal: Az az esemény, hogy a fejdobások relatív gyakoriságának van határértéke azon események közé tartozik, amelyeknek definiáltuk a valószínűségét.

Bizonyítás Az, hogy a $\frac{k(n,\omega)}{n}$, $n = 1, 2, \dots$, sorozat valamely ω-ra konvergál, ekvivalens azzal, hogy a $\frac{k(n,\omega)}{n}$, $n = 1, 2, \dots$, sorozat Cauchy sorozat. Ez azt jelenti, hogy minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $n_0 = n_0(\varepsilon,\omega)$ küszöbindex, amelyre $n \ge n_0$ és $\bar n \ge n_0$ esetén $\left|\frac{k(n,\omega)}{n} - \frac{k(\bar n,\omega)}{\bar n}\right| < \varepsilon$. Ez ekvivalens azzal, hogy minden p pozitív egész számhoz létezik olyan $n_0 = n_0(p,\omega)$ küszöbindex, amelyre $n \ge n_0$ és $\bar n \ge n_0$ esetén $\left|\frac{k(n,\omega)}{n} - \frac{k(\bar n,\omega)}{\bar n}\right| < \frac{1}{p}$.

Az, hogy ez az utóbbi állítás teljesül egy ω végtelen sorozatra valamilyen p és n_0 számra, ekvivalens azzal, hogy $\omega \in A_{p,n_0}$, ahol

$$\begin{aligned} A_{p,n_0} &= \left\{\omega\colon \left|\frac{k(n,\omega)}{n} - \frac{k(\bar n,\omega)}{\bar n}\right| < \frac{1}{p} \quad \text{ha } n \ge n_0,\ \bar n \ge n_0\right\} \\ &= \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \bigcap_{\bar n=n_0}^{\infty} \left\{\omega\colon \left|\frac{k(n,\omega)}{n} - \frac{k(\bar n,\omega)}{\bar n}\right| < \frac{1}{p}\right\} = \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \bigcap_{\bar n=n_0}^{\infty} A(p,n,\bar n) \end{aligned}$$

az $A(p,n,\bar n) = \left\{\omega\colon \left|\frac{k(n,\omega)}{n} - \frac{k(\bar n,\omega)}{\bar n}\right| < \frac{1}{p}\right\}$ jelöléssel.

Rögzítsünk egy p pozitív egész számot. Egy ω végtelen fej–írás sorozatra akkor és csak akkor létezik olyan $n_0 = n_0(k,\omega)$ küszöbindex, amelyre a $\left|\frac{k(n,\omega)}{n} - \frac{k(\bar n,\omega)}{\bar n}\right| < \frac{1}{p}$ reláció teljesül minden $n \ge n_0$ és $\bar n \ge n_0$ szám esetén, ha

$$\omega \in A_p = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{p,n}.$$

A $\frac{k(n,\omega)}{n}$ számsorozat azokra az ω elemi eseményekre Cauchy sorozat, amelyekre

$$\omega \in A = \bigcap_{p=1}^{\infty} A_p.$$

Vegyük észre, hogy az $A(p,n,\bar n) = \left\{\omega\colon \left|\frac{k(n,\omega)}{n} - \frac{k(\bar n,\omega)}{\bar n}\right| < \frac{1}{p}\right\}$ halmaz minden előírt $(n,\bar n)$ számpárra és p számra eleme az $\mathcal{A}$ σ-algebrának, mert megmondható, hogy mely

$\max(n, \bar{n})$ fej és írásjellel kezdődő sorozatok tartoznak hozzá ehhez a halmazhoz, és melyek nem. Innen és a σ-algebra definiciójából az is következik, hogy az ilyen halmazok segítségével definiált A_{p,n_0} és A_p halmazok minden p és n_0 indexre elemei az $\mathcal{A}$ σ-algebrának, és ugyanez igaz az A halmazra is. Az $A \in \mathcal{A}$ állítást kellett bebizonyítanunk.

Tekintek néhány hasonló, de egyszerűbb problémát.

Feladatok:

7.) Legyenek $A_1, A_2, \dots,$ események egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Lássuk be, hogy $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ jelöli azt az eseményt, hogy az $A_1, A_2, \dots,$ események közül végtelen sok bekövetkezik.

Megoldás: Az, hogy az A_n események közül végtelen sok bekövetkezik, azt jelenti, hogy minden pozitív egész n számhoz van olyan $k \geq n$ index, amelyre az az A_k esemény bekövetkezik, azaz a $B_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ esemény is bekövetkezik. Az, hogy a B_n esemény minden pozitív egész n számra bekövetkezik azt jelenti, hogy bekövetkezik a $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ esemény.

8.) Legyenek $A_1, A_2, \dots,$ események egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Lássuk be, hogy $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ jelöli azt az eseményt, hogy az $A_1, A_2, \dots,$ események közül véges sok kivétellel mindegyik bekövetkezik.

Megoldás: Az, hogy az A_n események majdnem mindegyike bekövetkezik, azt jelenti, hogy van olyan n szám, melyre igaz, hogy minden $k \geq n$ indexre bekövetkezik az A_k esemény, azaz a $B_n = \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ esemény is bekövetkezik. Az, hogy a B_n esemény bekövetkezik valamely n számra azt jelenti, hogy bekövetkezik az $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ esemény.

Házi feladat:

Tekintsük egy szabályos pénzdarab végtelen egymás utáni feldobását. Lássuk be, hogy az az esemény, hogy három egymás utáni fej-dobás csak azután történt, hogy e sorozat első elemének a megjelenése előtt már volt tíz fej-dobás mérhető esemény, amelynek van valószínűsége.

Megjegyzés: Mind az itteni mind későbbi feladatok vizsgálata érdekében érdemes feleleveníteni azt, hogy hogyan lehet számolni halmazok metszeteivel, unióival, különbségével. Különösen hasznos feleleveníteni a Morgan-féle azonosságról, illetve a konjunktív és diszjunktív normálformáktól tanultakat.

Egy másik probléma, amelynek megoldása nem-triviális analízisbeli eredmények felhasználását igényli:

Ledobunk egymástól függetlenül egy x és egy y pontot egyenletesen a $[0,1]$ intervallumba, azaz mind az x mind az y pont egymástól függetlenül $|b-a|$ valószínűséggel esik egy $[a,b] \subset [0,1]$ intervallumba. Az (x,y) számpár kijelöl egy véletlen pontot az egységnégyzeten. Mi annak a valószínűsége, hogy ez a pont beleesik az egységnégyzet valamely A halmazába?

Azt várjuk, hogy ez a valószínűség megegyezik a halmaz és az egységnégyzet metszetének a területével. Ez az elképzelés lényegében helyes, de természetesen csak azzal a megszorítással, hogy olyan halmazt tekintünk, amelynek van területe. A következő tételben megfogalmazom az analízisnek azt az eredményét, amely lehetővé teszi a szükséges valószínűségi modell megkonstruálását. Ebben tételben bevezetem az analízisben definiált Borel σ-algebra és Lebesgue mérték fogalmát is.

Tétel a Lebesgue mérték létezéséről az Euklideszi térben. *Tekintsük a sík $[a,b]\times[c,d]$ alakú részhalmazait, (amelyek téglalapok), és definiáljuk ezek területét a $(b-a)(d-c)$ képlet segítségével. Általánosabban, tekintsük az n-dimenziós teret, $n \ge 1$, és abban az $[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ alakú téglatesteket, ahol $a_j < b_j$, $1 \le j \le n$. Definiáljuk e téglatestek térfogatát a $\prod\limits_{j=1}^{n}(b_j-a_j)$ képlet segítségével. Jelölje $\mathcal{B}$ az ezen téglatesteket tartalmazó legszűkebb σ-algebrát. (Az irodalomban ezt a σ-algebrát a Borel σ-algebrának, a σ-algebra elemeit pedig Borel mérhető halmazoknak nevezik.) Ekkor létezik olyan mérték a $\mathcal{B}$ σ-algebrán, amelyre teljesül az a feltétel, hogy minden téglatest mértéke megegyezik annak térfogatával, és ez a mérték egyértelműen meg van határozva. (Ezt a mértéket hívják az irodalomban Lebesgue mértéknek.) Azoknak a halmazoknak, amelyeknek a geometriában definiálták a térfogatát megegyezik a térfogata és Lebesgue mértéke.*

Ennek az eredménynek a segítségével definiálni tudunk egy számunkra kívánatos valószínűségi modellt. Tekintsük a síkon definiált Lebesgue mérték megszorítását a $[0,1]\times[0,1]$ egységnégyzet, Borel mérhető részhalmazaira, amelyek egy $\mathcal{B}_0$ Borel σ-algebrát alkotnak. Definiálhatjuk a következő $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mezőt.

Legyenek az ω elemi események az egységnégyzet pontjai, és a biztos esemény, az $\Omega=[0,1]\times[0,1]$ egységnégyzet. Legyen $\mathcal{A}=\mathcal{B}_0$, a $\mathcal{B}$ Borel σ-algebra megszorítása az egységnégyzetre, a P mérték pedig a Lebesgue mérték megszorítása a $\mathcal{A}$ σ-algebrára. Mutatok három példát arra, hogy hogyan lehet bizonyos feladatokat megoldani ennek a modellnek a segítségével.

9. feladat: Két ember 8 és 9 óra között megjelenik egy téren egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással. Mind a kettő félórát vár a másikra, és ha az addig nem jön, akkor hazamegy. Mi a valószínűsége annak, hogy találkoznak?

Megoldás: Tekintsük az egységnégyzetet, és válasszuk azt a véletlen pontot az egységnégyzeten, amelynek x koordinátája megadja, hogy az első ember az y koordinátája pedig megadja, hogy a második ember mikor (8 plusz hány órakor) érkezett. Ekkor az így definiált pont egyenletes eloszlású az egységnégyzeten, azaz annak valószínűsége, hogy ez a pont az egységnégyzet egy (szép) részhalmazába esik megegyezik e halmaz területével. Az, hogy a két ember találkozik azt az eseményt jelenti, hogy az így definiált (x,y) pont az egységnégyzet

$$A = \left\{(x,y)\colon -\frac{1}{2} \le y-x \le \frac{1}{2}\right\} \cap [0,1]\times[0,1]$$

részhalmazába esik. Ennek a halmaznak a területe $1-2\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$, és ez a keresett valószínűség.

10. feladat: Két egy méter hosszú botot véletlenszerűen, (egymástól függetlenül) egyenletes eloszlással eltörünk. A két rövidebb darabot összeragasztjuk. Mi annak a valószínűsége, hogy az így kapott új bot hossza kisebb mint 0.8 méter?

Megoldás: Ez a feladat is tárgyalható hasonló módon. Tekintsük az egységnégyzetet, és válasszuk azt a véletlen pontot az egységnégyzeten, amelynek x koordinátája megadja, hogy hol törtük el az első botot az y koordinátája pedig azt, hogy hol törtük el a második botot. Ekkor az így definiált pont egyenletes eloszlású az egységnégyzeten. Az az esemény, hogy az összeragasztott bot hossza kisebb mint 0.8 megegyezik annak az eseménynek a valószínűségével, hogy az (x,y) pont a következő A_1, A_2, A_3 és A_4 halmazok $A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4$ uniójába esik: $A_1 = \{(x,y)\colon x+y<0.8\}\cap[0,1]\times[0,1]$, $A_2=\{(x,y)\colon x+(1-y)<0.8\}\cap[0,1]\times[0,1]$, $A_3=\{(x,y)\colon 1-x+y<0.8\}\cap[0,1]\times[0,1]$ és $A_4=\{(x,y)\colon 1-x+1-y<0.8\}\cap[0,1]\times[0,1]$. Rajzoljuk le ezeket a halmazokat. Az ábra mutatja, hogy az $A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4$ halmaz komplementere az a négyzet amelynek csúcsai a (0.3, 0.5), (0.5, 0,3), (0.7, 0.5), és (0.5, 0.7) pontok. Ennek a négyzetnek a területe, 0.08 tehát a minket érdeklő valószínűség $1-0.08=0.92$.

Később tanulni fogunk olyan módszereket, amelyek lehetővé teszik a fenti két feladat megoldását más módon. Akkor majd vissza fogunk térni ezekhez a feladatokhoz.

11. feladat: Dobjunk le az egységintervallumra véletlenül, egymástól függetlenül 2 pontot. (Az, hogy egy pont az egységintervallum valamely részintervallumába esik egyenlő ezen intervallum hosszával.) Ez a két ledobott pont az egységintervallumot három részintervallumra osztja. Mi annak a valószínűsége, hogy az így létrejött három részintervallumból szerkeszthető háromszög?

Megoldás: A három szakaszból akkor és csak akkor szerkeszthető háromszög, ha teljesítik a háromszögegyenlőtlenséget, azaz bármely kettő összhossza nagyobb, mint a harmadik intervallum hossza. Mivel a három részintervallum összhossza 1, ez ekvivalens azzal, hogy mindegyikük hossza kisebb, mint $\frac{1}{2}$. Legyen az első ledobott pont koordinátája x a második ledobott ponté pedig y. Ekkor az (x,y) pont egyenletes eloszlású a $[0,1]\times[0,1]$ egységnégyzeten, és a keletkezett szakaszok hossza x, $y-x$ és $1-y$, ha $x<y$, és y, $x-y$ és $1-x$, ha $x>y$. A három szakaszból akkor és csak akkor szerkeszthető háromszög, ha a következő két (egymást kizáró) esemény valamelyike bekövetkezik:

a.) $0 \le x < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < y < 1$, $0 < y - x < \frac{1}{2}$,

b.) $0 \le y < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < x < 1$, $0 < x - y < \frac{1}{2}$.

(Az a.) eset felel meg annak, hogy $x < y$, a b.) eset annak, hogy $y < x$.) Egyszerű geometriai meggondolás mutatja, hogy mind az a) mind a b) eset teljesülése azt jelenti, hogy az (x, y) pont az egységnégyzet egy $\frac{1}{2}$ befogókkal rendelkező szabályos derékszögű egyenlőszárú háromszögbe esik. Így a keresett valószínűség $2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$.

A valószínűség definiciójában feltettük, hogy a valószínűségi mérték nemcsak additív, hanem σ-additív is. Ez kényelmesebbé teszi a számolásokat, és ezenkívül ez tette lehetővé a végtelen dobássorozatot definiáló valószínűségi mérték illetve a pontledobást leíró Lebesgue mérték *egyértelmű* definicióját. Érdemes megérteni a σ-additív és additív halmazfüggvények közötti kapcsolatot. A Fazekas könyv 23. oldalán található egy állítás (2.5 Állítás) arról, hogy a mértékek σ-additivitása ekvivalens azzal, hogy az ilyen halmazfüggvények az additivításon kívül még egy folytonosságnak nevezett tulajdonságot is teljesítenek. Ezt az állítást az alábbi Tétel A eredményben pontosabban is megfogalmazom, és a Tétel A (egyszerű) bizonyítását megadom a Kiegészítés 2-ben.

Tétel A. *Legyen adva egy Ω halmaz, annak bizonyos részhalmazaiból álló $\mathcal{A}$ σ-algebra, és azon egy véges, P additív nem-negatív halmazfüggvény, azaz feltesszük, hogy $0 < P(\Omega) < \infty$, és $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, ha A és B diszjunkt halmazok. A P halmazfüggvény akkor és csak akkor σ-additív az $\mathcal{A}$ σ-algebrán, ha teljesíti az alábbi a mérték folytonosságának nevezett tulajdonságot:*

Ha $A_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \dots$ az $\mathcal{A}$ σ-algebra olyan elemei, amelyekre

$$\cdots \subset A_n \subset A_{n-1} \subset \cdots \subset A_1, \quad \textit{és} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset,$$

akkor $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = 0$.

A fenti állítás akkor is érvényes, ha $\mathcal{A}$ algebra, de nem feltételenül σ-algebra. Ez esetben a σ-additívitás úgy értendő, hogy amennyiben az A_n, $n = 1, 2, \dots$, halmazok diszjunktak, $A_n \in \mathcal{A}$ minden $n = 1, 2, \dots$ indexre, és ezenkívül az $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ feltétel is teljesül, akkor $P(A) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

Ha P véges, σ-additív nem-negatív halmazfüggvény egy algebrán, akkor teljesíti a fent megfogalmazott folytonossági tulajdonság következő erősebb változatát is. Legyen $B_n \in \mathcal{A}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, az $\mathcal{A}$ algebra olyan monoton csökkenő halmazsorozata, melyre

$$\cdots \subset B_n \subset B_{n-1} \subset \cdots \subset B_1, \quad \textit{és} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = B_0 \in \mathcal{A},$$

$C_n \in \mathcal{A}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, az $\mathcal{A}$ algebra olyan monoton növekvő halmazsorozata, melyre

$$\cdots \subset C_n \subset C_{n+1} \subset \cdots \quad \textit{és} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = C_0 \in \mathcal{A}.$$

Ekkor $\lim_{n\to\infty} P(B_n) = P(B_0)$, *és* $\lim_{n\to\infty} P(C_n) = P(C_0)$.

Világos, hogy legalábbis formálisan a σ-additités erősebb követelmény mint csak az additivitás. De tudunk-e példát adni egy σ-algebrán additív, de nem σ-additív halmazfüggvényre? Elképzelhető-e, hogy a σ-additivítás előírása miatt bizonyos érdekes feladatokra nem tudunk valószínűségi modellt adni?

Ezekre a kérdésekre megnyugtató választ tudunk adni. Léteznek σ-algebrán additív, de nem σ-additív halmazfüggvények. Ezeket viszont mindig csak nem konstruktív módon (kiválasztási axióma vagy egy vele ekvivalens állítás segítségével lehet megadni.) A teljesség kedvéért a Kiegészítés 3 részben példát mutatok egy additív, de nem σ-additív halmazfüggvényre. Konkrét, jól megfogalmazható feladatokban nem jelenik meg az a probléma, hogy a valószínűséget megadó természetes jelölt additív, de nem σ-additív.

Végül teszek még egy megjegyzést valószínűségi modellek konstrukciójáról. Ebben az előadásban különböző véletlen jelenségeknek megadtuk egy valószínűségszámítási konstrukcióját. Ezek jó konstrukciók voltak, de nem ezek az egyedüli jó konstrukciók. Például egy szabályos pénzdarab 10 egymás utáni feldobására az is lehet modell, hogy a pénzdarabot, 20 alkalommal dobjuk fel, de az utolsó tíz dobás eredményét nem vesszük figyelembe. Jegyezzük meg azt is, hogy a vizsgált feladatokban a valószínűségek kiszámolásában nem játszott szerepet az, hogy a kívánt feladatnak milyen (a feladat feltételeit kielégítő) modelljét tekintettük.

Kiegészítés 1. Végtelen halmazok számossága. Megszámlálható halmazok.

Két véges halmaz nagyságát természetes módon össze tudjuk hasonlítani. Azt mondjuk, hogy az egyik nagyobb, mint a másik, ha több elemet tartalmaz. Ha két halmaz ugyanannyi elemet tartalmaz, akkor egyforma nagynak tekintjük őket. Felmerülhet az igény, hogy hasonlítsuk össze végtelen halmazok nagyságát is. Ez lehetséges a következő észrevétel segítségével.

Két véges halmaz akkor és csak akkor egyenlő nagy, ha elemeik között kölcsönösen egyértelmű leképezést lehet létesíteni. Ezt a tulajdonságot meg lehet fogalmazni végtelen halmazokra is, és ez teszi lehetővé végtelen halmazok nagyságának az összehasonlítását. Két A és B (nem feltétlenül véges) halmazt egyforma nagynak tekintünk, hivatalos terminológiával azt mondjuk róluk, hogy egyenlő számosságúak, ha létezik elemeik között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés. Ez azt jelenti, hogy létezik olyan $F\colon A \to B$ leképezés, amelyben minden $a \in A$ elemnek megfeleltetünk egy $b \in B$ elemet, az A halmaz különböző $a \in A$ és $a' \in A$, $a \neq a'$, elemeinek $b = F(a) \in B$ és $b' = F(a')$ képei különbözőek, azaz $b \neq b'$, és minden $b \in B$ elemre létezik egyetlen $a \in A$ elem, amelyre $b = F(a)$. Azt mondjuk, hogy a B halmaz számossága nagyobb vagy egyenlő, mint az A halmaz számossága, ha létezik az A halmaznak kölcsönösen egyértelmű leképezése a B halmaz valamely részhalmazára. Ha a B halmaz számossága nagyobb vagy egyenlő, mint az A halmaz számossága, de nem egyenlő vele, azaz a két halmaz között nem létezik kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, akkor azt mondjuk, hogy a B halmaz számossága (szigorúan) nagyobb, mint az A halmaz számossága.

Ilyen módon egy rendezést vezettünk be halmazok számossága között. Megjegyzem, hogy ez nem magától értetődő állítás. Ahhoz, hogy jogunk legyen halmazok nagyságának előbb bevezetett összehasonlítását rendezésnek hívni, be kell látni néhány állítást. Így például meg kell mutatni, hogy tetszőleges két A és B halmazra igaz, hogy vagy az A halmaz számossága nagyobb vagy egyenlő, mint a B halmaz számossága, vagy a B halmaz számossága nagyobb vagy egyenlő, mint az A halmaz számossága. Továbbá azt is be kell bizonyítani, hogy ha mind az az A halmaz számossága nagyobb vagy egyenlő, mint a B halmaz számossága, mind a B halmaz számossága nagyobb vagy egyenlő, mint az A halmaz számossága, akkor a két halmaz számossága egyenlő, azaz ebben az esetben létezik az A halmaznak kölcsönösen egyértelmű leképezése a B halmazra. Ezeknek a (nem nyílvánvaló) állításoknak a bizonyítása nem témája ennek a kurzusnak.

Egy lényeges különbség véges és végtelen halmazok között az, hogy egy végtelen halmaz és annak egy valódi részhalmaza lehet egyenlő számosságú. Például az egész számok halmazának a számossága megegyezik a páros számok halmazáéval. Valóban, az $F(x) = 2x$ függvény kölcsönösen egyértelmű leképezést létesít az egész számok és páros egész számok között. Ez a példa is mutatja, hogy végtelen halmazok nagyságának az összehasonlításakor nem igaz minden olyan állítás természetes megfelelője, amely véges halmazok között igaz volt.

A végtelen halmazok számossága között különösen fontos szerepet játszik a megszámlálható számosság. Egy halmazt megszámlálható számosságúnak nevezünk, ha számossága egyenlő a természetes számok számosságával. Az elnevezés oka az, hogy egy X halmaz akkor és csak akkor megszámlálható számosságú, ha egyrészt nem véges sok elemből áll, másrészt elemei felsorolhatóak, azaz megadható olyan az X elemeiből álló $\{x_1, x_2, \dots\}$ sorozat, amelyben előbb-utóbb az X halmaz minden eleme sorra kerül. Valóban, ha X megszámlálható halmaz, azaz létezik kölcsönösen egyértelmű megfeleltetése a természetes számokkal, akkor legyen az $x_1, x_2, \dots$ sorozat x_j eleme az az érték ahová a j természetes számot képezi a természetes számok kölcsönösen egyértelmű leképezése az X halmazra. Másrészt, ha az X halmaz elemeinek van $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ alakú felsorolása, akkor az F: $j \to x_j$ leképezés kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít a természetes számok és az X halmaz között.

Tulajdonképpen a megszámlálható számosságú halmazok a legkisebb (számosságú) végtelen halmazok. Be lehet látni, hogy a (nem feltétlenül pozitív) egész számok halmaza is megszámlálható. Sőt, be lehet látni, hogy a racionális számok halmaza vagy a sík azon pontjainak a halmaza, amelyeknek mind a két koordinátája racionális szám szintén megszámlálható számosságú. Megszámlálható sok megszámlálható halmaz uniója is megszámlálható.

Felmerülhet a kérdés, hogy létezik-e egyáltalán nem megszámlálható számosságú halmaz. A válasz erre a kérdésre igenlő. Például a végtelen hosszúságú nulla-egy sorozatok halmaza, vagy a számegyenes vagy a sík pontjainak a számossága nagyobb, mint megszámlálható. A most említett halmazok számossága megegyezik, és ezen halmazok számosságát kontinumnak nevezik. Megjegyzem, hogy a kontinumnál is van nagyobb számosság, sőt tetszőleges halmaznál van nála (szigorúan) nagyobb számosságú halmaz.

Miért érdemes ezeket a halmazok számosságáról szóló ismereteket feleleveníteni egy valószínűségszámítási előadásban? Azért, mert ezen ismeretek szükségesek néhány fogalom, eredmény megértéséhez. Például, amikor egy egymás után (megszámlálhatóan) végtelen sokszor feldobott pénzdarab viselkedését leíró valószínűségi modellt konstruáltunk, akkor az elemi eseményeket úgy definiáltuk, mint a végtelen fej-írás sorozatokat, és a biztos eseményt úgy definiáltuk, mint az összes ilyen sorozatot tartalmazó halmazt. Ahhoz, hogy lássuk, jogunk van ebben a modellben minden elemi esemény valószínűségét nullának definiálni tudnunk kell, hogy az elemi eseményként definiált fej-írás sorozatok számossága, nagyobb mint megszámlálható. Ez biztosítja, hogy az 1 valószínűségű biztos esemény nem állítható elő, mint megszámlálhatóan végtelen nulla mértékű halmaz uniója. (A végtelen fej-írás és végtelen nulla-egy sorozatok között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető. Ezért mind a két halmaz kontinum számosságú.)

Kiegészítés 2. Mértékelméleti ismeretek.

Először leírom az előadásban megfogalmazott Tétel A bizonyítását.

A Tétel A bizonyítása. Lássuk először be, hogy amennyiben a P véges értékű halmazfüggvény nemcsak additív, hanem σ-additív is, akkor teljesíti a folytonossági tulajdonságot: Legyenek $A_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \dots$, az $\mathcal{A}$ σ-algebra (vagy algebra) olyan elemei, amelyekre $\cdots \subset A_n \subset A_{n-1} \subset \cdots \subset A_1$, és $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$. Definiáljuk a (diszjunkt) $B_n = A_n \setminus A_{n+1}$, halmazokat. Ekkor $A_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} B_k$, $n = 1, 2, \dots$, ezért a P halmazfüggvény σ-additívitása alapján $P(A_n) = \sum\limits_{k=n}^{\infty} P(B_k)$. Speciálisan, $P(A_1) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} P(B_k) < \infty$. Ezért minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $n_0 = n_0(\varepsilon)$ küszöbindex, amelyre teljesül, hogy $P(A_n) = \sum\limits_{k=n}^{\infty} P(B_k) < \varepsilon$, ha $n \ge n_0$, és ezt kellett belátni.

Ha a P halmazfüggvény additív, és teljesíti a folytonossági feltételt, akkor tekintsük $A_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \dots$ diszjunkt halmazok tetszőleges rendszerét, legyen $B_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$, $n = 1, 2, \dots$. (Jegyezzük meg, hogy akkor is tudjuk, hogy $B_n \in \mathcal{A}$, ha $\mathcal{A}$ algebra, de nem feltétlenül σ-algebra. Ugyanis feltettük, hogy $B_1 \in \mathcal{A}$, ezért $B_n = B_1 \setminus \left(\bigcup\limits_{k=1}^{n-1} A_k \right) \in \mathcal{A}$ minden $n = 1, 2, \dots$ indexre.) Ekkor $\cdots \subset B_n \subset B_{n-1} \subset \cdots \subset B_1$, és $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$, ezért a P halmazfüggvény folytonossági tulajdonsága miatt $\lim\limits_{n\to\infty} P(B_n) = 0$. Ezért tetszőleges N pozitív egész számra

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{N-1} A_n\right) + P(B_N) = \sum_{n=1}^{N-1} P(A_n) + P(B_N).$$

Mivel $\lim\limits_{N\to\infty} P(B_N) = 0$, innen $N \to \infty$ határátmenettel megkapjuk a kívánt állítást.

Tekintsük ezután azt az esetet, amikor P véges σ-additív, és ezért folytonos halmazfüggvény. Legyen $B_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \dots$, az $\mathcal{A}$ algebra monoton csökkenő halmazsorozata, amelyre $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = B_0 \in \mathcal{A}$. Ekkor $A_n = B_n \setminus B_0$ választással azt írhatjuk, hogy $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, és $\lim\limits_{n\to\infty} P(B_n) = \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) + P(B_0) = P(B_0)$. Legyen $C_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \dots$, az $\mathcal{A}$ algebra monoton növekvő halmazsorozata, $C_0 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n$. Ekkor az $A_n = C_0 \setminus C_n$ választással azt írhatjuk, hogy $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, és $\lim\limits_{n\to\infty} P(C_n) = P(C_0) - \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = P(C_0)$, és ezeket az állításokat kellett bizonyítani.

A valószínűségi modellekben szereplő P valószínűségi mértékek σ-additívitásának igazolásában alapvető szerepet játszik a mértékelmélet alábbi, itt nem bizonyított nagyon fontos eredménye:

Carathéodory tétele mértékek egyértelmű kiterjesztéséről. *Legyen adva egy nem-negatív véges μ mérték (azaz σ-additív halmazfüggvény) egy Ω halmaz bízonyos részhalmazaiból álló $\mathcal{A}_0$ algebrán. Ekkor a μ mérték egyértelműen kiterjeszthető az $\mathcal{A}_0$ által generált $\mathcal{A}$ σ-algebrára.*

Megjegyzés: Fontos, hogy ez az eredmény nemcsak a mérték kiterjeszthetőségét állítja, hanem annak egyértelműségét is. Ez azt jelenti, hogy a generált σ-algebrában szereplő halmazok mértékét (a minket érdeklő alkalmazások esetében valószínűségét) egyértelműen tudjuk definiálni.

A fenti eredmény önmagában nem elegendő az előadásban tekintett szabályos pénzdarab végtelen dobássorozatokat leíró modell helyességének a bizonyításához. Meg kell ugyanis először adni azt az $\mathcal{A}_0$ algebrát és rajta azt a σ-additív halmazfüggvényt, amelyre a tételt alkalmazni tudjuk.

Jelen példában természetes módon definiálhatjuk azt az $\mathcal{A}_0$ algebrát és a rajta értelmezett P mértéket, amelyre a Carathéodory tételt alkalmazni kívánjuk. Nevezetesen, álljon $\mathcal{A}_0$ az összes lehetséges végtelen fej-írást tartalmazó Ω halmaz azon részhalmazaiból, amelyek csak véges sok koordinátától függnek, azaz egy A halmaz akkor és csak akkor tartozik a $\mathcal{A}_0$ algebrához, ha létezik egy k pozitív egész szám és k-hosszúságú fej-írás sorozatoknak egy B halmaza, amelyre igaz, hogy egy végtelen fej-írás sorozat akkor és csak akkor tartozik az A halmazba, ha az első k tagjából álló k hosszúságú fej-írás sorozat a B halmazhoz tartozik. (Az ilyen tipusú halmazokat hívják az irodalomban henger-halmazoknak.) Továbbá, legyen egy ilyen A halmaz P mértéke a B halmaz elemszáma szorozva a 2^{-k} számmal.

Nem nehéz belátni, hogy ilyen módon egy $\mathcal{A}_0$ algebrát definiáltunk, és azon egy P nem-negatív egyre normált additív halmazfüggvényt. Viszont korántsem nyílvánvaló, hogy a P addítiv halmazfüggvény egyben σ-additív is. Ennek bizonyítása mély matematikai gondolatokat igényel. Ennek részleteire nem térek ki. Viszont megfogalmazok egy olyan az előadásban említett mértékelméleti eredményt, amely valószínűségszámítási szempontból azért érdekes, mert ez az eredmény biztosítja azt, hogy végtelen sok független kisérletnek is van valószínűségszámítási modellje. Létezik Kolmogorovnak egy a valószínűségszámítás számára még hasznosabb eredménye, amelyet a valószínűségszámítás alaptételének is neveznek. Ez az eredmény nagyon pongyolán megfogalmazva azt állítja, hogy minden értelmesen megfogalmazott véletlen jelenségnek létezik a Kolmogorov-féle axiómarendszert kielégítő valószínűségi modellje. Az eredmény pontos megfogalmazására itt nem térek ki.

Tétel mértékterek végtelen szorzatáról. *Legyen adva végtelen sok* $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n)$, $n = 1, 2, \dots$, *valószínűségi mező, azaz legyen adva minden* $n = 1, 2, \dots$ *számra egy* $\mathcal{A}_n$ σ*-algebra valamely* Ω_n *halmazon és egy* P_n *valószínűségi mérték ezen az* $\mathcal{A}_n$ σ*-algebrán. (Az, hogy a* P_n *mérték valószínűségi mérték azt jelenti, hogy* $P_n(\Omega_n) = 1$.*) Ekkor létezik ezen valószínűségi mezőknek egy* $(\Omega^\infty, \mathcal{A}^\infty, P^\infty)$ *végtelen szorzata, ami szintén valószínűségi mező.*

Részletesebben megfogalmazva ez a következőt jelenti. Definiáljuk az Ω^∞ *halmazt úgy, mint az összes* $\omega^\infty = (\omega_1, \omega_2, \dots)$, $\omega_n \in \Omega_n$, $n = 1, 2, \dots$, *alakú végtelen sorozatból álló halmazt. Vezessük be ezen az* $\mathcal{A}^\infty$ σ*-algebrát, amely megegyezik az* Ω^∞ *bizonyos részhalmazai, az*

$$A_1 \times \cdots \times A_k = \{\omega^\infty = (\omega_1, \omega_2, \dots) \colon \omega_1 \in A_1, \omega_2 \in A_2, \dots, \omega_k \in A_k\}$$

alakú úgynevezett hengerhalmazok által generált legszűkebb σ*-algebrával, ahol* $k = 1, 2, \dots$, *tetszőleges pozitív egész szám, és* $A_j \in \mathcal{A}_j$ *minden* $1 \le j \le k$ *számra. Definiáljuk az* $A_1 \times \cdots \times A_k$ *alakú hengerhalmazok* P^∞ *mértékét a* $P^\infty(A_1 \times \cdots \times A_k) = \prod_{j=1}^{k} P_j(A_j)$ *képlet segítségével. Ez a hengerhalmazokon definiált függvény egyértelműen kiterjeszthető egy* P^∞ *valószínűségi mértékké az* $\mathcal{A}^\infty$ σ*-algebrára, és ezt hívják a* P^∞ *szorzatmértéknek.*

Kiegészítés 3. Additív, de nem σ-additív halmazfüggvények.

A tárgyalt példák mindegyikében olyan additív halmazfüggvényeket vezettünk be, amelyek σ-additívak is. Felmerülhet a kérdés, hogy léteznek-e egyáltalán additív, de nem σ-additív halmazfüggvények. A válasz az, hogy léteznek ilyen halmazfüggvények, de azok explicit módon nem adhatóak meg. Az ilyen halmazfüggvények létezésének a bizonyítása felhasználja a kiválasztási axiómát vagy egy vele ekvivalens állítást.

A teljesség kedvéért ismertetek egy híres példát additív, de nem σ-additív halmazfüggvényre. Az itt leírt eredmény ismerete nem szükséges az anyag fő részének a megértéséhez. Ez inkább arra szolgál, hogy az érdeklődők némi kitekintést kapjanak más jellegű matematikai témákról is. A következő eredmény bizonyítását fogom leírni.

Tétel additív 0–1 értékű függvény létezéséről az egész számok részhalmazain. *Tekintsük az egész számok $Z = \{1, 2, \dots\}$ halmazát, és a Z halmaz összes részhalmazából álló $\mathcal{Z}$ σ-algebrát. Létezik olyan $\mu(A)$, $A \in \mathcal{Z}$, halmazfüggvény a Z halmaz összes részhalmazán, amely teljesíti a következő tulajdonságokat:*

a) $\mu(\{j\}) = 0$ *minden* $j = 1, 2, \dots$ *számra, azaz minden egy pontból álló halmaz mértéke nulla.*

b) $\mu(Z) = 1$*, azaz az összes természetes számot tartalmazó halmaz mértéke 1.*

c) $\mu(A) = 0$ *vagy* $\mu(A) = 1$ *minden* $A \in \mathcal{Z}$ *halmazra.*

d) Ha A *és* B *két diszjunkt halmaz, akkor* $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$*, azaz a* μ *halmazfüggvény additív.*

Egy a tétel feltételeit teljesítő μ halmazfüggvény additív, de nyílván nem σ-additív, mert $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(\{j\}) \neq \mu(Z)$. (A baloldalon szereplő kifejezés értéke 0, a jobboldalon szereplőé pedig 1.) A tétel bizonyítása úgynevezett transzfinit indukción alapul. A transzfinit indukció végrehajtásának a legkényelmesebb módja a Zorn lemma alkalmazása, és mi is ezt az utat fogjuk követni.

Megfogalmazom a Zorn lemmát. Előtte azonban bevezetek néhány a Zorn lemma megfogalmazásában használt fogalmat. Legyen adva egy X halmaz, és teljesüljön az X halmaz bizonyos (x, y), $x \in X$ és $y \in X$ elempárjai között egy $x \preceq y$ reláció. Ha $x \preceq y$, akkor azt mondjuk, hogy az x elem kisebb vagy egyenlő, mint az y elem. Akkor mondjuk, hogy egy X halmaz részben rendezett halmaz egy $\preceq$ rendezéssel, ha az $(X, \preceq)$ rendszer teljesíti a következő feltételeket:

1.) $x \preceq x$ minden $x \in X$-re, (reflexivitás).

2.) Ha $x \preceq y$ és $y \preceq z$, akkor $x \preceq z$, (tranzitivitás).

3.) Ha $x \preceq y$ és $y \preceq x$, akkor $x = y$, (antiszimmetricitás).

Viszont nem követeljük meg, hogy bármely két $x \in X$ és $y \in X$ elem összehasonlítható legyen.

Legyen adva egy $(X, \preceq)$ részben rendezett halmaz. Azt mondjuk, hogy e részben rendezett halmaz egy $Y \subset X$ részhalmaza lánc, ha Y tetszőleges két eleme összehasonlítható, azaz, ha $x, y \in Y$, akkor teljesül vagy az $x \preceq y$ vagy az $y \preceq x$ reláció. Azt mondjuk, hogy egy $x \in X$ elem felső korlátja egy $Y \subset X$ halmaznak, ha $y \preceq x$ minden $y \in Y$ elemre. Egy $x \in \mathcal{X}$ elem maximális elem az $(X, \preceq)$ részben rendezett halmazban, ha nincs olyan $y \in X$, $y \neq x$ elem, amelyre $x \preceq y$.

A fenti fogalmak segítségével egyszerűen megfogalmazható (a kiválasztási axiómával ekvivalens) Zorn lemma.

Zorn lemma. *Legyen $(X, \preceq)$ olyan részben rendezett halmaz, amelyben minden láncnak létezik felső korlátja. Akkor az $(X, \mathcal{X})$ részben rendezett halmazban van maximális elem.*

Ezután rátérek a Tétel bizonyítására.

Az egész számok részhalmazain definiált additív 0–1 függvény létezéséről szóló tétel bizonyítása a Zorn lemma segítségével. Meg akarjuk adni azon halmazok rendszerét, amelyeknek a mértéke nulla. Ennek érdekében bevezetjük a Z halmaz részhalmazaiból álló $\mathcal{A} \subset \mathcal{Z}$ halmazrendszereken a következő α tulajdonságot. Egy $\mathcal{A} \subset \mathcal{Z}$ halmazrendszer akkor és csak akkor rendelkezik az α tulajdonsággal, ha teljesíti a következő feltételeket:

i.) $\{j\} \in \mathcal{A}$ minden $j = 1, 2, \dots$ számra,
ii.) Ha $A \in \mathcal{A}$, és $B \in \mathcal{A}$, akkor $A \cup B \in \mathcal{A}$,
iii.) Ha $A \in \mathcal{A}$, és $B \subset A$, akkor $B \in \mathcal{A}$,
iv.) $Z \notin \mathcal{A}$.

Vezessük be a $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ halmazrendszerek között a következő részbenrendezést: $\mathcal{A} \preceq B$, akkor és csak akkor, ha minden $A \in \mathcal{A}$ halmazra $A \in \mathcal{B}$. Tekintsük azt az $(X, \preceq)$ rendszert, amelynek elemei az α tulajdonsággal rendelkező halmazrendszerek, és közöttük az előbb bevezetett $\preceq$ részbenrendezés érvényes. Könnyen látható, hogy $(X, \preceq)$ részben rendezett halmaz a fenti rendezéssel. Sőt, az is igaz, hogy tetszőleges $Y \subset X$ láncnak van felső korlátja. Valóban, $z = \bigcup\limits_{y \in Y} y \in X$, és ez a z elem felső korlátja az Y láncnak. (Megjegyzem, hogy az Y halmaz, így a fenti unió tartalmazhat megszámlálhatónál több elemet. A bizonyítás ezen lépésében van elrejtve a 'transzfinit indukció'.)

Láttuk, hogy az $(X, \preceq)$ tér teljesíti a Zorn lemma feltételeit. Ezért létezik ebben a térben egy maximális $x = \mathcal{A}$ elem. Azt akarjuk megmutatni, hogy az $(X, \preceq)$ tér egy maximális $\mathcal{A}$ eleme az α tulajdonságban megfogalmazott i.)—iv.) feltételeken kívül még a következő v.) feltételt is teljesíti:

v.) Minden $B \subset Z$ halmazra vagy $B \in \mathcal{A}$ vagy $Z \setminus B \in \mathcal{A}$.

Tekintsünk ugyanis egy olyan $\mathcal{A}$ halmazrendszert, amely teljesíti az i.)–iv.) feltételeket, de nem teljesíti az v.) feltételt. Megmutatjuk, hogy ez az $\mathcal{A}$ nem lehet maximális elem az $(X, \preceq)$ térben. Valóban, ha $\mathcal{A}$ teljesíti az i.)–iv.) feltételeket, de létezik olyan

$B \subset X$ halmaz, amelyre mind $B \notin \mathcal{A}$ mind $Z \setminus B \notin A$, azaz az v.) feltétel nem teljesül, akkor az $\bar{\mathcal{A}} = \{A \cup \bar{B}\colon\ A \in \mathcal{A}, \bar{B} \subset B\}$ halmazrendszer szintén teljesíti az i.)–iv.) feltételeket.

Az i.)–iii.) feltételek teljesülése nyílvánvaló. Vegyük továbbá észre, hogy ha fennállna a $Z = A \cup \bar{B}$ reláció valamely $A \in \mathcal{A}$ és $\bar{B} \subset B$ halmazokra, akkor a $Z = A \cup B$, $Z \setminus B \subset A$, és így a $Z \setminus B \in \mathcal{A}$ relációk is érvényesek volnának, ami ellentmond feltételeinknek. Ez azt jelenti, hogy $\bar{\mathcal{A}} \in X$. Így, mivel $\mathcal{A} \preceq \bar{\mathcal{A}}$, és $\mathcal{A} \neq \bar{\mathcal{A}}$, az $\mathcal{A}$ elem nem lehet maximális.

Végül megmutatom, hogy amennyiben egy $\mathcal{A}$ halmazrendszer teljesíti az i.)—v.) tulajdonságok mindegyikét, akkor a $\mu(A) = 0$, ha $A \in \mathcal{A}$ és $\mu(A) = 1$, ha $A \notin \mathcal{A}$ képlettel definiált μ halmazfüggvény teljesíti a tétel a)–d) feltételeit. Ezzel a tétel bizonyítását befejezzük.

Az a)–c) feltételek teljesülése nyílvánvaló. A d) pontban megfogalmazott $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B)$ azonosság diszjunkt A és B halmazokra szintén nyilvánvaló (a ii.) és iii.) feltétel miatt), ha $\mu(A) = 0$ vagy $\mu(B) = 0$. Azt kell belátni, hogy nincs két olyan diszjunkt $A \subset Z$ és $B \subset Z$ halmaz, amelyekre $\mu(A) = 1$ és $\mu(B) = 1$. Valóban, ha lenne két ilyen A és B halmaz, akkor az v.) tulajdonság miatt a $C = Z \setminus A$ és $D = Z \setminus D$ halmazokra a $C \in \mathcal{A}$ és $D \in \mathcal{A}$ relációk is teljesülnének, és mivel $C \cup D = Z$ ez azt jelentené, hogy $Z \in \mathcal{A}$. Ez viszont ellentmond a iv.) feltételnek.