A Valószínűségszámítás I. előadássorozat harmadik előadása.
2007. február 20.

A feltételes valószínűség.

Egy A esemény (halmaz) $P(A)$ valószínűsége azt méri, hogy mennyire tartjuk valószínűnek ennek az A eseménynek a bekövetkezését. Viszont ha tudjuk, hogy egy másik B esemény bekövetkezett, akkor ez a plusz információ megváltoztathatja megítélésünket erről a valószínűségről. Érdemes ezt a kérdést részletesebben is tárgyalni. Ezért bevezetjük a $P(A|B)$ feltételes valószínűséget, amely az A esemény feltételes valószínűségét méri, feltéve a B eseményt, azaz azt, hogy a B esemény bekövetkezett. A feltételes valószínűség definiciója egyszerű, és néhány egyszerű és természetes tény megértese után jól tudunk vele számolni. Viszont, mivel ez nagyon fontos fogalom, érdemes több példát (lehetőleg önállóan) megoldani annak érdekében, hogy a feltételes valószínűségekkel minél biztosabban tudjunk bánni. Először megadom e fogalom pontos definicióját.

A feltételes valószínűség definiciója. *Legyen B egy olyan esemény egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, amelyre $P(B) > 0$. Egy ugyanezen a valószínűségi mezőn lévő A esemény $P(A|B)$ feltételes valószínűségét feltéve a B eseményt (azaz a B esemény bekövetkezését) a*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

képlet adja meg.

Megjegyzés: Csak pozitív valószínűségi B események, azaz $P(B) > 0$ esetén definiáljuk a $P(A|B)$ feltételes valószínűséget.

E definició szemléletes tartalma a következő. Ha a B esemény bekövetkezik, akkor minden a B eseményt kizáró esemény feltételes valószínűsége, (feltéve a B eseményt) nulla, továbbá tetszőleges A esemény feltételes valószínűsége megegyezik az $A \cap B$ esemény feltételes valószínűségével. Természetes feltenni, hogy az $A \cap B$ esemény $P(A \cap B|B)$ feltételes valószínűsége arányos az $A \cap B$ esemény $P(A \cap B)$ valószínűségével. Mivel $P(B|B) = 1$, ez sugallja a fenti definicót.

Annak érdekében, hogy jobban megértsük a feltételes valószínűség fogalmát tekintsük néhány feladatot.

1.) Egy szabályos pénzdarabot feldobunk 10 alkalommal. Válaszoljuk meg a következő két kérdést:
   a.) Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan 6 fejdobás történik?
   b.) Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan 6 fejdobás történik, ha tudjuk, hogy az első pénzdobás eredménye fej?

   Megoldás: Az a.) kérdésre a válasz az, hogy $\binom{10}{6}2^{-10}$, mert $\binom{10}{6}$ egymást kizáró eseményt kell figyelembe venni, és ezek mindegyikének 2^{-10} a valószínűsége.

A b.) kérdésre a feltételes valószínűség formális definicióját nem ismerve a következő választ adnánk: Ez a feltételes valószínűség $\binom{9}{5}2^{-9}$, mert a feltétel teljesülése esetében $\binom{9}{5}$ egymást kizáró eseményt kell figyelembe venni, azt, hogy a 2.-tól a 10. dobásig a (2. és 10. dobást is beleszámítva), tehát 9 dobásban pontosan 5 fejdobás történt, és ezen események mindegyikének a valószínűsége 2^{-9}.

A formális definició szerinti számolásban kissé másképpen érvelünk, de ugyanazt az eredményt kapjuk. Jelölje A azt az eseményt, hogy a 10 dobásban pontosan 6 fejdobás történt, és B azt az eseményt, hogy az első fejdobás fej. Ekkor a $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ feltételes valószínűséget kell kiszámolni. Továbbá $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = \binom{9}{5}2^{-10}$, ezért $P(A|B) = \binom{9}{5}2^{-9}$. A $P(A \cap B) = \binom{9}{5}2^{-10}$ azonosság azért igaz, mert $A \cap B$ az az esemény, hogy az első dobás fej, és az utána következő 9 dobásban pontosan 5 fejdobás történt. Összesen $\binom{9}{5}$ ilyen dobássorozat van, és ezek mindegyikének 2^{-10} a valószínűsége.

2.) Egy szabályos dobókockát feldobunk kétszer egymás után.

a) Mi a valószínűsége annak, hogy lesz legalább egy hatos dobás?

b) Mi a feltételes valószínűsége annak, hogy lesz legalább egy hatos dobás, ha tudjuk, hogy a két dobás értéke különböző?

Megoldás: Minden (i, j), $1 \le i, j \le 6$ dobáspár valószínűsége $\frac{1}{36}$. Az a) kérdés megválaszolásához össze kell számolni, hogy hány olyan dobáspár van, amelynek legalább az egyik eleme 6-os. Hat olyan dobáspár van, amelyiknek az első eleme 6-os. Ezenkívül még 5 olyan dobáspár van, amelyiknek a második eleme 6-os, de az első eleme nem hatos, tehát még nem számoltuk. Ezért összesen 11 a feltételt kielégítő dobáspár van, és a keresett valószínűség $\frac{11}{36}$.

Vezessük be az A eseményt, ami azt jelöli, hogy volt 6-os dobás és a B eseményt, ami azt jelöli, hogy a két dobás értéke különböző. A b) kérdés megválaszolásához a $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ feltételes valószínűséget kell kiszámolnunk. Vegyük észre, hogy $P(A \cap B) = \frac{10}{36}$, mert 10 olyan dobáspár van, amely mind az A eseményben, mind a B eseményben benne van. Vagy az első dobás hatos, és a a második dobás nem az, vagy az első dobás nem hatos, és a második dobás az. Hasonlóan, $P(B) = \frac{30}{36}$, mert a B eseményt teljesítő dobáspárok első elemét 6, a második elemét 5-féleképp választhatjuk. Innen a keresett feltételes valószínűség $P(A|B) = \frac{1}{3}$.

(Látjuk, hogy az ebben a feladatban tekintett feltétel nélküli és feltételes valószínűség különbözik egymástól, de eltérésük kicsi.)

3.) Reggel valaki hazulról elmenve a lakáskulcsot elteszi, mégpedig úgy, hogy 0.5 valószínűséggel teszi a kabátzsebébe, 0.3 valószínűséggel a nadrágzsebébe és 0.2 valószínűséggel a mellényzsebébe. A nap folyamán mindenfelé jár, ezért a lakáskulcs a kabátzsebéből 0.1, a nadrágzsebéből 0.2, a mellényzsebéből viszont 0 valószínűséggel esik ki. Este hazatérve emberünk először a kabát majd a nadrágzsebében keresi a kulcsot, de egyik helyen sem találja. Mi annak a valószínűsége, hogy a lakáskulcs ott van a mellényzsebében?

Megoldás: Jelölje A_1 azt az eseményt, hogy emberünk a lakáskulcsot a kabát A_2, hogy a nadrág és A_3, hogy a mellényzsebébe tette. Jelölje továbbá B azt az eseményt, hogy a kulcs nem veszett el. Ekkor feltételeink szerint az A_1, A_2 és A_3 események egymást kizáróak, $P(A_1)=0.5$, $P(A_2)=0.3$, $P(A_3)=0.2$ továbbá $P(B|A_1)=0.9$, $P(B|A_2)=0.8$ és $P(B|A_3)=1$. Vezessük be a $C=(\bar{B}\cap A_1)\cup(\bar{B}\cap A_2)\cup A_3$ eseményt. Ekkor C jelenti azt az eseményt, hogy emberünk este nem találta a lakáskulcsot sem a kabát sem a nadrágzsebében. Ezért minket a $P(B|C)=\frac{P(B\cap C)}{P(C)}$ feltételes valószínűség érdekel. Viszont $P(C)=P(A_1\cap\bar{B})+P(A_2\cap\bar{B})+P(A_3)=P(\bar{B}|A_1)P(A_1)+P(\bar{B}|A_2)P(A_2)+P(A_3)=0.1\cdot 0.5+0.2\cdot 0.3+0.2=0.31$, és $P(B\cap C)=P(B\cap A_3)=P(A_3)=0.2$. Innen a minket érdeklő feltételes valószínűség értéke $\frac{0.2}{0.31}=\frac{20}{31}$.

A feltételes és hagyományos valószínűség fogalmai között fogalmaz meg kapcsolatot a következő lemma.

Lemma. *Legyen $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mező, és legyen rajtva adva egy $B\in\mathcal{A}$ esemény, amelyre $P(B)>0$. Vezessük be a P_B, $P_B(A)=P(A|B)$, $A\in\mathcal{A}$, halmazfüggvényt a $\mathcal{A}$ σ-algebrán. Ekkor $(\Omega,\mathcal{A},P_B)$ szintén valószínűségi mező.*

Bizonyítás: $P_B(\Omega)=1$, $\mathcal{A}$ σ-algebra, azt kell még ellenőrizni, hogy P_B σ-additiv az $\mathcal{A}$ σ-algebrán, azaz, ha A_n, $n=1,2,\dots$, diszjunkt halmazok, akkor $P_B\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}P_B(A_n)$. Viszont ebben az esetben az $A_n\cap B$ halmazok is diszjunktak, ezért

$$P_B\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\frac{P\left(\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cap B\right)}{P(B)}=\frac{P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(A_n\cap B)\right)}{P(B)}$$
$$=\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}P(A_n\cap B)}{P(B)}=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n|B)=\sum_{n=1}^{\infty}P_B(A_n).$$

Megfogalmaztam néhány egyszerű állítást a feltételes valószínűségről. Ezeket nem kell feltétlenül megtanulni, mert olyan összefüggéseket fejeznek ki, amelyekre magunktól is rájövünk. Fontosabb inkább megérteni azt, hogy konkrét feladatokban hogyan használják ezeket az összefüggéseket.

Először felidéztem a teljes eseményrendszer definicióját (lásd a Fazekas könyv 3.6 definicióját a 33. oldalon), ami lényegében nem más mint a halmazelméletben szereplő partició fogalmának újrafogalmazása a valószínűségszámítás nyelvén.

Teljes eseményrendszer definiciója *Legyen adva egy $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mező, és azon $A_n\in\mathcal{A}$ események (halmazok) véges vagy megszámlálhatóan végtelen rendszere. Azt mondjuk, hogy az A_n események teljes eseményrendszert alkotnak, ha azok diszjunkt halmazok (más szóval egymást kizáró események), és $\bigcup\limits_{n}A_n=\Omega$.*

Megjegyzés: Ha egy A halmazt előállítunk véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok diszjunkt A_n halmaz uniójaként, azaz $A=A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots$, akkor egy ilyen előállítást az A halmaz particiójának nevezünk. Ennek az általánosan használt fogalomnak a felhasználásával egy teljes eseményrendszert az Ω biztos esemény particiójának is nevezhetünk.

Teljes valószínűség tétele. *Alkossanak a B_n halmazok pozitív valószínűségi halmazokból álló teljes eseményrendszert. Ekkor tetszőleges A halmazra*

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots .$$

(Lásd a Fazekas könyv 3.7 tételét a 33. oldalon.)

A Tétel bizonyítása:

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots .$$

Bayes formula. (lásd a Fazekas könyvben a 35. oldalon.)

$$P(B|A) = P(A|B)\frac{P(B)}{P(A)}, \quad \text{ha } P(A) > 0, \text{ és } P(B) > 0.$$

Megfogalmaztam egy egyszerű eredményt, amelyet néha a teljes eseményrendszerről szóló tételnek is hívnak. (Lásd a Fazekas könyv 3.10 Tételét a 36. oldalon).

Tétel. *Legyen adva egy A esemény és egy $B_1, B_2, \cdots$, teljes eseményrendszer. Ekkor*

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A|B_n)P(B_n)} \quad \textit{minden } i = 1, 2, \dots, \textit{ számra.}$$

Bizonyítás: Vegyük észre, hogy a felírt kifejezésben a számláló

$$P(A|B_i)P(B_i) = P(A \cap B_i),$$

a nevező pedig $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A|B_n)P(B_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A \cap B_n) = P(A)$.

Megjegyzés: Az előző tételben szereplő formula azért hasznos, mert a következő gyakran előforduló problémának a megoldásában segít. Ismerjük egy A esemény $P(A|B_1)$, $P(A|B_2)$, ... feltételes valószínűségeit feltéve egy $B_1, B_2, \dots$, teljes eseményrendszert, de minket a $P(B_i|A)$, $i = 1, 2, \dots$, feltételes valószínűségek érdekelnek. E tétel eredménye szerint ezeket egyszerűen ki tudjuk számítani, ha ismerjük a $P(B_n)$, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségeket is.

Konkrét esetekben ezekre az összefüggésekre magunk is rájöhetünk anélkül, hogy a formális képleteket nézzük. Tekintsünk néhány példát.

Feladatok:

4.) Három gép gyárt csavarokat, az egyik 0.01 a második 0.02 a harmadik 0.03 valószínűséggel gyárt hibás csavarokat. A csavarokat egy raktárba viszik, és összekeverik azokat. Egy gyártott csavar 0.5 valószínűséggel készült az első 0.3 valószínűséggel a második és 0.2 valószínűséggel készült a harmadik gépen. Kiveszünk egy csavart, megnézzük, és azt találjuk, hogy az hibás. Milyen valószínűséggel készült a csavar eme feltételek mellett az első gépen?

Megoldás: Jelölje A_1, A_2 illetve A_3 azt az eseményt, hogy a csavar az első, második vagy harmadik gépen készült, B azt az eseményt, hogy a csavar hibás. Ekkor minket a $P(A_1|B)$ feltételes valószínűség érdekel. Tudjuk, hogy $P(A_1) = 0.5$, $P(A_2) = 0.3$, $P(A_3) = 0.2$, továbbá $P(B|A_1) = 0.01$, $P(B|A_2) = 0.02$, és $P(B|A_3) = 0.03$. Ekkor

$$\begin{aligned} P(A_1|B) &= \frac{P(B \cap A_1)}{P(B)} = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3)} \\ &= \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)} \\ &= \frac{0.01 \cdot 0.5}{0.01 \cdot 0.5 + 0.02 \cdot 0.3 + 0.03 \cdot 0.2}. \end{aligned}$$

5.) Mi annak a valószínűsége, hogy egy (szabályos) dobókocka mindkét dobásának az eredménye hatos feltéve, hogy legalább az egyik dobás hatos?

Megoldás: Jelölje A_1 azt az eseményt, hogy az első dobás eredménye hatos, A_2 azt az eseményt, hogy a második dobás eredménye hatos. Akkor minket a $P(A_1 \cap A_2|A_1 \cup A_2)$ feltételes valószínűség érdekel. Viszont

$$P(A_1 \cap A_2|A_1 \cup A_2) = \frac{P((A_1 \cap A_2) \cap (A_1 \cup A_2))}{P(A_1 \cup A_2)} = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1 \cup A_2)}.$$

Másrészt $P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{36}$, $P(A_1 \cup A_2) = 1 - P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$. Innen a keresett feltételes valószínűség $\frac{1}{11}$.

A következő (egyszerű) feladat célja az, hogy összehasonlítsuk annak eredményét az előbb tárgyalt feladat eredményével, és megbeszéljük mást jelent az a feltételt, hogy két kockadobás közül az egyik megnevezett dobás (például az első dobás) hatos, és az hogy adódott hatos dobás. Képesek vagyunk-e szemléletünk alapján számolás nélkül megmondani, hogy melyik feltevés mellett nagyobb annak a feltételes valószínűsége, hogy mind a két dobás hatos?

6.) Egy szabályos dobókockát feldobunk kétszer egymás után. Mi annak a valószínűsége, hogy mind a két dobás hatos, feltéve hogy az első dobás hatos?

Megoldás: Jelölje A_1 azt az eseményt, hogy az első dobás hatos, A_2 pedig azt az eseményt, hogy a második dobás hatos. Ekkor $A_1 \cap A_2$ az az esemény, hogy mind a két dobás hatos, és minket a $P(A_1 \cap A_2|A_1)$ feltételes valószínűség értéke érdekel. Viszont, $P(A_1 \cap A_2|A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} = \frac{P(A_1)P(A_2)}{P(A_1)} = P(A_2) = \frac{1}{6}$.

Ezután a következő feladatot tárgyaltam. (lásd a Fazekas könyvben a 3.4 Példát a 32. oldalon)

7.) Ha egy n létszámú csoportban r véletlenül kiválasztott diáknak dolgozatot kell írni, mi annak a feltételes valószínűsége, hogy a legrosszabb diáknak is dolgozatot kell írni, feltéve, hogy a legjobb diák is ír dolgozatot.

Megoldás: Jelölje A azt az eseményt, hogy a legrosszabb diák ír dolgozatot, B azt az eseményt, hogy a legjobb diák ír dolgozatot. Ekkor mi a $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ feltételes valószínűséget akarjuk kiszámítani. Viszont $P(A \cap B) = \frac{\binom{n-2}{r-2}}{\binom{n}{r}}$, mert $\binom{n-2}{r-2}$ olyan választás van, amelyben mind a legjobb mind a legrosszabb diák ír dolgozatot, összesen $\binom{n}{r}$ választás van, és minden választás egyforma valószínű. Hasonlóan, $P(B) = \frac{\binom{n-1}{r-1}}{\binom{n}{r}}$. Innen egyszerű számolással

$$P(A|B) = \frac{\binom{n-2}{r-2}}{\binom{n-1}{r-1}} = \frac{r-1}{n-1}.$$

Az előadás kiegészítésében további a feltételes valószínűséggel kapcsolatos feladatot leírtam e feladatok megoldásával együtt. Ott visszatértem erre a feladatra is, és ismertettem annak egy másfajta heurisztikus elveken alapuló tárgyalását, illetve azt, hogy miért ad ez a heurisztikus érvelés helyes eredményt.

Események függetlensége.

Események és a később tárgyalandó valószínűségi változók függetlensége a valószínűségszámítás legfontosabb fogalmai közé tartozik. Heurisztikusan azt mondhatjuk, hogy egy A esemény akkor független egy B eseménytől, ha az A esemény bekövetkezése vagy be nem következése nem befolyásolja annak a valószínűségét, hogy a B esemény bekövetkezik-e. Ez azt sugallja, hogy a B esemény akkor független az A eseménytől, ha $P(B|A) = P(B)$. Ezt az összefüggést átrendezve jutunk a következő definicióhoz.

Két esemény függetlenségének a definiciója. *Azt mondjuk, hogy egy A és B esemény független, ha $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.*

Ez a definició azonban önmagában nem elegendő számunkra. Beszélni akarunk több esemény függetlenségéről is. Ezért a következő definiciót is bevezetjük.

Több esemény függetlenségének definiciója: *Az $A_1, \dots, A_n$ események akkor (teljesen) függetlenek, ha az $\{1, \dots, n\}$ indexhalmaz minden $\{j_1, \dots, j_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ részhalmazára*

$$P(A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_k}) = P(A_{j_1}) \cdots P(A_{j_k}).$$

Események végtelen $A_1, A_2, \dots$ sorozata akkor és csak akkor független, ha tetszőleges pozitív n egész számra az $A_1, \dots, A_n$ események függetlenek.

Speciálisan $n = 3$ esetben ez a definició a következőt jelenti: Az A, B és C események akkor függetlenek, ha a következő azonosságok *mindegyike* teljesül:

$$
\begin{aligned}
P(A \cap B) &= P(A)P(B) \\
P(A \cap C) &= P(A)P(C) \\
P(B \cap C) &= P(B)P(C) \\
P(A \cap B \cap C) &= P(A)P(B)P(C).
\end{aligned}
$$

Megjegyzés: Alább bevezetjük események páronkénti függetlenségének az irodalomban szintén használt fogalmát. Fontos, hogy események páronkénti függetlenségének és (teljes) függetlenségének a fogalmát meg tudjuk különböztetni egymástól.

Események páronkénti függetlenségének a definiciója. *Legyen $A_1, A_2, \dots,$ események (véges vagy végtelen) sorozata egy valószínűségi mezőn. Azt mondjuk, hogy ezek az események páronként függetlenek, ha tetszőleges különböző számokból álló (j, k), $j \neq k$, indexekre $P(A_j \cap A_k) = P(A_j)P(A_k)$.*

Megmutatandó, hogy az események (teljes) függetlenségének definiciójában szereplő feltételek mindegyike fontos tekintsük a következő feladatot.

> Adjunk példát egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőre azon három A_1, A_2 és A_3 eseményre, amelyekre $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$, de az A_1, A_2 és A_3 események nem függetlenek.
>
> *Egy lehetséges konstrukció:* Legyen $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{A}$ az Ω halmaz összes részhalmazaiból álló σ-algebra, $P(\{1\}) = x$, $P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = y$, $P(\{5\}) = 1 - x - 3y$, alkalmas x és y számokkal, $P(A) = \sum\limits_{u \in A} P(\{u\})$ minden $A \in \mathcal{A}$ halmazra. Definiáljuk az $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{1, 3\}$ és $A_3 = \{1, 4\}$ halmazokat. Ekkor $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{1\}$, ezért $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = x$. Másrészt $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = x + y$. Válasszuk meg az x és y számokat úgy, hogy $x = (x + y)^3$. Egy lehetőség erre, $x + y = \frac{1}{3}$, és ekkor $x = (x + y)^3 = \frac{1}{27}$, $y = \frac{8}{27}$, továbbá $P(\{5\}) = \frac{2}{27}$. Ebben a példában $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$. Viszont $A_1 \cap A_2 = \{1\} = A_1 \cap A_2 \cap A_3$, így nyílván $P(A_1 \cap A_2) \neq P(A_1)P(A_2)$. Tehát a függetlenség nem teljesül.

Lássunk példát arra is, hogy események páronkénti függetlenségéből nem következik azok függetlensége.

Példa: Definiálunk egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőt, azon három A_1, A_2, A_3-mal jelölt eseményt, amelyek páronként függetlenek, azaz $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$, $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$ és $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$, de nem teljesül a $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$ azonosság, tehát ezek az események nem függetlenek.

Álljon az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőben Ω 4 pontból, a jobb szemlélhetőség kedvéért legyenek ezek az $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$ pontok, álljon $\mathcal{A}$ az Ω halmaz összes részhalmazából, és legyen $P(\{(1, 1)\}) = P(\{(1, 2)\}) = P(\{(2, 1)\}) = P(\{(2, 2)\}) = \frac{1}{4}$.

Tekintsük az $A_1 = \{(1,1),(1,2)\}$ $A_2 = \{(1,1),(2,1)\}$ és $A_3 = \{(1,1),(2,2)\}$ halmazokat. Ekkor teljesülnek a $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$, $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$ és $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$ azonosságok, mert $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}$, és $A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_3 = \{(1,1)\}$, $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}$. Másrészt, $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)$, mert $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(\{(1,1)\}) = \frac{1}{4}$, és $P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{8}$.

Megjegyzés: n esemény függetlenségének a definiciójában összesen $2^n - n - 1$ nem triviális azonosság szerepel. (Az 1 elemű $\{j\}$, $1 \le j \le n$, alakú részhalmazoknak megfelelő $P(A_j) = P(A_j)$ és az üres halmaznak megfelelő $1 = 1$ azonosságok automatikusan teljesülnek.) A nem triviális azonosságok egyikét sem lehet a függetlenség definiciójából elhagyni. Be lehet látni, hogy a definicióban szereplő bármely nem triviális azonosságot elhagyva lehet konstruálni egy valószínűségi mezőt és azon n olyan eseményt, amelyek a függetlenség definiciójában szereplő összes többi nem triviális azonosságot teljesítik, de ezt az azonosságot nem. Ezért ezek az események nem függetlenek.

Fogalmazzuk meg a független eseményekre vonatkozó tulajdonságok közül a legfontosabbakat.

Lemma. *Ha $A_1, \dots, A_n$ független események, és bevezetjük az $A_j^1 = A_j$ és $A_j^{-1} = \Omega \setminus A_j$ jelöléseket, akkor tetszőleges $\varepsilon_j = \pm 1$, $1 \le j \le n$, sorozatra az $A_1^{\varepsilon_1}, \dots, A_n^{\varepsilon_n}$ események függetlenek.*

Indoklás: Elég belátni, hogy egy A_j halmaz kicserélése az A_j^{-1} halmazra nem változtatja meg a halmazrendszer függetlenségét. Továbbá az indexek szimmetria tulajdonsága miatt elég a $j = 1$ esettel foglalkozni. Ezután a függetlenséget definiáló relációk közül elég azokat ellenőrizni, amelyekben a $j = 1$ index szerepel. Azt kell megmutatni, hogy az $A_1, \dots, A_n$ események függetlensége esetén teljesül az

$$P((\Omega \setminus A_1) \cap A_{l_1} \cap \dots \cap A_{l_s}) = P(\Omega \setminus A_1)P(A_{l_1}) \cdots P(A_{l_s})$$

azonosság minden $2 \le l_1 < \dots < l_s$ indexre. Viszont ekkor

$$\begin{aligned}
P((\Omega \setminus A_1) \cap A_{l_1} \cap \dots \cap A_{l_s}) &= P(A_{l_1} \cap \dots \cap A_{l_s}) - P(A_1 \cap A_{l_1} \cap \dots \cap A_{l_s}) \\
&= P(A_{l_1}) \cdots P(A_{l_s}) - P(A_1)P(A_{l_1}) \cdots P(A_{l_s}) \\
&= (1 - P(A_1))P(A_{l_1}) \cdots P(A_{l_s}) \\
&= P(\Omega \setminus A_1)P(A_{l_1}) \cdots P(A_{l_s}).
\end{aligned}$$

Lemma. *Legyenek $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m$ események függetlenek egymástól. Tetszőleges olyan C eseményre, amelyik előállítható az $A_1, \dots, A_k$ halmazokból véges sok metszet, unió és komplementerképzés segítségével igaz, hogy a $B_1, \dots, B_m$ és C halmazok függetlenek.*

Emlékeztető 1. *Tanulták, hogy ha adva van véges sok halmaz, akkor minden ezekből a halmazokból unió, metszet és komplementer képzéssel előállítható halmaz megadható* *úgynevezett konjunktív vagy diszjunktív normálformában. Ez a következőt jelenti: Legyen adva egy Ω halmaz véges sok $A_1, \dots, A_n$ részhalmaza, és jelölje $A_j^{-1} = \Omega \setminus A_j$ az A_j halmaz komplementerét, $1 \le j \le n$. Vezessük be továbbá az $A_j^1 = Aj$ jelölést és az $\varepsilon_j = \pm 1$, $1 \le j \le n$, számokat valamint az összes lehetséges $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ alakú sorozatból álló halmazt. Ekkor minden az $A_1, \dots, A_n$ halmazokból véges sok unió, metszet és komplementer segítségével előállítható C halmaz megadható a következő módon is: Létezik az n hosszúságú ± 1 sorozatokból álló Σ halmaznak olyan $J = J(C) \subset \Sigma$ részhalmaza, amelyre*

$$C = \bigcup_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in J} (A_1^{\varepsilon_1} \cap A_2^{\varepsilon_2} \cap \cdots \cap A_n^{\varepsilon_n})$$

(konjunktív normálforma), és létezik a Σ halmaznak olyan $\bar{J} = \bar{J}(C) \subset \Sigma$ részhalmaza, amelyre

$$C = \bigcap_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \bar{J}} (A_1^{\varepsilon_1} \cup A_2^{\varepsilon_2} \cup \cdots \cup A_n^{\varepsilon_n})$$

(diszjunktív normálforma).

Emlékeztető 2. *Bár erre nem lesz szükségünk, idézzük fel a diszjunktív és konjunktív normálforma létezésének egy lehetséges indoklását. Mindegyik A_j, $1 \le j \le n$, halmaz előállítható ilyen alakban. Ebben a speciális esetben a $J = \bar{J}$ halmazt úgy választjuk, mint azon $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ sorozatok halmazát, amelyeknek a j-ik koordinátája $\varepsilon_j = 1$, a többi koordináta tetszőleges. Ezután elég belátni, hogy amennyiben két B_1 és B_2 halmaz előállítható konjunktív és diszjuntív normálformában, akkor ugyanez igaz a $B_1 \cap B_2$, $B_1 \cup B_2$, $\Omega \setminus B_1$ és $\Omega \setminus B_2$ halmazokra is. Ez némi számolással megmutatható. E számolásban érdemes felhasználni az alábbi de Morgan formulának nevezett azonosságokat, amelyeket egyébként is tudni kell: $\overline{B_1 \cup B_2} = \bar{B}_1 \cap \bar{B}_2$, $\overline{B_1 \cap B_2} = \bar{B}_1 \cup \bar{B}_2$, ahol $\bar{B}$ jelöli a B halmaz komplementerét. Általánosabban, tetszőleges $B_1, \dots B_k$ halmazokra $\overline{B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k} = \bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap \cdots \cap \bar{B}_k$, és $\overline{B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_k} = \bar{B}_1 \cup \bar{B}_2 \cup \cdots \cup \bar{B}_k$.*

A lemma indoklása: Minden ilyen C halmaz felírható konjunktív normálformában, azaz az előbb bevezetett jelöléseket használva $C = \bigcup\limits_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in J} A^{\varepsilon_1} \cap \cdots \cap A^{\varepsilon_n}$ alakban, ahol J egy n hosszúságú ± 1 sorozatokból álló halmaz. Továbbá az ebben a kifejezésben szereplő $A(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = A^{\varepsilon_1} \cap \cdots \cap A^{\varepsilon_n}$ események különböző $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ sorozatokra diszjunktak, és az $A(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, $B_1, \dots, B_n$ események függetlenek. Felírva a függetlenség definicójában szereplő azonosságokat ezekre a halmazrendszerekre, majd azokat összeadva az összes $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in J$ indexre megkapjuk a Lemma állítását.

Házi feladat:

Legyenek $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m$ olyan események egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, amelyekre $B_1, \dots, B_m$ diszjunktak, és $A_1, \dots, A_n, B_j$ független események minden $1 \le j \le m$ indexre. Ekkor $A_1, \dots, A_n, B_1 + \cdots + B_m$ független események.

Ezután tekintettem néhány példát.

Feladatok független eseményekkel kapcsolatos problémákról.

1.) Egy 100 tagú társaság minden egyes tagja egymástól függetlenül $\frac{1}{1000}$ valószínűséggel betegszik meg. Mi annak a valószínűsége, hogy a társaságnak lesz beteg tagja? A kapott eredményről mit mondhatunk? Az nagyon nagy, (majdnem 1) vagy nagyon kicsi (majdnem nulla) érték?

Megoldás: Jelölje A_j azt az eseményt, hogy a társaság j-ik tagja megbetegszik. Ekkor a $P(A_j) = \frac{1}{1000}$, és az A_j események függetlenek. Számoljuk ki először a minket érdeklő esemény komplementerének, azaz annak az eseménynek a valószínűségét, hogy mindenki egészséges. Ez az $\bigcap\limits_{j=1}^{100} (\Omega \setminus A_j)$ esemény valószínűsége. Mivel $P(\Omega \setminus A_j) = 1 - \frac{1}{1000}$, és az A_j események függetlenségéből következik az $\Omega \setminus A_j$ események függetlensége is, ezért $P\left(\bigcap\limits_{j=1}^{100} (\Omega \setminus A_j)\right) = \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{100}$. Innen a minket érdeklő esemény valószínűsége $1 - \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{100}$.

Végül jegyezzük meg, hogy $\left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{100} = \left(\left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{1000}\right)^{1/10} \sim e^{-1/10}$. Ez a szám nagyon közel van az egyhez, ezért a minket érdeklő valószínűség értéke kicsi.

2.) Tekintsük a következő valószínűségi mezőt. $\Omega = \{1, \dots, n\}$, ahol n valamely pozitív egész szám, $\mathcal{A}$ az Ω összes részhalmazaiból álló σ-algebra,

$$P(A) = \frac{\text{az } A \text{ halmaz számossága}}{n}.$$

Legyen $n = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ az n szám prímtényezős felbontása, és definiáljuk a következő A_j eseményeket: $A_j = \{m\colon\ m \text{ osztható a } p_j \text{ számmal}\}$, $1 \le j \le k$. Legyen $B = \{m\colon\ m \text{ relatív prim az } n \text{ számhoz képest}\}$. Mutassuk meg, hogy

a.) Az $A_1, \dots, A_k$ események függetlenek.

b.) $P(B) = \prod\limits_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right)$, ezért összesen $n \cdot \prod\limits_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right)$ n-nél kisebb és az n-hez képest relatív prim van.

Megoldás: $A_j = \left\{p_j, 2p_j, \dots, \frac{n}{p_j} p_j\right\}$ egy $\frac{n}{p_j}$ számból álló halmaz, ezért $P(A_j) = \frac{1}{p_j}$, $1 \le j \le k$. Az $A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_s}$ halmaz az n-nél kisebb $p_{j_1} \cdots p_{j_s}$ számmal osztható számokból áll minden $1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_s \le k$ sorozatra, ezért számossága $\frac{n}{p_{j_1} \cdots p_{j_s}}$, és $P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_s}) = \frac{1}{p_{j_1} \cdots p_{j_s}}$. Ez azt jelenti, hogy $P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_s}) = P(A_{j_1}) P(A_{j_2}) \cdots P(A_{j_s})$ minden $1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_s \le k$ sorozatra, ezért az A_1, A_2, ... A_k halmazok függetlenek.

Végül $B = \Omega \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_k) = \bigcap\limits_{j=1}^{k} (\Omega \setminus A_j)$. Ezért és az A_j események függetlensége miatt $P(B) = \prod\limits_{j=1}^{k} P(\Omega \setminus A_j) = \prod\limits_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right)$, ahonnan következik a B halmaz számosságára megadott képlet.

3.) Húsz héten keresztül játszunk a lottón. Minden héten kitöltünk (egymástól függetlenül) 10 lottószelvényt. Mi annak a valószínűsége, hogy pontosan két olyan hét lesz, amelyen lesz hármas négyes vagy ötös találatunk?

Megoldás: A 2. előadás 6. feladatának megoldása alapján annak a valószínűsége, hogy egy kitöltött lottószelvény tartalmaz három, négy vagy öt találatot

$$p_1 = \frac{1 + \binom{85}{1}\binom{5}{4} + \binom{85}{2}\binom{5}{3}}{\binom{90}{5}}.$$

Annak a valószínűsége, hogy valamely héten van három vagy négy találatunk úgy számolható ki, hogy tekintünk 10 független kisérletet, amelyek mindegyike p_1 valószínűséggel következik be, és annak valószínűségét kívánjuk kiszámolni, hogy ezen kisérletek legalább egyike sikeres. Annak valószínűsége, hogy nem volt sikeres kisérlet $(1-p_1)^{10}$, így annak a valószínűsége, hogy volt (legalább egy) sikeres kisérlet $p_2 = 1-(1-p_1)^{10}$. Tehát minden héten p_2 valószínűséggel következik sikeres lottószelvény kitöltés. Annak valószínűsége, hogy az i-edik és j-ik (például a harmadik és ötödik) héten következik be sikeres lottókitöltés, a többi héten pedig nem $p_2^2(1-p_2)^{18}$. Mivel az ilyen hétpárokat $\binom{20}{2}$-féleképp választhatjuk ki, a keresett valószínűség

$$\begin{aligned}\binom{20}{2} p_2^2(1-p_2)^{18} &= \binom{20}{2}\left(1-(1-p_1)^{10}\right)^2(1-p_1)^{180} \\ &= \binom{20}{2}\left(1-\left(1-\frac{1+\binom{85}{1}\binom{5}{4}+\binom{85}{2}\binom{5}{3}}{\binom{90}{5}}\right)^{10}\right)^2 \\ &\quad \left(1-\frac{1+\binom{85}{1}\binom{5}{4}+\binom{85}{2}\binom{5}{3}}{\binom{90}{5}}\right)^{180}.\end{aligned}$$

4.) Feldobunk egy szabályos pénzdarabot végtelen sokszor egymás után. Mi annak a valószínűsége, hogy pontosan az ötödik dobásban jelenik meg az első fej-dobás? Mi annak a valószínűsége, hogy a második fej-dobás pontosan öt dobással az első fej-dobás után következik be?

Megoldás: Akkor lesz az első fej-dobás az ötödik dobás, ha először négy írásdobás majd egy fej-dobás történik. Ennek valószínűsége $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$. Hasonlóan, annak a valószínűsége, hogy a k-ik dobás lesz az első fej-dobás 2^{-k}, $k=1,2,\dots$, annak valószínűsége pedig, hogy a k-ik dobás lesz az első fej-dobás, utána pedig 5 dobás múlva következik be a második fej-dobás $2^{-k}\cdot 2^{-5} = 2^{-k-5}$. Annak a valószínűségét, hogy az első és második fej-dobás között pontosan 5 dobás következik be kiszámolhatjuk úgy is, hogy kiszámoljuk minden $k=1,2,\dots$ számra kiszámoljuk annak valószínűségét, hogy a k-ik dobás volt az első és a $k+5$-ik dobás a második fej-dobás, majd összegezünk $k=1,2,\dots$-ra. Így azt kapjuk, hogy a keresett valószínűség $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k-5} = 2^{-5}\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-5}$.

5.) Egy szabályos érmét feldobunk egymás után egészen addig, amíg másodszor megjelenik egy fej. Azután a dobássorozatot abbahagyjuk. Mi annak a valószínűsége, hogy az utolsóelőtti dobás eredménye fej?

Megoldás: Az esemény, amelyiknek a valószínűségét ki akarjuk számolni, a következő módon is jellemezhető: Először k darab írásdobás történik valamely $k = 0, 1, 2, \dots,$ számmal, majd utána két fejdobás következik be. Ennek a valószínűsége

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

6.) Legyenek $A_1 \dots, A_n$ független események, amelyeknek ismerjük $P(A_j)$, $1 \le j \le n$, valószínűségeit. Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy pontosan k darab, illetve hogy legalább k darab A_j esemény következik be, $0 \le k \le n$.

Megoldás: Az, hogy pontosan k darab A_j esemény következik be azt jelenti, hogy léteznek olyan $1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_k \le n$ számok, hogy az $A_{j_1}, \dots, A_{j_k}$ események bekövetkeznek, míg $s \ne j_l$, $1 \le l \le k$, $1 \le s \le n$ indexekre az A_s esemény nem következik be, azaz az $\bar{A}_s$ esemény következik be. Ennek valószínűsége rögzített $1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_k \le n$ indexekre

$$P(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_k} \cap \bigcap_{s \in \{1,\dots,n\} \setminus \{j_1,\dots,j_k\}} \bar{A}_s) = \prod_{s=1}^{k} P(A_{j_s}) \prod_{t \in \{1,\dots,n\} \setminus \{j_1,\dots,j_k\}} (1 - P(A_t)).$$

Így annak a valószínűsége, hogy pontosan k darab A_j esemény következik be

$$\begin{aligned} P_k &= \sum_{(j_1,\dots,j_k): 1 \le j_1 < j_2 \le \dots j_k \le n} P(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_k} \cap \bigcap_{s \in \{1,\dots,n\} \setminus \{j_1,\dots,j_k\}} \bar{A}_s) \\ &= \sum_{(j_1,\dots,j_k): 1 \le j_1 < j_2 \le \dots j_k \le n} \prod_{s=1}^{k} P(A_{j_s}) \prod_{t \in \{1,\dots,n\} \setminus \{j_1,\dots,j_k\}} (1 - P(A_t)). \end{aligned}$$

Annak a valószínűsége, hogy legalább k darab A_j esemény következik be $Q_k = \sum\limits_{l=k}^{n} P_l$.

Gyakran találkozunk az alábbi kérdéssel, sokszor egy összetett feladat részfeladataként. Tekintsünk bizonyos $A_1, \dots, A_n$ eseményeket, és számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy legalább az egyikük bekövetkezik. Formálisan megfogalmazva, számítsuk ki a $P(A_1 \cup \dots \cup A_n)$ valószínűséget.

A következő két fontos speciális esetben meg tudjuk oldani ezt a feladatot:

a) Ha az $A_1, \dots, A_n$ események diszjunktak, azaz $A_i \cap A_j = \emptyset$, ha $i \ne j$, $1 \le i, j \le n$,

b) Ha az $A_1, \dots, A_n$ események függetlenek.

Az a) esetben

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n).$$

A b) esetben

$$\begin{aligned}P(A_1\cup\cdots\cup A_n)&=1-P(\overline{A_1\cup\cdots\cup A_n})=1-P(\bar A_1\cap\cdots\cap\bar A_n)\\&=1-P(\bar A_1)\cdots P(\bar A_n)=1-(1-P(A_1))\cdots(1-P(A_n))\end{aligned}$$

ahol $\bar A=\Omega\setminus A$ az A esemény komplementerét jelöli. (A fenti számolásban kihasználtuk azt az eredményt, amely szerint, ha $A_1,\dots,A_n$ független események, akkor $\bar A_1,\dots,\bar A_n$ is az.)

Mit mondhatunk az általános esetben, ha a tekintett $A_1,A_2,\dots,A_n$ események nem feltétlenül diszjunktak és nem feltétlenül függetlenek? Ez nehezebb kérdés, és az általános esetben a $P(A_1\cup\cdots\cup A_n)$ valószínűséget nem lehet kifejezni csak a $P(A_j)$ valószínűségek segítségével. De ebben az esetben is van egy hasznos és tartalmas eredmény, az úgynevezett szita formula, amely lehetővé teszi a $P(A_1\cup\cdots\cup A_n)$ valószínűség kiszámítását bizonyos plusz információk segítségével. Ismertetem ezt az eredményt. A következő előadásban tárgyalni fogok egy olyan feladatot, amelyet ennek az eredménynek a segítségével tudunk megoldani.

A kombinatorikában is van az ismertetetendő eredménynek egy megfelelője, amelyet szintén szita formulának neveznek. Érdemes ezt a két eredményt, amelyek, mint később látni fogjuk valójában ekvivalensek, párhuzamosan ismertetni. Annak érdekében, hogy megkülönböztessük őket kombinatorikus és valószínűségszámítási szita formuláról fogok beszélni.

Először a kombinatorikus szita formulát ismertetem: Legyen adva egy véges A halmaz, amely előáll bizonyos nem feltétlenül diszjunkt A_j, $1\le j\le n$, halmazok $A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ uniójaként. Szeretnénk megszámolni az A halmaz elemeinek $|A|$ számát. Tekintsünk egy olyan esetet, amikor erre közvetlenül nem vagyunk képesek, de meg tudjuk számolni az A_j halmazok elemeinek $|A_j|$ számát minden $1\le j\le n$ számra. Ekkor az $S_1=\sum\limits_{j=1}^n|A_j|$ mennyiség természetes becslés lenne az $|A|$ számra. De ez csak egy felső becslés az általános esetben, mert egy olyan elemet, amely mind az A_i mind az A_j halmazban benne van valamely $i\ne j$ indexpárra kétszer számoltunk az S_1 kifejezésben holott csak egyszer kellett volna. Ezt korrigálandó vezessük be az $S_2=\sum\limits_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j|$ összeget, és vegyük az S_1-S_2 becslést. Ekkor azonban csak az $S_1-S_2\le|A|$ egyenlőtlenséget kapjuk, mert például egy olyan elemet, amely három halmazban van benne háromszor számoltuk az S_1 összegben és háromszor vontuk le az S_2 összegben. (Ha az A_i, A_j és A_k halmazban van a tekintett pont akkor pozitív előjellel számoltuk az S_1 összeg $|A_1|$, $|A_2|$ és $|A_3|$ tagjaiban és negatív előjellel az S_2 összeg $|A_i\cap A_j|$, $|A_i\cap A_k|$ és $|A_j\cap A_k|$ tagjaiban. Ezért korrigáljuk ezt az összeget. Vezessük be az $S_3=\sum\limits_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k|$ kifejezéseket. Ekkor be lehet látni, hogy $S_1-S_2+S_3\ge|A|$. Ha azonosságot akarunk kapni akkor ezt a korrekciós eljárást tovább kell folytatni, mert például a 4 különböző A_j halmazban szereplő elemeket figyelembe véve … A fenti, kissé nagyvonalúan tárgyalt gondolatmenetet részletesebben kidolgozva és folytatva a következő eredményhez jutunk.

Kombinatorikus szita formula. *Legyenek adva bizonyos véges sok elemet tartalmazó $A_1, \dots, A_n$ halmazok, és tekintsük ezek $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ unióját. Jelölje $|X|$ egy véges X halmaz elemeinek a számát. Az A halmaz elemeinek $|A|$ számát a következő formulával fejezhetjük ki. Vezessük be az*

$$S_k = \sum_{1 \le j_1 < \dots < j_k \le n} |A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_k}|, \quad 1 \le k \le n,$$

mennyiségeket. Ekkor

$$|A| = |A_1 \cup \dots \cup A_n| = S_1 - S_2 + S_3 - \dots + (-1)^{n+1} S_n.$$

Továbbá,

$$S_1 - S_2 = \sum_{j=1}^{n} |A_j| - \sum_{1 \le j < k \le n} |A_j \cap A_k| \le |A| = |A_1 \cup \dots \cup A_n| \le S_1 = \sum_{j=1}^{n} |A_j|$$

és általában

$$\sum_{k=1}^{2l} (-1)^{k+1} S_k \le |A| = |A_1 \cup \dots \cup A_n| \le \sum_{k=1}^{2l-1} (-1)^{k+1} S_k$$

minden l indexre. (Legyen $S_k = 0$, ha $k > n$.) Ez az egyenlőtlenség azt jelenti, hogy a kombinatorikus szita formulában szereplő $S_1 - S_2 + S_3 - \cdots$ előjeles összeg páratlan számú tagot tartalmazó részletösszegei felső és páros számú tagot tartalmazó részletösszegei alsó becslést adnak az $|A| = |A_1 \cup \dots \cup A_n|$ mennyiségre.

Ezen eredmény valószínűségszámítási megfelelője, a valószínűségszámítási szita formula, hasonló eredményt állít bizonyos $A_1, \dots, A_n$ események uniójának a valószínűségéről.

Valószínűségszámítási szita formula. *Legyenek adva tetszőleges $A_1, \dots, A_n$ események egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Ekkor*

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = S_1 - S_2 + S_3 - \dots + (-1)^{n+1} S_n,$$

ahol

$$S_k = \sum_{1 \le j_1 < \dots < j_k \le n} P(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_k}).$$

Továbbá,

$$S_1 - S_2 = \sum_{j=1}^{n} P(A_j) - \sum_{1 \le j < k \le n} P(A_j \cap A_k) \le P(A_1 \cup \dots \cup A_n) \le S_1 = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$$

és általában

$$\sum_{k=1}^{2l}(-1)^{k+1}S_k \le P(A_1\cup\cdots\cup A_n) \le \sum_{k=1}^{2l-1}(-1)^{k+1}S_k$$

minden l indexre. (Legyen $S_k = 0$, ha $k > n$.) Ez az egyenlőtlenség azt jelenti, hogy a $P(A_1\cup\cdots\cup A_n)$ valószínűséget a szita formulában kifejező $S_1-S_2+S_3-\cdots$ előjeles összeg páratlan számú tagot tartalmazó részletösszegei felülről és páros számú tagot tartalmazó részletösszegei alulról becsülik meg a vizsgált valószínűséget.

Házi feladat:

Mutassuk meg, hogy a valószínűségszámítási szita formula a korábban ismertetett képleteket adja speciális esetként diszjunkt vagy független $A_1,\dots,A_n$ események uniójának $P(A_1\cup\cdots\cup A_n)$ valószínűségére.

Kiegészítés. További feladatok a feltételes valószínűség kiszámolásáról.

1.) Egy diák a feltett kérdésre (három lehetőség közül kell kiválasztani a helyeset) p valószínűséggel tudja a jó választ. Ha nem tudja, akkor tippel, és ez $\frac{1}{3}$ valószínűséggel ad helyes eredményt. Mi a feltételes valószínűsége annak, hogy tudja a választ feltéve, hogy jó választ adott?

Megoldás: Jelölje A azt az eseményt, hogy tudja a jó választ, B azt az eseményt, hogy jó választ ad. A $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ feltételes valószínűség értékére vagyunk kiváncsiak. Ekkor $P(A\cap B) = P(A) = p$, $P(B) = P(A\cap B)+P(\bar{A}\cap B) = P(A)+P(B|\bar{A})P(\bar{A}) = P(A)+(1-P(A))P(B|\bar{A}) = \frac{1}{3} = p+\frac{1}{3}(1-p)$. Innen $P(A|B)=\frac{p}{p+\frac{1}{3}(1-p)}$.

2.) Egy urnában z zöld és s sárga golyó van. Egymás után kihúzunk négy golyót úgy, hogy minden húzás után a golyót visszadobjuk az urnába, és vele együtt az urnába dobunk 2 ellenkező színű golyót. Mi a valószínűsége egy zöld, zöld, zöld, sárga húzássorozatnak?

Megoldás: Számoljuk ki először annak a valószínűségét, hogy az első húzás eredménye Z=(zöld), annak feltételes valószínűségét, hogy a második húzás Z, feltéve, hogy az első húzás Z, annak a feltételes valószínűségét, hogy a harmadik húzás eredménye Z feltéve, hogy előtte Z,Z és annak feltételes valószínűségét, és hogy a negyedik húzás eredménye S feltéve, hogy előtte Z,Z,Z húzás történt. Ez a valószínűség, illetve ezek a feltételes valószínűségek $\frac{z}{z+s}$, $\frac{z}{z+s+2}$, $\frac{z}{z+s+4}$, $\frac{s+6}{z+s+6}$. A keresett valószínűség $\frac{z}{z+s}\cdot\frac{z}{z+s+2}\cdot\frac{z}{z+s+4}\cdot\frac{s+6}{z+s+6}$.

3.) A Fazekas könyv egyik feladata (3.4 Példa a 32. oldalon) arról szól, hogy ha egy n létszámú csoportban r véletlenül kiválasztott diáknak dolgozatot kell írni, mi annak a feltételes valószínűsége, hogy a legrosszabb diáknak is dolgozatot kell írni, feltéve, hogy a legjobb diák is dolgozatot ír. Heurisztikusan úgy érvelhetünk, hogy ha a legjobb diák dolgozatot ír, akkor annak (feltételes) valószínűsége, hogy a legrosszabb diák is dolgozatot ír, azzal egyenlő, hogy a maradék $n-1$ diák közül őt is kiválasztják a maradék $r-1$ dolgozatíró közé, tehát $\frac{r-1}{n-1}$. Kissé pontosabban, annak valószínűsége, hogy mind a ketten dolgozatot írnak, $\frac{r(r-1)}{n(n-1)}$, annak, hogy a legjobb diák dolgozatot ír $\frac{r}{n}$, ahonnan következik az állítás. Ha a könyvben szereplő eredményt egyszerűbb alakra hozzuk, látjuk hogy az eredmény helyes. Adjunk közvetlen, a szemléletet követő precíz bizonyítást arra, hogy a fenti formulák az adott valószínűségekre helyesek.

Megoldás: Az urna visszatevés nélküli húzás modelljének érvelését alkalmazhatjuk ebben az esetben is. Tegyük fel, hogy egymás után kiválasztjuk a dolgozatot írókat, Minden lépésben az eddig ki nem választottak valamelyikét választjuk ki egyforma valószínűséggel. Ha kijelöljük (az urnából való húzásnál szereplő érvelést használva) egy külön (egy elemű) csoportba a legjobb, egy külön (egy elemű) csoportba a legrosszabb diákot, egy külön csoportba az összes többit, akkor rögzítve egy $1 \le j, k \le r$, $j \ne k$ számpárt kapjuk, hogy annak a valószínűsége, hogy a j-ik választásnál választunk az első, a k-ik választáskor a második csoportból, megegyezik annak a valószínűségével, hogy az első választáskor választunk az első és a második választáskor a második csoportból. Ennek valószínűsége viszont $\frac{1}{n(n-1)}$. Mivel a fenti események különböző (j,k) számpárokra kizárják egymást, ezért annak valószínűsége, hogy a legjobb és a legrosszabb diák is dolgozatot ír $\frac{r(r-1)}{n(n-1)}$. Hasonlóan, látható, hogy annak a valószínűsége, hogy a legjobb diák dolgozatot ír az $\frac{r}{n}$ számmal egyenlő.

4.) Adott két város, az igazmondók és hazugok városa. Az igazmondók városában egy kérdésre 0.9 valószínűséggel helyes a hazugok városában pedig 0.8 valószínűséggel hamis választ adnak. Megérkezünk véletlenül az egyik városba, egyforma, azaz $\frac{1}{2}$ valószínűséggel az igazmondók vagy a hazugok városába. Megkérdezzük az első embert, akivel találkozunk, hogy az igazmondók városába értünk-e. Azt a választ kapjuk, hogy nem. Mi a valószínűsége annak, hogy az igazmondók városába érkeztünk?

Megoldás: Jelölje A azt az eseményt, hogy az igazmondók városába érkeztünk, és B azt az eseményt, hogy a véletlenül megkérdezett ember azt válaszolja kérdésünkre, hogy nem az igazmondók városába érkeztünk. Ekkor minket a $P(A|B)$ feltételes valószínűség értéke érdekel. Tudjuk továbbá, hogy $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B|A) = 0.1$, $P(B|\bar{A}) = 0.2$. (Az első esetben az igazmondók városában megkérdezett ember hazudik, a másodikban a hazugok városában megkérdezett ember igazat mond.) Ezért

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})} = \frac{0.1 \cdot 0.5}{0.1 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.5} = \frac{1}{3}.$$

5.) Egy teszt-vizsgán, ahol három lehetőség közül kell kiválasztani a helyes választ ketten vesznek részt. Az első résztvevő p_1, a második résztvevő pedig p_2 valószínűséggel tudja a helyes választ, továbbá a vizsga két résztvevője egymástól függetlenül tudja vagy nem tudja, hogy mi a helyes válasz. Mindkét résztvevő a jó választ jelöli meg, ha tudja azt, ellenkező esetben pedig mindentől függetlenül egyforma valószínűséggel véletlenül bejelöli a három lehetséges válasz valamelyikét. Mi a feltételes valószínűsége annak, hogy mind a két résztvevő a helyes választ jelölte be, feltéve, hogy ugyanazt a választ adta?

Megoldás: Jelölje A azt az eseményt, hogy az első diák jól válaszol, B azt az eseményt, hogy a második diák jól válaszol, D_1 azt az eseményt, hogy mind a két jelölt az elsőként felsororolt feltüntetett rossz választ D_2 pedig azt az eseményt, hogy mind a két jelölt a másodiknak felsorolt rossz választ adja. Ekkor $C = (A \cap B) \cup D_1 \cup D_2$ jelöli azt az eseményt, hogy a két diák egyformán válaszol. Bennünket a $P(A \cap B|C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A \cap B)}{P((A \cap B) \cup D_1 \cup D_2)}$ feltételes valószínűség érdekel. Viszont $P(A) = p_1 + \frac{1}{3}(1-p_1) = \frac{1+2p_1}{3}$, $P(B) = \frac{1+2p_2}{3}$, és az A és B események függetlenek. Innen $P(A \cap B) = \frac{1+2p_1}{3} \cdot \frac{1+2p_2}{3}$, $P(C) = R(A \cap B) + P(D_1) + P(D_2) = \frac{1+2p_1}{3} \cdot \frac{1+2p_2}{3} + 2\frac{1-p_1}{3} \cdot \frac{1-p_2}{3}$. Ugyanis $P(D_1) = P(D_2) = \frac{(1-p_1)}{3} \cdot \frac{(1-p_2)}{3}$, mivel az első jelölt akkor adja az első rossz választ, ha nem tudja a helyes választ, és a három lehetőség közül az első rossz választ jelöli ki, és ennek a valószínűsége $(1-p_1)\frac{1}{3}$. Annak a valószínűsége, hogy a második jelölt ugyanezt a választ adja $(1-p_2)\frac{1}{3}$, a két jelölt egymástól függetlenül válaszol, ahonnan $P(D_1) = \frac{(1-p_1)}{3} \cdot \frac{(1-p_2)}{3}$. Hasonlóan, a $P(D_2)$ valószínűségre ugyanazt az értéket kapjuk. Innen

$$P(A \cap B|C) = \frac{(1+2p_1)(1+2p_2)}{(1+2p_1)(1+2p_2) + 2(1-p_1)(1-p_2)}.$$

6.) Bizonyítsuk be a következő azonosságot, amelyet teleszkóp szabálynak is szoktak nevezni: Ha adva vannak $A_1, \dots, A_k$ események egy valószínűségi mezőn, amelyekre $P(A_1 \cap \cdots \cap A_k) > 0$, akkor

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_k|A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1})$$

Megoldás:

$$\begin{aligned} & P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_k|A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1}) \\ &= P(A_1)\frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \cdots \frac{P(A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_{k-1} \cap A_k)}{P(A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1})} \\ &= P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k). \end{aligned}$$

7.) Két különböző fáról leszednek 100 almát, és beteszik két különböző (megkülönböztethetetlen) ládába. Ez egyik fáról szedett almák (egymástól függetlenül) $\frac{1}{4}$ a másik fáról szedett almák pedig (szintén egymástól függetlenül) $\frac{1}{10}$ valószínűséggel férgesek. Kiveszünk az egyik (véletlenül kiválasztott) ládából két almát és mind a kettő férges. Ezek után kiveszünk a másik ládából egy almát. Mi annak a valószínűsége, hogy ez az alma már nem férges?

Megoldás: Értsük meg először pontosabban a feladatot. Jelölje B azt az eseményt, hogy első alkalommal a rosszabb fáról leszedett almákat tartalmazó ládához nyúlunk. Ekkor egyrészt $P(B) = \frac{1}{2}$. Másrészt, ha egymás után, esetleg váltogatva a ládákat kiveszünk egymás után a ládákból almákat, definiáljuk a $j_1, \dots, j_k$ húzássorozatot, ahol mindegyik $j_s = \pm 1$, $j_1 = 1$, $j_s = 1$ azt jelenti, hogy a s-ik húzás során az elsőnek kiválasztott ládából, $j_s = -1$ pedig azt, hogy a másik ládából választottunk almát, akkor $A(j_1,\dots,j_n)$-nel jelölve azt az eseményt, hogy minden kiválasztott alma férges, felírhatjuk, hogy

$$P(A(j_1,\dots,j_n)|B) = \left(\frac{1}{4}\right)^{u(j_1,\dots,j_n)}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-u(j_1,\dots,j_n)},$$

$$P(A(j_1,\dots,j_n)|\bar{B}) = \left(\frac{1}{10}\right)^{u(j_1,\dots,j_n)}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-u(j_1,\dots,j_n)},$$

ahol $u(j_1,\dots,j_n)$ jelöli a $j_1,\dots,j_n$ sorozatban szereplő $+1$ jelek számát. Hasonlóan fel tudjuk írni annak feltételes valószínűségét, hogy egy előírt húzássorozat esetén, amelyikben megmondjuk, hogy mikor melyik ládából húztunk almát a férges és jó almahúzásoknak előírt sorozata jelenik meg, feltéve a B eseményt vagy annak komplementerét, a $\bar{B}$ eseményt. Jelölje C azt az eseményt, hogy az első két húzásban férges almát húzunk, D pedig azt, hogy a harmadik húzásban (a láda megváltoztatása után) jó almát húzunk. Ekkor a $P(D|C) = \frac{P(C\cap D)}{P(D)}$ feltételes valószínűséget akarjuk kiszámolni. Viszont,

$$P(C) = P(C|B)P(B) + P(C|\bar{B})P(\bar{B}) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^2\right) = \frac{29}{800},$$

$$\begin{aligned} P(C\cap D) &= P(C\cap D|B)P(B) + P(C\cap D|\bar{B})P(\bar{B}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{9}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^2\frac{3}{4}\right) = \frac{51}{1600}. \end{aligned}$$

Innen $P(D|C) = \frac{P(C\cap D)}{P(D)} = \frac{51}{58}$.

8.) Egy vizsgán 19 diák vesz részt. Összesen 11 vizsgakérdés van, amelyek közül minden diák kettőt kap. 9 diák kiválóan, 6 diák jól, és négy diák közepesen készült fel. Egy kiválóan felkészült diák mind a 11 kérdésre jól tud válaszolni, egy jól felkészült diák 8-ra, egy közepesen felkészült diák pedig 6-ra. Egy diák helyes választ ad mind a két kérdésre. Mi annak a valószínűsége, hogy ő a jól felkészült diákok közé tartozik?

Megoldás: Jelölje A_1 azt az eseményt, hogy a tekintett diák a kiválóan, A_2 hogy a jól és A_3, hogy a közepesen felkészült diákok közé tartozik. Jelölje B azt az eseményt, hogy mind a két kérdésre jól válaszol. Ekkor a $P(A_2|B)$ feltételes valószínűséget kell kiszámolnunk. Viszont $P(A_1\cap B) = \frac{9}{19}$, $P(A_2\cap B) = \frac{6}{19}(\frac{8}{11})^2$, és $P(A_3\cap B) = \frac{4}{19}(\frac{6}{11})^2$, ahonnan $P(B) = P(A_1\cap B) + P(A_2\cap B) + P(A_3\cap B) == \frac{9}{19} + \frac{6}{19}(\frac{8}{11})^2 + \frac{4}{19}(\frac{6}{11})^2 = \frac{147}{11\cdot 19}$, és $P(A_2|B) = \frac{P(A_2\cap B)}{P(B)} = \frac{6\cdot 64}{147\cdot 11} = \frac{128}{539}$.

9.) Egy utazó az útlevelét keresi íróasztalának 6 fiókjában. De egyáltalán nem biztos, hogy az útlevél az íróasztalban található. Ennek valószínűsége 0.9, és az útlevél egyforma valószínűséggel lehet mindegyik fiókban. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az útlevél a 6. fiókban van, ha az utazó az első 5 fiókot már kinyitotta, de ezek egyikében sem találta az útlevelét?

Megoldás: Jelölje A_j, $1 \le j \le 6$, azt az eseményt, hogy az útlevél a j-ik fiókban van, $\bar{A}_j$ ennek az eseménynek a komplementerét, és legyen $B = \bigcup\limits_{j=1}^{6} A_j$ az az esemény, hogy az útlevél valamelyik fiókban van. Tudjuk, hogy $P(A_j) = P(A_j|B)P(B) = \frac{1}{6} \cdot 0.9$ minden $1 \le j \le 6$ indexre, és az A_j, $1 \le j \le 6$, események diszjunktak. Ezen észrevételek alapján a feladatot így fogalmazhatjuk át: Adott 6 egymást kizáró A_j, $1 \le j \le 6$, esemény, és mindegyiknek a valószínűsége $\frac{1}{6} \cdot 0.9$. Számoljuk ki az A_6 esemény feltételes valószínűségét ama feltétel mellett, hogy az A_j, $1 \le j \le 5$, események egyike sem következik be.

A $P\left(A_6 \middle| \bigcap\limits_{j=1}^{5} \bar{A}_j\right)$ feltételes valószínűséget kell kiszámolni. Másrészt $A_6 \subset \bigcap\limits_{j=1}^{5} \bar{A}_j$.

Ezért $P\left(A_6 \cap \bigcap\limits_{j=1}^{5} \bar{A}_j\right) = P(A_6)$, és

$$P\left(A_6 \middle| \bigcap_{j=1}^{5} \bar{A}_j\right) = \frac{P(A_6)}{P\left(\bigcap\limits_{j=1}^{5} \bar{A}_j\right)} = \frac{P(A_6)}{1 - P\left(\bigcup\limits_{j=1}^{5} A_j\right)} = \frac{P(A_6)}{1 - \sum\limits_{j=1}^{5} P(A_j)}.$$

Innen

$$P\left(A_6 \middle| \bigcap_{j=1}^{5} \bar{A}_j\right) = \frac{0.9 \cdot \frac{1}{6}}{1 - 5 \cdot 0.9 \cdot \frac{1}{6}} = \frac{9}{60 - 45} = \frac{3}{5}.$$