A Valószínűségszámítás I. előadássorozat ötödik előadása.
2007. március 6.

A várható érték tulajdonságainak bizonyításában nagyon hasznos az alábbi segédtétel, amely megegyezik a Fazekas könyvben szereplő 2.6 Állítással a 61. oldalon.

Segédtétel. *Legyen ξ egy diszkrét eloszlású valószínűségi változó egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, amely valamilyen $x_1, x_2, \dots,$ értékeket vesz fel, és legyen $B_k = \{\omega\colon\ \xi(\omega) = x_k\}$, $k = 1, 2, \dots,$ a ξ valószínűségi változó értékei által meghatározottt teljes eseményrendszer. Legyen C_j, $j = 1, 2, \dots,$ egy ennél finomabb teljes eseményrendszer, azaz tegyük fel, hogy a $C_j \in \mathcal{A}$ halmazok diszjunktak, $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} C_j = \Omega$, és minden C_j halmazhoz tartozik olyan B_k halmaz, amelyre $C_j \subset B_k$. Ha $C_j \subset B_k$, akkor rendeljük hozzá a C_j halmazhoz az $y_j = x_k$ számot. A $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k P(B_k)$ és $\sum\limits_{j=1}^{\infty} y_j P(C_j)$ összegek egyszerre abszolut konvergensek, és ha ezek az összegek abszolut konvergensek, akkor*

$$E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k P(B_k) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j P(C_j).$$

Kissé nagyvonalúan és pongyolán fogalmazva a Segédtételt a következő módon is interpretálhatjuk. Az $E\xi$ várható értéket definááló $E\xi = \sum x_k P(B_k)$, $B_k = \{\omega\colon\ \xi(\omega) = x_k\}$ összegben a B_k halmazt fel lehet osztani kis C_j darabokra (a kicsiség itt azt jelenti, hogy mindegyik C_j halmaznak kicsi a valószínűsége), és a várható értéket $E\xi = \sum y_j P(C_j)$ alakban is felírhatjuk, ahol y_j a $\xi(\omega)$ függvény értéke a C_j halmazon. A várható érték ilyen felírása emlékeztet az integrálok definiciójában szereplő integrálközelítő összegekre.

Valójában itt sokkal többről van szó, mint puszta formális analógiáról. A mértékelméletben bevezették az úgynevezett Lebesgue integrál fogalmát, ami általánosabb, mint a Riemann integrál. A várható érték, amiről beszélünk, a $\xi(\omega)$ valószínűségi változónak, azaz az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ téren definiált (mérhető) függvénynek a Lebesgue integrálja a P mérték szerint. Erre a tényre a későbbiekben nem lesz szükségünk, de sok meggondolás hátterében ennek ismerete rejtőzik. Így például a várható érték additívitása az integrál additívitásának az átfogalmazása. Bár itt nem foglalkozunk a Lebesgue integrál fogalmának kidolgozásával, mert erre nincs szükségünk, valójában az ehhez szükséges munka jelentős részét megtesszük. Diszkrét eloszlású valószínűségi változók várható érték definiciójának bevezetésével az egyszerű (elemi) függvények Lebesgue integrálját definiáljuk, és a várható érték tulajdonságainak a bizonyításával a Lebesgue integrál legfontosabb tulajdonságait bizonyítjuk.

A Segédtétel bizonyítása: Először azt mutatjuk meg, hogy a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k P(B_k)$ és $\sum\limits_{j=1}^{\infty} y_j P(C_j)$ összegek egyszerre abszolut konvergensek.

Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} x_k P(B_k)$ összeg abszolut konvergens, akkor létezik olyan $L < \infty$ szám, amelyre $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| P(B_k) = L$, és ezért minden N indexre

$$\sum_{j=1}^{N} |y_j| P(C_j) \le \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| P(B_k) = L.$$

Innen következik, hogy $\sum_{j=1}^{\infty} |y_j| P(C_j) \le L$, azaz a $\sum_{j=1}^{\infty} y_j P(C_j)$ összeg is abszolut konvergens.

Ha a $\sum_{j=1}^{\infty} y_j P(C_j)$ összeg abszolut konvergens, akkor $\sum_{j=1}^{\infty} |y_j| P(C_j) \le L < \infty$ alkalmas L számmal, ahonnan tetszőleges N indexre

$$\sum_{k=1}^{N} |x_k| P(B_k) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{j\colon\, C_j \subset B_k}^{\infty} |y_j| P(C_j) \le \sum_{j=1}^{\infty} |y_j| P(C_j) \le L < \infty,$$

és ezért a $\sum_{k=1}^{\infty} x_k P(B_k)$ összeg is abszolut konvergens. Ezzel beláttuk, hogy a két tekintett összeg egyszerre abszolut konvergens.

Ha a fenti sorok abszolut konvergensek akkor minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $N = N(\varepsilon)$ index, hogy

$$\sum_{k=N}^{\infty} |x_k| P(B_k) < \varepsilon. \tag{A1}$$

Ekkor

$$\sum_{k=N}^{\infty} \sum_{j\colon\, C_j \subset B_k} |y_j| P(C_j) < \varepsilon. \tag{A2}$$

Legyen $U_k = \{j\colon\, C_j \subset B_k\}$ minden $k = 1, 2, \dots$ számra. Ekkor minden U_k halmaznak van olyan véges $V_k = V_k(\varepsilon) \subset U_k$ részhalmaza, amelyre

$$|x_k| \sum_{j \in U_k \setminus V_k} P(C_j) \le \varepsilon 2^{-k}$$

Ezért minden $k = 1, 2, \dots$ indexre

$$\left| \sum_{j\colon\, j \in V_k}^{\infty} y_j P(C_j) - \sum_{j\colon\, C_j \subset B_k}^{\infty} y_j P(C_j) \right| \le \sum_{j \in U_k \setminus V_k} |y_j| P(C_j) < \varepsilon 2^{-k} \tag{B1}$$

és

$$\left| \sum_{j\colon\, j \in V_k}^{\infty} y_j P(C_j) - x_k P(B_k) \right| \le \sum_{j \in U_k \setminus V_k} |y_j| P(C_j) < \varepsilon 2^{-k}. \tag{B2}$$

A (B1) egyenlőtlenségeket összegezve $k \le N-1$-re és felhasználva az (A1) egyenlőtlenséget valamint a háromszög egyenlőtlenséget, azt kapjuk, hogy

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} y_j P(C_j) - \sum_{k=1}^{N-1}\sum_{j\in V_k} y_j P(C_j)\right| \le \sum_{k=N}^{\infty}\sum_{j\in V_k} |y_j| P(C_j) + \sum_{k=1}^{N-1}\sum_{j\in U_k\setminus V_k} |y_j| P(C_j) \le 2\varepsilon. \tag{C1}$$

Hasonlóan, a (B2) egyenlőtlenség összegezéséből $k \ge N-1$-re és az (A2) relációból következik, hogy

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k P(B_k) - \sum_{k=1}^{N-1}\sum_{j\in V_k} y_j P(C_j)\right| \le \sum_{k=N}^{\infty} |x_k| P(B_k) + \sum_{k=1}^{N-1}\sum_{j\in U_k\setminus V_k} |y_j| P(C_j) \le 2\varepsilon. \tag{C2}$$

A (C1) és (C2) egyenlőtlenségeket összehasonlítva kapjuk, hogy

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} y_j P(C_j) - \sum_{k=1}^{\infty} x_k P(B_k)\right| \le 4\varepsilon.$$

Mivel ez az állítás minden $\varepsilon > 0$ számra érvényes, innen következik a Segédtétel állítása.

A várható érték additívitását kifejező $E(\xi_1+\xi_2) = E\xi_1 + E\xi_2$ azonosság bizonyítása. Az ξ_1 és ξ_2 valószínűségi változók vegyék fel az $x_1, x_2, \dots$ értékeket. Vezessük be a $C(j,k) = \{\omega\colon\ \xi_1(\omega) = x_j, \xi_2(\omega) = x_k\}$, $j,k = 1,2,\dots$, eseményeket. A Segédtételt alkalmazva a $B(k) = \{\omega\colon\ \xi_1(\omega) = x_k)$ és az előbb bevezetett $C(j,k)$ halmazokkal kapjuk, hogy

$$E\xi_1 = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} x_j P(C(j,k)).$$

Hasonlóan a Segédtétel alkalmazása a $\tilde{B}(k) = \{\omega\colon\ \xi_2(\omega) = x_k)$ és a $C(j,k)$ halmazokkal azt adja, hogy

$$E\xi_2 = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} x_k P(C(j,k)),$$

E két azonosságot összeadva, kapjuk, hogy

$$E\xi_1 + E\xi_2 = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} (x_j + x_k) P(C(j,k)).$$

Másrészt, ismét a Segédtétel alapján (a $B(j,k) = \{\omega\colon\ \xi_1(\omega) + \xi_2(\omega) = x_j + x_k)\}$ és $C(j,k)$ halmazokkal) érvényes az

$$E(\xi_1+\xi_2) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} (x_j + x_k) P(C(j,k))$$

reláció is. Ezekből az összefüggésekből következik az $E\xi_1 + E\xi_2 = E(\xi_1 + \xi_2)$ azonosság.

Egy ξ valószínűségi változó valamilyen $g(\xi)$ függvényének $Eg(\xi)$ várható értékét kiszámolhatnánk a várható érték eredeti definiciójának a felhasználásával úgy, hogy először kiszámoljuk a $g(\xi)$ valószínűségi változó eloszlását. De sokszor egyszerűbb a várható érték kiszámolását az alábbi egyszerű tétel segítségével végezni.

Tétel diszkrét eloszlású valószínűségi változó függvényének a várható értékéről. *Legyen ξ diszkrét eloszlású valószínűségi változó, amely bizonyos $x_1, x_2, \dots$ értéket vesz fel, és legyen $g(x)$ az $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ halmazon definiált valós értékű függvény. Ekkor*

$$Eg(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} g(x_j) P(\xi = x_j),$$

feltéve, hogy a $\sum\limits_{j=1}^{\infty} g(x_j) P(\xi = x_j)$ összeg abszolut konvergens.

Bizonyítás: Vezessük be a $C_j = \{\omega\colon\ \xi(\omega) = x_j\}$ halmazokat és $y_j = g(x_j)$ számokat, $j = 1, 2, \dots$. Ekkor alkalmazva a Segédtételt a $B_k = \{\omega\colon\ g(\xi(\omega)) = x_k\}$ és a fenti C_j halmazokkal az $\eta = g(\xi)$ valószínűségi változóra megkapjuk a Tétel állítását.

A következő eredmény független valószínűségi változók szorzatának a várható értékéről szól.

Tétel független valószínűségi változók szorzatáról. *Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ független, diszkrét eloszlású valószínűségi változók, amelyek mindegyikére létezik az $E\xi_j$, $1 \le j \le n$ várható érték. Ekkor az $E\xi_1\xi_2\cdots\xi_n$ várható érték is létezik, és*

$$E\xi_1\xi_2\cdots\xi_n = E\xi_1 E\xi_2 \cdots E\xi_n.$$

Megjegyés: A fent megfogalmazott eredmény rendkívül fontos tulajdonsága a *független* valószínűségi változóknak.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók $x_1, x_2, \dots,$ értékeket vesznek fel. Ekkor

$$\begin{aligned}
E\xi_1 \cdots E\xi_n &= \sum_{j_1=1}^{\infty} x_{j_1} P(\xi_1 = x_{j_1}) \cdots \sum_{j_n=1}^{\infty} x_{j_n} P(\xi_n = x_{j_n}) \\
&= \sum_{j_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{j_n=1}^{\infty} x_{j_1} \cdots x_{j_n} P(\xi_1 = x_{j_1}) \cdots P(\xi_n = x_{j_n}) \\
&= \sum_{j_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{j_n=1}^{\infty} x_{j_1} \cdots x_{j_n} P(\xi_1 = x_{j_1}, \cdots, \xi_n = x_{j_n}),
\end{aligned}$$

a ξ_j, $1 \le j \le n$ valószínűségi változók függetlensége miatt, valamint azért mert a fenti sorok mindegyike abszolut konvergens. (Ugyanis abszolut konvergens sorok szorzata is abszolut konvergens.) Viszont a Segédtétel alapján a fenti azonosság jobboldalán szereplő kifejezés $E\xi_1\xi_2\cdots\xi_n$, ezért

$$E\xi_1\xi_2\cdots\xi_n = E\xi_1 E\xi_2\cdots E\xi_n.$$

A fenti eredmények alkalmazásaként megoldjuk a következő feladatot.

Feladat:

1.) Egy szabályos dobókockát feldobunk tízszer. Számoljuk ki a dobásösszeg harmadik hatványának a várható értékét.

Megoldás: Vezessük be a következő valószínűségi változókat: $\xi_j(\omega) = k$, ha a j-ik dobás eredménye k, $1 \le j \le 10$, $1 \le k \le 6$. Ekkor az $E\left(\sum\limits_{j=1}^{10}\xi_j(\omega)\right)^3$ várható értéket kell kiszámítanunk. Ennek érdekében tekintsük a $\left(\sum\limits_{j=1}^{10}\xi_j(\omega)\right)^3$ kifejezést és értsük meg milyen tagokat kapunk, ha elvégezzük a beszorzásokat. Egyrészt megjelenik 10 darab ξ_j^3 alakú kifejezés, és $E\xi_j^3 = E\xi_1^3$ minden ilyen tagra. Ezenkívül megjelenik $3\cdot 10\cdot 9$ darab $\xi_j^2\xi_k$, $j \ne k$, alakú kifejezés, mert a lehetséges (j,k) párokat $10\cdot 9$ módon választhatjuk ki, és a k (a négyzetre nem emelt tényező) három helyen szerepelhet a szorzatban. (Tehát például a $\xi_1\xi_2^2$ alakú tagnak 3 lesz az együtthatója a szorzatban.) Továbbá minden ilyen tagra $E\xi_j^2\xi_k = E\xi_j^2 E\xi_k = E\xi_1^2 E\xi_1$. Továbbá, hasonló meggondolások alapján láthatjk, hogy $10\cdot 9\cdot 8$ módon jelenhet meg $\xi_j\xi_k\xi_l$ alakú tag, ahol a j, k és l indexek mind különbözőek, és ezekre $E\xi_j\xi_k\xi_l = (E\xi_1)^3$. Valóban, a $\xi_j\xi_k\xi_l$ alakú alakú tagok összeszámlálásánál vegyük észre, hogy $1 \le j < k < l \le 10$ alakú számhármasokat $\binom{10}{3}$ féleképp választhatunk, a ξ_j tényező a szorzatban 3-féleképp jelenhet meg, a szorzat első, második vagy harmadik tagjában, a ξ_k tényező ezután 2-féleképp, a ξ_l tényező pedig egyféleképp választható. Másfajta tag nem jelenikmeg a szorzatban. Innen a várható érték additívitását kihasználva azt kapjuk, hogy $E\left(\sum\limits_{j=1}^{10}\xi_j(\omega)\right)^3 =$ $10E\xi_1^3 + 270E\xi_1 E(\xi_1^2) + 720\,(E\xi_1)^3 = 735 + 14332.5 + 30870 = 45937.5$, mert $E\xi_1 = 3.5$, $E\xi_1^2 = \frac{91}{6}$ és $E\xi_1^3 = 73.5$.

A szórásnégyzet fogalma.

Az (egyelőre csak diszkrét eloszlású valószínűségi változók esetében definiált) várható érték azt méri, hogy valószínűségi változók körülbelül mekkora értéket vesznek fel. Mérni akarjuk azt is, hogy mekkora a valószínűségi változó ingadozása a várható értéke körül. Ennek érdekében vezették be a szórásnégyzet (angolul variance) fogalmát. Ismertetem ennek definicióját.

A szórásnégyzet definiciója: *Legyen ξ olyan valószínűségi változó, amelyre $E\xi^2 < \infty$. Ekkor a ξ valószínűségi változó szórásnégyzetét a*

$$\operatorname{Var}\xi = E\left(\xi - E\xi\right)^2$$

képlet definiálja. Ha $E\xi^2 = \infty$ akkor a $\operatorname{Var}\xi$ szórásnégyzetet nem definiáljuk vagy azt mondjuk, hogy $\operatorname{Var}\xi = \infty$.

Lemma a szórásnégyzet kiszámolásáról.

$$\operatorname{Var}\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2.$$

Továbbá, $(E\xi)^2 \le E\xi^2$.

Bizonyítás:

$$\begin{aligned}0 \le \operatorname{Var}\xi = E\left(\xi - E\xi\right)^2 &= E\left(\xi^2 - 2\xi E\xi + (E\xi)^2\right)\\ &= E\xi^2 - 2E\xi E\xi + (E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2\end{aligned}$$

a várható érték tulajdonságai miatt. Összehasonlítva a bal és jobboldalt kapjuk a megfogalmazott egyenlőtlenséget.

1. megjegyzés. Ha precízek vagyunk, akkor felmerülhet a kérdés, hogy teljesen kifogástalan-e a fenti bizonyítás. Az okozhat problémát, hogy egy valószínűségi változó várható értéket csak akkor definiáltuk ha a definiáló összeg abszolut konvergens. Ezt viszont csak az $E\xi^2$ kifejezést definiáló összegről tettük fel. Ugyanakkor az $E\xi$ várható értékkel is szabadon számoltunk. Nem okoz-e ez gondot?

Az, hogy a fenti számolás jogos, például a következő módon látható. Vegyen fel a ξ valószínűségi változó $x_1, x_2, \dots$ értékeket, és definiáljuk a ξ valószínűségi változó ξ_n közelítéseit, $n = 1, 2, \dots$, a következő módon: $\xi_n(\omega) = \xi(\omega)$, ha $\xi(\omega) = x_k$, $1 \le k \le n$, $\xi_n(\omega) = 0$, ha $\xi(\omega) = x_k$, és $k > n$. Ekkor a $\xi_n(\omega)$ illetve ennek abszolut értékével a $|\xi_n(\omega)|$ valószínűségi változókkal szabadon végrehajthatjuk a fenti számolásokat. Innen következik, hogy $\left(E|\xi_n(\omega)|\right)^2 \le E\xi_n^2(\omega) \le E\xi^2(\omega)$. Innen viszont $n \to \infty$ határátmenettel kapjuk, hogy $(E|\xi|)^2 = \lim\limits_{n\to\infty} \left(E|\xi_n(\omega)|\right)^2 \le E\xi^2(\omega)$. Ez azt jelenti, hogy az $E\xi$ várható értéket meghatározó összeg is abszolut konvergens, és a fenti számolásokat elvégezhetjük.

2. megjegyzés. A szórásnégyzet egy viszonylag egyszerű mérőszáma a valószínűségi változó ingadozásának annak várható értékétől. Az, hogy valóban ez az ingadozás legjobb mérőszáma később ismertetendő eredményekből következik.

Feladat:

2.) Minden m valós számra

$$E(\xi - m)^2 = E(\xi - E\xi)^2 + ((E\xi) - m)^2 .$$

Következésképpen

$$\operatorname{Var} \xi = \inf_{-\infty < m < \infty} E\left[(\xi - m)^2\right] .$$

Megoldás:

$$\begin{aligned} E(\xi - m)^2 &= E\left[(\xi - E\xi) + (E\xi - m)\right]^2 \\ &= E(\xi - E\xi)^2 - 2E(\xi - m)E(\xi - E\xi) + (E(\xi - m))^2 \\ &= E(\xi - E\xi)^2 + ((E\xi) - m)^2 , \end{aligned}$$

mert $2E(\xi - m)E(\xi - E\xi) = 2E(\xi - m)(E\xi - E\xi) = 0$. Ebből az azonosságból adódik, hogy $E(\xi - m)^2 \ge E(\xi - E\xi)^2$ minden m valós számra. Viszont $m = E\xi$ esetén az egyenlőtlenség két oldala megegyezik.

Lemma. Minden a és b valós számra

$$\operatorname{Var}(a\xi + b) = a^2 \operatorname{Var} \xi.$$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}(a\xi + b) &= E\left[(a\xi + b) - E(a\xi + b)\right]^2 = E\left[(a\xi + b) - aE\xi - b\right]^2 \\ &= E\left[a^2(\xi - E\xi)^2\right] = a^2 E(\xi - E\xi)^2 = a^2 \operatorname{Var} \xi. \end{aligned}$$

A következő eredmény rendkívül hasznos összefüggést ad, ha független valószínűségi változók összegének szórásnégyzetét akarjuk kiszámítani. Hangsúlyozom, hogy ebben az eredményben fontos a tekintett valószínűségi változók függetlensége. Később megfogalmazom ennek az eredménynek egy olyan általánosítását, amely akkor is érvényes, ha az összeadandók nem feltétlenül függetlenek. Látni fogunk olyan példákat is, amelyek megoldásában ezt az általánosabb eredményt érdemes alkalmazni.

Tétel. Ha $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ *független valószínűségi változók, akkor*

$$\operatorname{Var}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = \operatorname{Var} \xi_1 + \operatorname{Var} \xi_2 + \dots + \operatorname{Var} \xi_n.$$

Következmény. Ha $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *független valószínűségi változók,* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *valós számok, akkor*

$$\mathrm{Var}\,(c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_n\xi_n) = c_1^2 \mathrm{Var}\,\xi_1 + c_2^2 \mathrm{Var}\,\xi_2 + \cdots + c_n^2 \mathrm{Var}\,\xi_n.$$

A Tétel bizonyítása. Vezessük be a $\bar{\xi}_j = \xi_j - E\xi_j$ valószínűségi változókat. Ekkor

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\,(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n) &= E(\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 + \cdots + \bar{\xi}_n)^2 \\ &= E\left(\bar{\xi}_1^2 + \bar{\xi}_2^2 + \cdots + \bar{\xi}_n^2 + 2\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} \bar{\xi}_j \bar{\xi}_k\right) \\ &= E\bar{\xi}_1^2 + E\bar{\xi}_2^2 + \cdots + E\bar{\xi}_n^2 + 2\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} E\bar{\xi}_j \bar{\xi}_k \\ &= E\bar{\xi}_1^2 + E\bar{\xi}_2^2 + \cdots + E\bar{\xi}_n^2 = \mathrm{Var}\,\xi_1 + \mathrm{Var}\,\xi_2 + \cdots + \mathrm{Var}\,\xi_n,\end{aligned}$$

mert $E\bar{\xi}_j\bar{\xi}_k = E\bar{\xi}_j E\bar{\xi}_k = 0$ minden $1 \le j < k \le n$ számra a ξ_j illetve a $\bar{\xi}_j$, $1 \le j \le n$, valószínűségi változók függetlensége miatt.

Feladat:

3.) Egy szabályos pénzdarabot feldobunk 100-szor egymás után. Számoljuk ki a fejdobások számának a várható értékét és szórásnégyzetét. Számítsuk ki ezt egyrészt direkt módon felírva és kiszámolva a várható értéket és szórásnégyzetet kifejező összegeket, másrészt egyszerűbben az előző tétel segítségével.

Megoldás: A fejdobások száma 0 és 100 között van. Annak valószínűsége, hogy k fejdobás következik be, $0 \le k \le 100$, $p_k = \binom{100}{k} 2^{-100}$. Ezért a dobások számának várható értéke $E\xi = \sum\limits_{k=0}^{100} k\binom{100}{k} 2^{-100}$, ahol ξ jelöli a fejdobások számát megadó valószínűségi változót. Továbbá $E\xi^2 = \sum\limits_{k=0}^{100} k^2\binom{100}{k} 2^{-100}$, a szórásnégyzet pedig $\mathrm{Var}\,\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$. Ezeket az összegeket közvetlenül kiszámíthatjuk. Valóban, $k\binom{100}{k} = 100\binom{99}{k-1}$, $E\xi = \sum\limits_{k=0}^{100} k\binom{100}{k} 2^{-100} = 50 \sum\limits_{k=0}^{99} k\binom{99}{k} 2^{-99} = 50\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^{99} = 50.$ Továbbá, $k^2\binom{100}{k} = [k(k-1)+k]\binom{100}{k} = 100 \cdot 99 \cdot \binom{98}{k-2} + 100 \cdot \binom{100}{99}$, $E\xi^2 = 2^{-100} \cdot 100 \cdot 99 \cdot \sum\limits_{k=0}^{98} \binom{98}{k} + 2^{-100} \cdot 100 \cdot \sum\limits_{k=0}^{99} \binom{99}{k} = 2^{-100}\left(100 \cdot 99 \cdot (1+1)^{98} + 100 \cdot (1+1)^{99}\right) = 25 \cdot 99 + 50$, $\mathrm{Var}\,\xi = E\xi^2 - (E\xi^2) = 25.$

Valójában a vizsgált várható értéket és szórásnégyzetet egyszerűbben is kiszámíthatjuk. Vezessük be a $\xi_j(\omega)$ valószínűségi változókat, $\xi_j(\omega) = 1$, ha a j-ik dobás eredménye fej $\xi_j(\omega) = 0$, ha a j-ik dobás eredménye írás, $1 \le j \le 100$. Ekkor a fejdobások száma $\xi(\omega)=\sum\limits_{j=1}^{100}\xi_j(\omega)$, $E\xi=\sum\limits_{j=1}^{100}E\xi_j$, $\operatorname{Var}\xi=\sum\limits_{j=1}^{100}\operatorname{Var}\xi_j$. Mivel $E\xi_j=\frac{1}{2}$, $E\xi_j^2=\frac{1}{2}$, $\operatorname{Var}\xi_j=\frac{1}{4}$, $1\le j\le 100$, ezért $E\xi=\frac{1}{2}\cdot 100=50$, $\operatorname{Var}\xi=\frac{1}{4}\cdot 100=25$.

4.) Egy szabályos dobókockát feldobunk 100-szor egymás után. Számoljuk ki a dobáseredmények összegének várható értékét és szórásnégyzetét.

Megoldás: Legyenek $\eta_1,\dots,\eta_{100}$ *független* valószínűségi változók, amelyekre $P(\eta_j=k)=\frac{1}{6}$, $1\le j\le 100$, $1\le k\le 6$. Ekkor a kiszámítandó várható érték és szórásnégyzet $E\sum\limits_{j=1}^{100}\eta_j=\sum\limits_{j=1}^{100}E\eta_j$, $\operatorname{Var}\sum\limits_{j=1}^{100}\eta_j=\sum\limits_{j=1}^{100}\operatorname{Var}\eta_j$. (A második reláció felhasználja a tekintett valószínűségi változók függetlenségét.) $E\eta_j=\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=3.5$, $E\eta_j^2=\frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36)=\frac{91}{6}$, $\operatorname{Var}\eta_j=\frac{35}{12}$, $E\xi=350$, $\operatorname{Var}\xi=\frac{3500}{12}$.

5.) Egy szabályos dobókockát feldobunk 100-szor egymás után. Tekintsük a páros értékű dobások eredményeinek az összegét, és számítsuk ki ennek várható értékét és szórásnégyzetét.

Megoldás: Vezessük be a következő ξ_j, $1\le j\le 100$ valószínűségi változókat: $\xi_j=2$, ha a j-ik dobás eredménye 2, $\xi_j=4$, ha a j-ik dobás eredménye 4, $\xi_j=6$, ha a j-ik dobás eredménye 6, és $\xi_j=0$, ha a j-ik dobás eredménye 1, 3 vagy 5. Ekkor a $S=\sum\limits_{j=1}^{100}\xi_j$ valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét akarjuk kiszámolni. $E\xi_j=\frac{1}{6}(2+4+6)=2$, $E\xi_j^2=\frac{1}{6}(2^2+4^2+6^2)=\frac{28}{3}$, $\operatorname{Var}\xi_j=E\xi_j^2-(E\xi_j)^2=\frac{16}{3}$, ahonnan a ξ_j valószínűségi változók függetlensége miatt $ES=100E\xi_1=200$, $\operatorname{Var}S=100\operatorname{Var}\xi_1=\frac{1600}{3}$.

Megfogalmazom az előző tétel egy olyan általánosítását, amely lehetővé teszi, hogy kiszámoljuk nem feltétlenül független valószínűségi változók összegének a szórásnégyzetét. Ennek érdekében először bevezetek egy új fogalmat, két valószínűségi változó kovarianciafüggvényét. Ez azt méri hogy milyen erős a kapcsolat két valószínűségi változó között.

A kovarianciafüggvény definiciója. *Legyen ξ és η két valószínűségi változó, amelyek mindegyikének létezik szórásnégyzete, azaz $E\xi^2<\infty$ és $E\eta^2<\infty$. Ekkor a ξ és η valószínűségi változók kovarianciafüggvényét* $\operatorname{Cov}(\xi,\eta)$*-t a*

$$\operatorname{Cov}(\xi,\eta)=E\left[(\xi-E\xi)(\eta-E\eta)\right]$$

kifejezés definiálja. Ha a $E\xi^2<\infty$ és $E\eta^2<\infty$ feltételek valamelyike nem teljesül, akkor nem definiáljuk a $\operatorname{Cov}(\xi,\eta)$ *kovarianciafüggvényt.*

Megjegyzés: $|(\xi-E\xi)||(\eta-E\eta)|\le\frac{|\xi-E\xi|^2}{2}+\frac{|\eta-E\eta|^2}{2}$, ahonnan $E|(\xi-E\xi)||(\eta-E\eta)|\le\frac{E|\xi-E\xi|^2}{2}+\frac{E|\eta-E\eta|^2}{2}<\infty$. Innen következik, hogy az $E\xi^2<\infty$ és $E\eta^2<\infty$ feltételek teljesülése esetén a $\operatorname{Cov}(\xi,\eta)$-t definiáló várható érték valóban létezik.

Korrelálatlan valószínűségi változók definiciója. *Azt mondjuk, hogy két ξ és η valószínűségi változó korrelálatlan, ha* $\mathrm{Cov}\,(\xi,\eta)=0$.

Lemma.

$$\mathrm{Cov}\,(\xi,\eta)=E\xi\eta-E\xi E\eta.$$

Következmény. *Ha ξ és η két független valószínűségi változó, akkor* $\mathrm{Cov}\,(\xi,\eta)=0$, *azaz e két valószínűségi változó korrelálatlan.*

A lemma bizonyítása.

$$\mathrm{Cov}\,(\xi,\eta)=E[\xi\eta-\eta E\xi-\xi E\eta+E\xi E\eta]=E\xi\eta-E\xi E\eta-E\xi E\eta+E\xi E\eta=E\xi\eta-E\xi E\eta.$$

Most megfogalmazom az alábbi eredményt valószínűségi változók összegének a szórásnégyzetéről:

Tétel. *Ha $\xi_1,\dots,\xi_n$ valószínűségi változók ugyanazon a valószínűségi mezőn, amelyek mindegyikének létezik szórásnégyzete, akkor*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left(\sum_{j=1}^n \xi_j\right)&=\sum_{j=1}^n \mathrm{Var}\,\xi_j+2\sum_{1\le j<k\le n}(E\xi_j\xi_k-E\xi_jE\xi_k)\\
&=\sum_{j=1}^n \mathrm{Var}\,\xi_j+2\sum_{1\le j<k\le n}\mathrm{Cov}\,(\xi_j,\xi_k)\\
&=\sum_{j=1}^n \mathrm{Var}\,\xi_j+\sum_{1\le j,k\le n,\ j\ne k}\mathrm{Cov}\,(\xi_j,\xi_k).
\end{aligned}$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left(\sum_{j=1}^n \xi_j\right)&=E\left(\sum_{j=1}^n \xi_j\right)^2-\left(E\sum_{j=1}^n \xi_j\right)^2=E\left(\sum_{j=1}^m\sum_{k=1}^n \xi_j\xi_k\right)-\left(\sum_{j=1}^m\sum_{k=1}^n E\xi_jE\xi_k\right)\\
&=\left(\sum_{j=1}^m\sum_{k=1}^n E\xi_j\xi_k\right)-\left(\sum_{j=1}^m\sum_{k=1}^n E\xi_jE\xi_k\right)\\
&=\sum_{j=1}^n\left(E\xi_j^2-(E\xi_j)^2\right)+2\sum_{1\le j<k\le n}(E\xi_j\xi_k-E\xi_jE\xi_k).
\end{aligned}$$

és $E\xi_j^2-(E\xi_j)^2=\mathrm{Var}\,\xi_j$, $E\xi_j\xi_k-E\xi_jE\xi_k=\mathrm{Cov}\,(\xi_j,\xi_k)$.

Megmutatom, hogy a fenti eredmény segítségével viszonylag egyszerűen ki tudjuk számolni bizonyos valószínűségi változók összegének a szórásnégyzetét. Erre mutat példát a következő két feladat.

Feladatok:

6.) Legyen egy urnában 20 piros és 30 fehér golyó. Húzzunk ki 20 golyót visszatevés nélkül. Számoljuk ki a kihúzott piros golyók számának várható értékét és szórásnégyzetét.

Megoldás: Vezessük be a következő ξ_j, $1 \le j \le 20$, valószínűségi változókat: $\xi_j(\omega) = 1$, ha a j-ik húzás eredménye piros, $\xi_j(\omega) = 0$, ha a j-ik húzás eredménye fehér. Ekkor a $\xi = \sum\limits_{j=1}^{20} \xi_j$ összeg várható értékét és szórásnégyzetét kell kiszámolnunk. Továbbá $E\xi_j = E\xi_1 = \frac{2}{5}$, $\operatorname{Var}\xi_j = \operatorname{Var}\xi_1 = \frac{2}{5} - \frac{4}{25} = \frac{6}{25}$, $E\xi_j\xi_k - E\xi_j E\xi_k = E\xi_1\xi_2 - E\xi_1 E\xi_2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{19}{49} - \frac{4}{25} = -\frac{6}{1245}$, ha $j \ne k$. Innen a 20 dobásban kihúzott piros golyók számának várható értéke $20 \cdot \frac{2}{5} = 8$ és szórásnégyzete $20 \cdot \frac{6}{25} - 380 \cdot \frac{6}{1245} = \frac{144}{49}$.

7.) Feldobunk egy szabályos pénzérmét 100-szor egymás után. Tekintsük az egymást követő fej-fej dobássorozatok számát, és számítsuk ki ennek várható értékét és szórásnégyzetét.

Megoldás: Vezessük be a következő ξ_j, $1 \le j \le 99$, valószínűségi változókat: $\xi_j = 1$, ha a j-ik és $j+1$-ik dobások mindegyikének eredménye fej, $\xi_j = 0$ egyébként. Vegyük észre, hogy minket az $S = \sum\limits_{j=1}^{99} \xi_j$ valószínűségi változó várható értéke érdekel. Ezért $ES = E\left(\sum\limits_{j=1}^{99} E\xi_j\right) = \frac{99}{4}$, mivel $E\xi_j = \frac{1}{4}$. (Érdemes megjegyezni, hogy az ebben a feladatban tekintett ξ_j valószínűségi változók nem függetlenek, de a függetlenségre nincs szükség a várható érték additivításához.)

A szórásnégyzet kiszámításában viszont figyelembe kell vennünk azt, hogy nem csupa független valószínűségi változó összegét vizsgáljuk. Használjuk a szórásnégyzet kiszámolásánál a következő formulát.

$$\operatorname{Var} S = \operatorname{Var}\left(\sum_{j=1}^{99} \xi_j\right) = \sum_{j=1}^{99} \operatorname{Var}\xi_j + 2 \sum_{1 \le j < k \le 99} \operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k).$$

Továbbá $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k) = 0$, ha $k \ge j+2$, mert ebben az esetben ξ_j és ξ_k függetlenek, és $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_{j+1}) = \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$ minden $1 \le j \le 98$ számra. Ugyanis $E\xi_j\xi_{j+1} = \frac{1}{8}$, mivel $\xi_j\xi_{j+1} = 1$, ha a j-ik, $j+1$-ik és $j+2$-ik dobások mindegyike fej, aminek valószínűsége $\frac{1}{8}$, és $\xi_j\xi_{j+1} = 0$ egyébként. Továbbá $E\xi_j E\xi_{j+1} = \frac{1}{16}$. Ezenkívül $\operatorname{Var}\xi_j = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$. Innen $\operatorname{Var} S = 99 \cdot \frac{3}{16} + 2 \cdot \frac{98}{16} = \frac{493}{16}$.

Független valószínűségi változók. A konvolució és generátorfüggvény.

A következő előadásban a legfontosabb diszkrét eloszlásokról és azok tulajdonságairól fogok beszélni. Ki fogom számolni ezen valószínűségi változók várható értékét és szórásnégyzetét, és adott eloszlású független valószínűségi változók összegének az eloszlását. A kérdések egyszerűbb tárgyalása érdekében bevezetek néhány fogalmat, és felidézek néhány eredményt az analízisből. Először eloszlások konvolucióját majd generátorfüggvényét definiálom, és tárgyalom azt, hogy ezek a fogalmak milyen kapcsolatban vannak a minket érdeklő problémákkal.

Az első vizsgálandó kérdés az, hogy hogyan lehet kiszámolni független, diszkrét eloszlású valószínűségi változók összegének az eloszlását. Ennek kapcsán bevezetem diszkrét eloszlású valószínűségi változók eloszlásainak a konvolucióját, és teszek néhány megjegyzést.

Legyen ξ és η két független, diszkrét eloszlású valószínűségi változó, amelyek valamilyen $x_1, x_2, \dots$ értékeket vesznek fel. Ekkor ezek összege, a $\xi+\eta$ valószínűségi változó szintén diszkrét, és eloszlását ki tudjuk számolni a következő módon:

$$P(\xi+\eta=x) = \sum_{(x_j,x_k)\colon\, x_j+x_k=x} P(\xi=x_j, \eta=x_k) = \sum_{(x_j,x_k)\colon\, x_j+x_k=x} P(\xi=x_j)P(\eta=x_k)$$

Ez a képlet egyszerűsödik abban a fontos speciális esetben, ha a független ξ és η valószínűségi változók csak egész értékeket vesznek fel, és még egyszerűbb akkor, ha csak nem negatív egész értékeket vesznek fel. Azt az eredményt, amelyet ebben a speciális esetben kapunk, megfogalmazom tétel formájában is.

Tétel. *Legyen ξ és η két független, egész értékeket felvevő valószínűségi változó. Ekkor a $\xi+\eta$ valószínűségi változó is csak egész értékeket vesz fel, és*

$$P(\xi+\eta=n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(\xi=k)P(\eta=n-k), \qquad n=0,\pm1,\pm2,\dots.$$

Ez a formula tovább egyszerűsödik, ha a független ξ és η valószínűségi változók csak nem negatív egész értékeket vesznek fel. Ekkor

$$P(\xi+\eta=n) = \sum_{k=0}^{n} P(\xi=k)P(\eta=n-k), \qquad \textit{ha } n\ge 0,$$

és

$$P(\xi+\eta=n) = 0, \qquad \textit{ha } n<0.$$

Bizonyítás: A tétel első képlete azonnal adódik a tétel előtt tárgyalt általános esetből abban az esetben, ha a valószínűségi változók $x_1, x_2, \dots$ értékei egész számok. A második képlet az első képlet következménye, ha észrevesszük, hogy elég csak azon $(k, n-k)$

párokra összegezni, amelyekre $P(\xi = k)P(\eta = n-k) \neq 0$. Ez azt jelenti, hogy abban az esetben, ha ξ és η nem negatív egész értékeket vesznek fel, akkor az összegezésből kihagyhatjuk azokat a tagokat, amelyekre $k < 0$ vagy $n - k < 0$, azaz $k > n$.

A fenti eredmény miatt érdemes bevezetni a következő definiciót.

Diszkrét, egész értékű eloszlások konvoluciójának a definiciója. *Legyen*

$$\mathcal{P} = \{p_k\colon\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \quad \text{és} \quad \mathcal{Q} = \{q_k\colon\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

két az egész számokon értelmezett diszkrét eloszás, azaz tegyük fel, hogy $p_k \geq 0$*,* $q_k \geq 0$*,* $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$*,* $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} p_k = 1$ *és* $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} q_k = 1$*. Ekkor a* $\mathcal{P}$ *és* $\mathcal{Q}$ *eloszlások konvoluciója, az a* $\mathcal{R} = \mathcal{P} * \mathcal{Q} = \{r_n\colon\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ *eloszlás, amelyre*

$$r_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k q_{n-k}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots.$$

Abban a speciális esetben, ha $p_k = 0$ *és* $q_k = 0$ *minden* $k < 0$ *számra, az* $r_n = 0$ *azonosság érvényes minden* $n < 0$ *indexre, és*

$$r_n = \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

A generátor függvények fogalma.

Érdemes a következő észrevételt tenni. Legyen $f(x)$ és $g(x)$ két függvény, amelyek hatványsorba fejthetőek, azaz,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k,$$

ha $-A < x < A$ valamilyen $A > 0$ számmal. Ekkor az $f(x)g(x)$ szorzat is sorba fejthető, azaz

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

(ugyanabban a $-A < x < A$ intervallumban), és

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Vegyük észre, hogy a fenti hatványsorokban szereplő a_k, b_k és c_n együtthatók között hasonló reláció érvényes mint ami a nem negatív egész értéket felvevő eloszlások konvoluciójának a definiciójában szerepelt. Ezenkívül érdemes ismerni a következő analízisben bizonyított eredményeket.

a.) Ha az $f(x)$ függvény hatványsorba fejthető, azaz $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ valamilyen $-A < x < A$ intervallumon, $A > 0$, akkor az $f(x)$ függvény értékei a $-A < x < A$ intervallumon meghatározzák az a_n együtthatókat. (Sőt, azok explicit módon kiszámíthatóak az $n!a_n = \frac{d^n f(x)}{dx^n}\Big|_{x=0}$ képlet segítségével.)

b.) Ha $f_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, függvényeknek egy olyan sorozata, amelyek mindegyike előállítható $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{k,n} x^k$ hatványsor alakban valamilyen $-A < x < A$, $A > 0$ intervallumon, ahol az $A > 0$ szám nem függ az n indextől, továbbá létezik az $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ határérték minden $-A < x < A$ számra, akkor az $f(x)$ határfüggvény is hatványsorba fejthető $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ alakban a $-A < x < A$ intervallumon. Továbbá $a_k = \lim\limits_{n\to\infty} a_{k,n}$ minden $k = 0, 1, 2, \dots$ együtthatóra.

Később látni fogjuk, hogy a hatványsorok fent említett tulajdonságai jól használhatóak bizonyos valószínűségi vizsgálatokban. Ugyanis egy nem-negatív egész értékékeket felvevő ξ valószínűségi változó $p_k = P(\xi = k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, eloszlásához hozzárendelhetjük az $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k x_k$ függvényt, amelyet ezen eloszlás generátorfüggvényének neveznek. Megfogalmazom e fogalom definicióját pontosabban is.

Diszkrét, nem negatív egész értékű eloszlás generátorfüggvényének a definiciója: *Legyen adva egy $\mathcal{P} = \{p_0, p_1, p_2, \dots\}$ eloszlás a nem-negatív egész számokon, azaz olyan számsorozat, amelyenk tagjaira $p_k \ge 0$ minden $0 \le k \le \infty$ számra, és $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k = 1$. (Az elnevezés oka az, hogy létezik olyan ξ nem-negatív egész értékű valószínűségi változó, amelyre $P(\xi = k) = p_k$ minden $k = 0, 1, 2, \dots$ számra.) Ennek az eloszlásnak a generátorfüggvénye az*

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k$$

függvény.

A fent mondottak alapján nemcsak az igaz, hogy egy $\mathcal{P}$ eloszlás meghatározza $F(x)$ generátorfüggvényét, hanem megfordítva az $F(x)$ generátorfüggvény segítségével ki lehet számolni azt az eloszlást, amelynek ez a generátorfüggvénye, mivel

$$k!p_k = \frac{dF^k(x)}{dx^k}\Big|_{x=0}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots.$$

Egy eloszlás generátorfüggvénye mindig konvergens a $-1 \le x \le 1$ intervallumban. Ha egy $\mathcal{P}$ eloszlás generátorfüggvénye $F(x)$ egy $\mathcal{Q}$ eloszlás generátorfüggvénye $G(x)$, akkor $\mathcal{P} * \mathcal{Q}$ konvoluciójuk generátorfüggvénye az $F(x)G(x)$ függvény. Továbbá, eloszlások generátorfüggvényeinek konvergenciájából maguknak az eloszlásoknak a konvergenciájára is következtetni tudunk. Részletesebben kifejtve a következőről van szó.

Legyen adva minden $n = 1, 2, \ldots$ számra egy $p_{n,k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, eloszlás a nem negatív egész számokon, azaz teljesüljenek a $p_{n,k} \ge 0$ és $\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k} = 1$ tulajdonságok. Feleltessük meg ezeknek az eloszlásoknak az $F_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k} x^k$ generátorfüggvényeket (hatványsorokat). Ha az $F_n(x)$ generátorfüggvények pontonként konvergálnak egy $F(x)$ függvényhez valamely $-A \le x \le A$, $0 < A \le 1$ intervallumban, akkor ez az $F(x)$ függvény felírható $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k$, $-1 < x < 1$, hatványsor alakban, és $\lim_{n\to\infty} p_{n,k} = p_k$ minden $k = 0, 1, 2, \ldots$ számra.

A fenti eredmény hasznos módszert biztosít annak ellenőrzésére, hogy bizonyos eloszlások konvergálnak-e. Megjegyzem, hogy a megfogalmazott eredményben nem állítottam, hogy a p_k határértékek teljesítik a $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ azonosságot, azaz valószínűségi eloszlást határoznak meg. A legtöbb konkrét feladatban ez a tulajdonság teljesül, de azt külön ellenőrizni kell. Az eredmény bizonyítását, amelyben érdemes felhasználni bizonyos komplex függvénytani eredményeket elhagyom.

A fent megfogalmazott eredmények lehetővé teszik, hogy bizonyos valószínűségi vizsgálatokat viszonylag egyszerűen végrehajthassunk a generátorfüggvények segítségével.

További feladatok a várható érték és szórásnégyzet kiszámolásáról

1.) Egy urnában 10 piros és 20 fehér golyó van. Kihúzunk visszatevés nélkül 10 golyót. A páros sorszámú húzások esetén fehér golyó húzás esetén nyerünk 3 forintot, piros golyó húzás esetén pedig nem nyerünk és nem veszítünk semmit. A páratlan sorszámú húzások esetén piros húzás esetén 2 forintot nyerünk, fehér golyó húzás esetén nem nyerünk és nem veszítünk semmit. Számoljuk ki a nyereményünk várható értékét és szórásnégyzetét.

Megoldás: Vezessük be a következő ξ_j, $1 \le j \le 10$, valószínűségi változókat: Páros j számokra $\xi_j = 3$, ha a j-ik húzás eredménye piros, $\xi_j = 0$, ha a j-ik húzás eredménye fehér golyó. Páratlan j számokra $\xi_j = 2$, ha a j-ik húzás eredménye piros, $\xi_j = 0$, ha a j-ik húzás eredménye fehér golyó. Ekkor az $S = \sum_{j=1}^{10} \xi_j$ összeg várható értékét és szórásnégyzetét kell kiszámolnunk. Ennek érdekében számoljuk ki az $E\xi_j$ várható értékeket, $\operatorname{Var} \xi_j$ szórásnégyzeteket és $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k)$ kovarianciákat. Annak valószínűsége, hogy a j-ik húzás eredménye piros $\frac{1}{3}$, annak valószínűsége, hogy j-ik húzás eredménye fehér $\frac{2}{3}$. Ezért $E\xi_j = 2$, ha j páros, $E\xi_j = \frac{2}{3}$, ha j páratlan, és $ES = 5\left(2 + \frac{2}{3}\right) = 13\frac{1}{3}$.

A szórásnégyzet kiszámítása érdekében vegyük észre, hogy $E\xi_j^2 = 6$, $\operatorname{Var} \xi_j = 2$, ha j páros, és $E\xi_j^2 = \frac{4}{3}$, $\operatorname{Var} \xi_j = \frac{8}{9}$. Továbbá annak valószínűsége, hogy két j és k indexre $j \ne k$, a j-ik és k-ik húzás mindegyike fehér $\frac{2\cdot 19}{3\cdot 29} = \frac{38}{87}$, annak, hogy mindkét húzás piros $\frac{9}{3\cdot 29} = \frac{3}{29}$, annak, hogy az egyik húzás fehér, a másik húzás piros $\frac{2\cdot 10}{3\cdot 29}=\frac{20}{57}$. Ezért $E\xi_j\xi_k = 9\cdot\frac{2\cdot 19}{3\cdot 29}=\frac{114}{29}$, $\mathrm{Cov}\,(\xi_j,\xi_k)=\frac{114}{29}-4=-\frac{2}{29}$, ha j és k páros, $E\xi_j\xi_k=4\cdot\frac{3}{29}=\frac{12}{29}$, $\mathrm{Cov}\,(\xi_j,\xi_k)=\frac{12}{29}-\frac{4}{9}=-\frac{8}{263}$, ha j és k páratlan, $E\xi_j\xi_k=6\cdot\frac{20}{57}=\frac{40}{29}$, $\mathrm{Cov}\,(\xi_j,\xi_k)=\frac{40}{29}-\frac{4}{3}=\frac{4}{87}$, ha j és k közül az egyik páros, a másik páratlan. Olyan (j,k) pár, $1\le j,k\le 10$, $j\ne k$, melyre j és k mindegyike páros vagy mindegyike páratlan, összesen 20 van, és olyan (j,k) pár, amelyekre az egyik páros, a másik páratlan $2\cdot 5\cdot 5=50$ van, ezért

$$\sum_{1\le j,k\le 10,\, j\ne k}\mathrm{Cov}\,(\xi_j,\xi_k)=20\left(-\frac{2}{29}-\frac{8}{263}\right)+50\cdot\frac{4}{87}=\frac{80}{263}.$$

Innen

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\,S&=\sum_{j=1}^{10}\mathrm{Var}\,\xi_j+\sum_{1\le j,k\le 10,\, j\ne k}\mathrm{Cov}\,(\xi_j,\xi_k)\\&=5\left(2+\frac{8}{9}\right)+\frac{80}{263}=\frac{130}{9}+\frac{80}{263}=\frac{3850}{263}.\end{aligned}$$

2.) Tekintsük a 4. előadás elején tekintett következő példát: Egy estélyen megjelenik n házaspár. Egy táncmester, aki nem tudja, hogy kik házastársak és kik nem, véletlen módon párba rendezi a férfiakat és nőket a tánc előtt. Számoljuk ki az egymással táncoló házaspárok számának a várható értékét és szórásnégyzetét. Mi ezek határértéke, ha $n\to\infty$?

Megoldás: Vezessük be a következő ξ_j, $1\le j\le n$, valószínűségi változókat: $\xi_j=1$, ha a j-ik házaspár együtt táncol, és $\xi_j=0$, ha nem táncolnak együtt. Ekkor minket az $S_n=\sum\limits_{j=1}^{n}\xi_j$ valószínűségi változó várható értéke és szórásnégyzete érdekel. Ennek kiszámítása érdekében vegyük észre, hogy $P(\xi_j=1)=1-P(\xi_j=0)=\frac{1}{n}$ minden $1\le j\le n$ indexre, és $P(\xi_j=1,\xi_k=1)=\frac{1}{n(n-1)}$ minden $1\le j,k\le n$, $j\ne k$ indexre. Innen $E\xi_j=E\xi_j^2=\frac{1}{n}$, $1\le j\le n$, $E\xi_j\xi_k=\frac{1}{n(n-1)}$, ha $j\ne k$, $\mathrm{Var}\,\xi_j=\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}$, és $\mathrm{Cov}\,(\xi_j,\xi_k)=E\xi_j\xi_k-E\xi_jE\xi_k=\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n^2(n-1)}$, ha $j\ne k$. Ezért $ES_n=\sum\limits_{j=1}^{n}E\xi_j=1$, $\mathrm{Var}\,S_n=\sum_{j=1}^n\mathrm{Var}\,\xi_j+2\sum\limits_{1\le j<k\le n}\mathrm{Cov}\,(\xi_j,\xi_k)=n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)+n(n-1)\frac{1}{n^2(n-1)}=1$. Ezért mind a várható érték mind a szórásnégyzet határértéke 1, ha $n\to\infty$.

3.) Feldobunk egy dobókockát, majd ezután egy szabályos pénzdarabot annyi alkalommal, amennyi a kockadobás eredménye volt. (Az egyes dobások eredményei függetlenek egymástól.) Számoljuk ki a fejdobások számának várható értékét és szórásnégyzetét.

Megoldás: Vezessük be a következő $\xi_{j,k}$, $1\le j\le 6$, $1\le k\le j$, valószínűségi változókat:

$$\xi_{j,k}(\omega)=\begin{cases}1 & \text{ha a kockadobás eredménye } j \text{ és a } k\text{-ik pénzdobásé fej}\\ 0 & \text{ha a kockadobás eredménye } j \text{ és a } k\text{-ik pénzdobásé írás}\\ 0 & \text{ha a kockadobás eredménye nem } j\end{cases}$$

Ekkor minket az $S=\sum\limits_{j=1}^{6}\sum\limits_{k=1}^{j}\xi_{j,k}$ valószínűségi változó várható értéke és szórásnégyzete érdekel. Vegyük észre, hogy

$$E\xi_{j,k}=P(\text{a kockadobás eredménye } j, \text{ a } k\text{-ik pénzdobásé fej})=\frac{1}{12},$$

$E\xi_{j,k}^2=\frac{1}{12}$, $\operatorname{Var}\xi_{j,k}^2=\frac{11}{144}$, $E\xi_{j,k}\xi_{j,k'}=\frac{1}{24}$, ha $k\neq k'$, ahonnan $\operatorname{Cov}(\xi_{j,k},\xi_{j,k'})=\frac{5}{144}$ ebben az esetben. Továbbá $E\xi_{j,k}\xi_{j',k'}=0$, $\operatorname{Cov}(\xi_{j,k},\xi_{j',k'})=-\frac{1}{144}$, ha $j\neq j'$ (függetlenül a k és k' számok viszonyától. Innen, $ES=\sum\limits_{j=1}^{6}\sum\limits_{k=1}^{j}E\xi_{j,k}=\frac{1+\cdots+6}{12}=\frac{21}{12}=\frac{7}{4}$, és

$$\operatorname{Var}S=\sum_{j=1}^{6}\sum_{k=1}^{j}\operatorname{Var}\xi_{j,k}+\sum_{(j,k),(j',k')\colon\, j\neq j' \text{ vagy } k\neq k'}\operatorname{Cov}(\xi_{j,k},\xi_{j',k'}),$$

ahonnan $\operatorname{Var}S=\frac{11}{144}(1+\cdots+6)-\frac{1\cdot(21-1)+2\cdot(21-2)+\cdots6\cdot(21-6)}{144}+\frac{5}{144}(2\cdot1+3\cdot2+\cdots6\cdot5)$. Ezt a képletet úgy kapjuk, hogy külön számoljuk azon $\operatorname{Cov}(\xi_{j,k},\xi_{j',k'})$ mennyiségek hozadékát amelyekre $j\neq j'$ és azután azokét, amelyekre $j=j'$, de $k\neq k'$. Innen $\operatorname{Var}S=\frac{231-350+350}{144}=\frac{77}{48}$.