A Valószínűségszámítás I. előadássorozat hatodik előadása.
2007. március 13.

Néhány fontos diszkrét eloszlás.

Tárgyalom a legfontosabb diszkrét eloszlások definicióját. Először olyan példákat ismertetek, amelyekben ilyen eloszlások megjelennek. Több olyan példát is tárgyalok, amelyekel bizonyos feladatokban már korábban is találkoztunk. Az első példa a következő.

a.) *Binomiális eloszlás.*

Tekintsünk először egy tipikus példát, amelyben a binomiális eloszlás megjelenik.

Dobjunk fel egy pénzdarabot n alkalommal egymástól függetlenül, és minden egyes dobásban legyen p, $0 \le p \le 1$, a fejdobás valószínűsége. Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan k fejdobás következik be?

Ennek valószínűsége $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Valóban, $\binom{n}{k}$ olyan fej-írás sorozat létezik, amely k fej és $n-k$ írás-jelet tartalmaz, és az adott feltételek mellett minden egyes ilyen dobássorozatnak a valószínűsége $p^k(1-p)^{n-k}$. Az ilyen jellegű feladatok leírására vezették be a binomiális eloszlás fogalmát.

Binomiális eloszlás definiciója. *Azt mondjuk, hogy a ξ valószínűségi változó binomiális eloszlású n és p paraméterrel, $n = 1, 2, \dots$, $0 \le p \le 1$, ha $P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ minden $0 \le k \le n$ számra, és $P(\xi = k) = 0$ egyébként. Ezt az eloszlást szokás $B(n,p)$-vel jelölni.*

Egy $B(1,p)$ eloszlású ξ valószínűségi változót, azaz egy olyan ξ valószínűségi változót, amelyre $P(\xi = 0) = 1-p$, $P(\xi = 1) = p$ Bernoulli eloszlásúnak is szoktak nevezni.

Jegyezzük meg, hogy valóban eloszlást, definiáltunk, azaz a nem-negatív valószínűségek összege egy, mert a binomiális tétel szerint

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1.$$

Jegyezzük meg, hogy a $B(n,p)$ és $B(m,p)$ binomiális eloszlások konvoluciója a $B(n+m,p)$ binomiális eloszlás.

(Emlékeztetőül felidézem, hogy egy $\mathcal{P} = \{p_0, p_1, \dots\}$ és $\mathcal{Q} = \{q_0, q_1, \dots\}$ eloszlás konvoluciója az az $\mathcal{R} = \{r_1, r_2, \dots\}$ eloszlás melynek elemeit az $r_n = \sum\limits_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}$, $n = 1, 2, \dots$, képlet határoz meg. Ennek valószínűségi tartalma a következő: Ha ξ és η két független, nem negatív egész értékeket felvevő valószínűségi változó, amelyekre $P(\xi = n) = p_n$, $P(\eta = n) = q_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, akkor $\xi + \eta$ olyan nem negatív egész értékeket felvevő valószínűségi változó, amelyre $P(\xi + \eta = n) = r_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Konvolució kiszámolása esetén sokszor hasznos lehet a következő észrevétel. Ha az előbb tekintett $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ és $\mathcal{R}$ eloszlásokhoz hozzárendeljük az $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n x^n$, $G(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} q_n x^n$, $H(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} r_n x^n$, hatványsorokat, akkor azok teljesítik az $F(x)G(x) = H(x)$ azonosságot. Továbbá e függvények ismeretében, szukcesszív deriválással majd a nulla érték behelyettesítésével ki lehet számolni az eloszlásokban szereplő számok értékeit. A fenti hatványsorokat szokás a megfelelő eloszlás generátorfüggvényének nevezni.

Valóban a fenti konvolucióról szóló állítás érvényes, mivel a tekintett két eloszlás konvoluciója egy olyan $p(k)$, $0 \le k \le n+m$ eloszlás, amelyre

$$\begin{aligned} p(k) &= \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \binom{m}{k-j} p^{k-j} (1-p)^{(m-(k-j))} \\ &= p^k (1-p)^{n-k} \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \binom{m}{k-j} = \binom{n+m}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \end{aligned}$$

mert

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \binom{m}{k-j} = \binom{n+m}{k}.$$

Ez utóbbi állításnak kombinatorikus bizonyítását megadtam az első előadás végén a ‘Néhány a tárgyalt kombinatorikus kérdésekkel kapcsolatos eredmény’ feladatsor 7. feladatának az ismertetésében. Sőt, e feladatsor 9. feladatában megadtam ezen azonosság egy általánosításának analitikus (az $(1+x)^\alpha$ függvény hatványsorának az alakján alapuló) bizonyítását is.

Megmutatom azt is, hogyan lehet a binomiális eloszlások konvoluciójának alakjáról szóló állítást generátorfüggvények segítségével belátni. Ennek érdekében számoljuk ki a binomiális $B(n,p)$ eloszlás $F_{n,p}(x)$ generátorfüggvényét.

$$\begin{aligned} F_{n,p}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} x^k = (1-p)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{px}{1-p}\right)^k \\ &= (1-p)^n \left[1 + \frac{px}{1-p}\right]^n = (1-p+px)^n. \end{aligned}$$

Innen

$$F_{n,p}(x) F_{m,p}(x) = (1-p+px)^n (1-p+px)^m = (1-p+px)^{n+m} = F_{n+m,p}(x)$$

minden $n \ge 1$, $m \ge 1$ egész és $0 \le p \le 1$ valós számra. Ez azt jelenti, hogy a $B(n,p)$ és $B(m,p)$ eloszlások konvoluciója a $B(n+m,p)$ eloszlás.

Feladat:

1.) Adjunk egyszerű, a binomiális eloszlás valószínűségi tartalmát kihasználó bizonyítást arra, hogy a $B(n,p)$ és $B(m,p)$ binomiális eloszlások konvoluciója a $B(n+m,p)$ binomiális eloszlás.

Megoldás: Elég megmutatni, hogy léteznek olyan független $B(n,p)$ paraméterű ξ és $B(m,p)$ paraméterű η binomiális eloszlású valószínűségi változók, amelyek $\xi+\eta$ összege $B(n+m,p)$ paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó. Ennek érdekében tekintsük egy olyan pénzdarab $n+m$ darab egymás utáni független feldobását, amely p valószínűséggel esik a fej és $1-p$ valószínűséggel az írás oldalra. Legyen ξ az első n dobásban, η pedig az $n+1$-ik dobástó az $n+m$-ig dobásig tartó dobássorozatban megjelenő fej dobások száma. Ezek a ξ és η valószínűségi változók teljesítik a kívánt tulajdonságokat.

Számítsuk ki egy $B(n,p)$ eloszlású valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét. A legegyszerűbb módszer a következő: Legyenek $\xi_1,\dots,\xi_n$ független, $B(1,p)$ eloszlású valószínűségi változók. Ekkor $\xi=\sum\limits_{j=1}^{n}\xi_j$ $B(n,p)$ eloszlású valószínűségi változó, és $E\xi_j=1\cdot p+0\cdot(1-p)=p$, $E\xi_j^2=1\cdot p+0\cdot(1-p)=p$, $\operatorname{Var}\xi_j=E\xi_j^2-(E\xi_j)^2=p-p^2$ minden $j=1,\dots,n$ számra. Ezért a keresett várható érték és szórásnégyzet $E\xi=\sum\limits_{j=1}^{n}E\xi_j=np$ és $\operatorname{Var}\xi=\sum\limits_{j=1}^{n}\operatorname{Var}\xi_j=np(1-p)$.

Feladat:

2.) Számítsuk ki egy $B(n,p)$ eloszlású valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét az e fogalmakat definiáló összegek kiszámításának a segítségével.

Megoldás:

$$E\xi=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\qquad E\xi^2=\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},$$

és $\operatorname{Var}\xi=E\xi^2-(E\xi)^2$. Ezeket a kifejezéseket kell kiszámolnunk. Vegyük észre, hogy $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$, $k^2\binom{n}{k}=k\binom{n}{k}+k(k-1)\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}+n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$. Innen

$$\begin{aligned}E\xi&=n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}\\&=np\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p^k(1-p)^{(n-1)-k}=np(1+(1-p))^{n-1}=np,\end{aligned}$$

$$E\xi^2=n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}+n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}p^{k+2}(1-p)^{n-k-2}$$

$$= np + n(n-1)p^2 \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} p^k (1-p)^{(n-2)-k}$$
$$= np + n(n-1)p^2(p + (1-p))^{n-1} = np + (n^2-n)p^2,$$

és $\mathrm{Var}\,\xi = np + (n^2-n)p^2 - n^2p^2 = np(1-p)$.

A binomiális eloszlás természetes többdimenziós általánosítása a polinomiális eloszlás. Ennek megértéséhez tekintsük a következő feladatot. Adva van r urna. Ezekbe bedobunk összesen n golyót egymástól függetlenül. Az egyes golyók p_1 valószínűséggel esnek az első p_2 valószínűséggel a második, ... p_r valószínűséggel az r-ik urnába. Mi a valószínűsége annak, hogy a j-ik urnába k_j golyó esik, $1 \le j \le r$, $\sum\limits_{j=1}^{r} k_r = n$? Ez a valószínűség $\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!} p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$, mert $\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}$ ilyen dobássorozat van, és minden ilyen dobássorozat valószínűsége $p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$.

Polinomiális eloszlás definiciója *A $(\xi_1, \dots, \xi_r)$ r változós véletlen vektor polinomiális eloszlású n, $n = 1, 2, \dots$, és p_j, $1 \le j \le r$, paraméterekkel, $\sum\limits_{j=1}^{r} p_j = 1$, ha*

$$P(\xi_1 = k_1, \xi_2 = k_2, \dots, \xi_r = k_r) = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$$

az olyan $0 \le k_j \le n$, $1 \le j \le r$ számokra, amelyekre $\sum\limits_{j=1}^{r} k_j = n$.

Feladat:

3.) Legyen $(\xi_1, \dots, \xi_r)$ polinomiális eloszlású véletlen vektor n és p_j, $1 \le j \le r$, $\sum\limits_{j=1}^{r} p_j = 1$ paraméterekkel. Ekkor $E\xi_j = np_j$, $\mathrm{Var}\,\xi_j = np_j(1-p_j)$, $1 \le j \le r$, és $\mathrm{Cov}\,(\xi_j, \xi_k) = -np_jp_k$, $1 \le j, k \le r$, $j \ne k$.

b.) *Negatív binomiális eloszlás és annak speciális esete, a geometriai eloszlás.*

Most is először egy olyan tipikus példát tekintek, amelyben ezek az eloszlások megjelennek.

Rögzítsünk egy r pozitív egész számot, és dobjunk fel egy pénzdarabot, amely p valószínűséggel esik a fej $1-p$ valószínűséggel az írás oldalra egymás után többször egymástól függetlenül, egészen addig amikor az r-ik fejdobás megjelenik. Mi a valószínűsége annak, hogy ez a $k+r$-ik dobás?

Ez a valószínűség $\binom{k+r-1}{r-1}(1-p)^k p^r$. Ez ugyanis azt jelenti, hogy az első $k+r-1$ dobásban pontosan $r-1$ fej és k írás dobás történt, aminek valószínűsége $\binom{k+r-1}{r-1}(1-p)^k p^{r-1}$, valamint a $k+r$-ik dobás fej, aminek a valószínűsége p, és független az előző eseménytől.

Negatív binomiális és geometriai eloszlás definiciója. *Azt mondjuk, hogy a ξ valószínűségi változó negatív binomiális eloszlású r, $r = 1, 2, \dots,$ és p, $0 < p \le 1$, paraméterrel, ha ξ $r, r+1, \dots,$ értékeket vesz fel és*

$$P(\xi = k + r) = \binom{k+r-1}{r-1}(1-p)^k p^r, \quad k = 0, 1, 2, \dots.$$

Az $r = 1$ és p paraméterhez tartozó negatív binomiális eloszlást p paraméterű geometriai eloszlásnak is nevezik.

A második előadáson tárgyalt 3. és 5. feladat megoldási módszerének a segítségével megmutatható, hogy a negativ binomiális eloszlás valóban valószínűségeloszlás, azaz $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{k+r-1}{r-1}(1-p)^k p^r = 1$. E feladatokban ezt az állítást csak egy speciális esetben igazoltuk, (ha $k = 3$, és $p = \frac{1}{6}$), de az ott alkalmazott módszer alkalmazható az általános esetben is. A most megfogalmazott állítás következik néhány más, később bizonyítandó eredményből is. Tárgyaljuk meg a negatív binomiális eloszlás néhány fontos tulajdonságát.

Feladat:

4.) Bizonyítsuk be valószínűségi meggondolások segítségével, hogy egy r_1 és p paraméterű valamint egy r_2 és p paraméterű negatív binomiális eloszlás konvolúciója egy $r_1 + r_2$ és p paraméterű negatív binomiális eloszlású valószínűségeloszlás. Következésképpen, egy r és p paraméterű negatív binomiális eloszlás előáll, mint r darab p paraméterű geometriai eloszlás konvoluciója.

Megoldás: Tekintsünk két egymásól független végtelen fej-írás dobássorozatot, amelyekben az egyes dobások p valószínűséggel esnek a fej és $1 - p$ valószínűséggel az írás oldalra. Tekintsük azt a dobássorozatot, amely az első dobássorozat elemeiből áll, amíg az r_1-ik fejdobás megjelenik, majd a második dobássorozat elemeivel folytatódik egész addig, mí abban az r_2-ik fejdobás megjelenik, majd a sorozat abbamarad. Jelölje ξ az így definiált sorozat hosszát, ξ_1 e sorozatnak az első végtelen dobássorozattal, ξ_2 pedig e sorozatnak a második dobássorozattal közös részének a hosszát. Ekkor ξ_1 és ξ_2 független valószínűségi változók, $\xi_1 + \xi_2 = \xi$, továbbá ξ_1, ξ_2 és ξ negatív binomiális eloszlású valószínűségi változók (r_1, p), (r_2, p), illetve $(r_1 + r_2, p)$ paraméterekkel. Innen következik a feladat állítása.

Lássuk be az előbbi feladat állítását közvetlen számolással is. Elég megmutatni azt, hogy egy r és p paraméterű negatív binomiális eloszlású és egy p paraméterű geometriai eloszlás konvoluciója egy $r + 1$ és p paraméterű negatív binomiális eloszlás.

Ehhez azt kell belátni, hogy

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{r+j-1}{r-1}(1-p)^j p^r (1-p)^{k-j} p = \binom{k+r}{r}(1-p)^k p^{r+1}.$$

Ezt az azonosságot könnyen látjuk, ha tudjuk, hogy érvényes a következő azonosság:

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{j+r-1}{r-1} = \binom{k+r}{r}.$$

Az utóbbi azonosság viszont következik például a következő kombinatorikai érvelésből. A természetes számok halmazán $\binom{k+r}{r}$ módon jelölhetünk ki $r+1$ számot úgy, hogy a (nagyság szerint) $r+1$-ik szám a $k+r+1$ szám legyen, és az azonosság jobboldala ezzel egyenlő. Ezt viszont úgyis kiszámolhatjuk, hogy azt tekintjük, hány olyan elrendezés van, amelyben az r-ik kijelölt pont a $j+r$, az $r+1$-ik pedig a $k+r+1$ szám, majd összegezünk $0 \le j \le k$-ra. Mivel rögzített j-re az ilyen elrendezések száma $\binom{j+r-1}{r-1}$, innen következik a felírt azonosság.

Megmutatom, hogy hogyan lehet a fenti összfüggést analitikus módon bebizonyítani. Tekintsük az r és p paraméterekhez tartozó $g_{r,p}(x)$ generátorfüggvényt, azaz a

$$g_{r,p}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+r-1}{r-1} (1-p)^k p^r x^{k+r}$$

összeget. Ha belátjuk, hogy ez az összeg konvergens például az $-1 < x < 1$ intervallumon, valamint $g_{r_1,p}(x) g_{r_2,p}(x) = g_{r_1+r_2,p}(x)$, akkor innen az előző előadás végén tett észrevételekből következik az állítás. A $g_{r,p}(x)$ függvény viszont egyszerűen zárt alakra hozható. Ennek érdekében vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned}\binom{k+r-1}{r-1} = \binom{k+r-1}{k} &= \frac{(k+r-1)(k+r-2)\cdots(r+1)r}{k!} \\ &= \frac{r(r+1)\cdots(k+r-2)(k+r-1)}{k!} \\ &= (-1)^k \frac{(-r)(-r-1)\cdots(-r-k+2)(-r-k+1)}{k!} = (-1)^k \binom{-r}{k},\end{aligned}$$

ahonnan

$$\begin{aligned} g_{r,p}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-r}{k} (1-p)^k p^r x^{k+r} = (px)^r \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-r}{k} (-(1-p)x)^k \\ &= (px)^r (1-(1-p)x)^{-r} = \left(\frac{px}{1-(1-p)x} \right)^r, \end{aligned}$$

ami az $(1+x)^{-r}$ függvény hatványsorának az alakjából látható. Innen viszont könnyen látható a generátorfüggvényekre felírt azonosság. Megjegyzem, hogy a 2. előadás 5. feladatának a megoldása is hasonló gondolatokon alapult.

A fenti azonosság ad magyarázatot arra, hogy miért nevezik a most tekintett eloszlásokat negatív binomiális eloszlásnak. Ugyanis, mivel $\binom{k+r-1}{r-1} = (-1)^k \binom{-r}{k}$,

$$P(\xi = k+r) = \binom{k+r-1}{r-1} (1-p)^k p^r = \binom{-r}{k} (p-1)^k p^r, \quad k = 0, 1, 2, \dots.$$

Számítsuk ki egy negatív binomiális eloszlású valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét. Ezt könnyen kiszámíthatnánk a generátorfüggvény deriválásának segítségével, de ehelyett egy geometriai eloszlású valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét kiszámoljuk direkt módon, majd az általános esetet visszavezetjük erre.

Legyen ξ geometriai eloszlású valószínűségi változó p paraméterrel, azaz legyen $P(\xi = k+1) = p^k(1-p)$, $k = 0, 1, \dots$. Ekkor

$$E\xi = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(1-p)^k p = p\sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)^{k-1},$$

$E\xi^2 = p\sum\limits_{k=0}^{\infty} k^2(1-p)^{k-1}$, és $\operatorname{Var}\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$. Deriváljuk kétszer a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$ azonosságot. Azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1},$$

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2}.$$

Innen $x = 1-p$ helyettesítéssel $\frac{1}{p^2} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}$, $E\xi = p\sum\limits_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k^2(1-p)^{k-1} = (1-p)\sum\limits_{k=2}^{\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} = \frac{2(1-p)}{p^3} + \frac{1}{p^2}$, $E\xi^2 = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p}$, $\operatorname{Var}\xi = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1-p}{p^2}$.

Feladat:

5.) Számítsuk ki egy n és p paraméterű negatív binomiális eloszású valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét annak az ismeretnek a segítségével, hogy egy p paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változó várható értéke $\frac{1}{p}$ és szórásnégyzete $\frac{1-p}{p^2}$.

Megoldás: Tekintsünk n független geometriai eloszlású $\xi_1, \dots, \xi_r$ valószínűségi változót, és legyen $S = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j$. Ekkor S negatív binomiális eloszlású valószínűségi változó n és p paraméterekkel. Továbbá, $ES = nE\xi_1 = \frac{n}{p}$, $\operatorname{Var} S = \frac{n(1-p)}{p^2}$.

Tárgyaljuk meg, hogyan lehet egy negatív binomiális eloszlású valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét kiszámolni a generátorfüggvénye ismeretében. Sőt, lássunk be egy olyan formulát, amely általánosabb esetben is alkalmazható.

Legyen $\mathcal{P} = \{p_k\colon\ k = 1, 2, \dots\}$, $p_k \geq 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k = 1$, valószínűség eloszlás a nem negatív egész számokon. Vezessük be az ezen eloszláshoz tartozó

$$g(x) = g_{\mathcal{P}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k.$$

generátorfüggvényt. Vegyük észre, hogy a $g(x)$ függvényt definiáló hatványsor konvergens a $-1 < x < 1$ intervallumban. Továbbá kétszeri deriválás és az $x = 1$ (formális) helyettesítés azt sugallja, hogy

$$g'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k x^{k-1}, \quad g''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) p_k x^{k-2},$$

valamint

$$g'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k, \quad g''(1) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) p_k,$$

és ezen azonosságok segítségével kiszámolhatjuk a keresett várható értéket és szórásnégyzetét. Ugyanis $E\xi = \sum\limits_{k=0}^{\infty} k p_k = g'(1)$, $E\xi^2 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} k^2 p_k = \sum\limits_{k=2}^{\infty} k(k-1) p_k + \sum\limits_{k=1}^{\infty} k p_k = g''(1) + g'(1)$, ahonnan $\operatorname{Var} \xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = g''(1) + g'(1) - g'(1)^2$.

Felmerül a kérdés, szabad-e az alábbi számolásokat végrehajtani. A problémát az okozza, hogy hatványsorokat szabad tagonként deriválni a konvergenciatartomány belsejében, de mi az $x = 1$ helyettesítést hajtottuk végre, és lehet, hogy a $g(x)$ függvény hatványsora nem terjeszthető ki egy a $(-1, 1)$ intervallumnál nagyobb intervallumra. A negatív binomiális eloszlás generátorfüggvénye esetén egy ilyen kiterjesztés lehetséges, de érdemes az általános esetet is tekinteni, és ekkor nem szabad kizárni ezt a lehetőséget.

Az analízis bizonyos eredményei biztosítják a fenti számolás jogosságát. Egyrészt igaz az, hogy ha egy $h(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ hatványsor konvergens egy $(-A, A)$ intervallumban, és a $h(A) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ összeg konvergens, akkor $\lim\limits_{x \to A} h(x) = h(A)$. Másrészt, ha a $h(x)$ Taylor-sor a_k együtthatói nem negatívak, akkor $\lim\limits_{x \to A} h(x) = h(A)$. Speciálisan, ha ebben az esetben $\lim\limits_{x \to A} h(x) < \infty$ akkor $h(A) < \infty$. Ezeknek az eredményeknek az alkalmazásával $A = 1$ és $h(x) = g'(x)$ illetve $h(x) = g''(x)$ választással meg lehet mutatni a fenti számolások jogosságát. Érdemes megjegyezni, hogy az általános esetben a $g'(1) = \lim\limits_{x \to 1} g'(x)$, $g''(1) = \lim\limits_{x \to 1} g''(x)$ képletet kell alkamaznunk annak érdekében, hogy a $g'(1)$ és $g''(1)$ számokat értelmezni tudjuk.

Megjegyzés: Az, hogy egy hatványsor hogyan viselkedik a kovergenciakörének szélén, a komplex függvénytan egyik nehéz és fontos kérdése. Annak érdekében, hogy lássunk egy egyszerű példát, amely rávilágíthat arra, hogy vigyázni kell a formális számolások során, tekintsük az $h(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$ hatványsort. Ekkor $h(x)$ konvergens a $-1 < x < 1$ intervallumban, $h(1) = \frac{1}{2}$, és $h(x)$ hatványsora az $x = 1$ pontban, a $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ sor, divergens. Ez a példa azért nem mond ellen a fent elmondottaknak, mert ebben a hatványsorban vannak negatív együtthatók is.

Feladatok:

6.) Lássuk be, hogy amennyiben egy ξ valószínűségi változó generátorfüggvénye valamely $g(x)$ függvény, akkor $E\xi = g'(1)$, $\operatorname{Var}\xi = g''(1) + g'(1) - g'(1)^2$, ahol az általános esetben a $g'(1) = \lim_{x \to 1} g'(x)$ és $g''(1) = \lim_{x \to 1} g''(x)$ képletek definiálják ezeket a mennyiségeket. Számoljuk ki egy r és p paraméterű negatív binomiális eloszlású valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét, felhasználva, hogy e valószínűségi változó generátorfüggvénye a $\left(\frac{px}{1-(1-p)x}\right)^r$ függvény.

Megoldás: A $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k$ függvény két egymásutáni deriválása és az $x = 1$ helyettesítés adja, hogy $g'(1) = \sum_{k=1} kp_k = E\xi$, $g''(1) = \sum_{k=1} k(k-1)p_k = E\xi(\xi - 1)$. Mint azt az előadáson megtárgyaltuk az analízis bizonyos eredményei lehetővé teszik a fent alkalmazott tagonkénti deriválást. Ezért $E\xi = g'(1)$, $E\xi^2 = g''(1) + g'(1)$, és $\operatorname{Var}\xi = g''(1) + g'(1) - g'(1)^2$.

Az r és p paraméterű negatív binomiális eloszlás generátorfüggvénye

$$g(x) = \left(\frac{px}{1-(1-p)x}\right)^r .$$

Innen

$$g'(x) = rp\left(\frac{px}{1-(1-p)x}\right)^{r-1} \frac{1}{(1-(1-p)x)^2},$$

$$\begin{aligned} g''(x) =& r(r-1)p^2 \left(\frac{px}{1-(1-p)x}\right)^{r-2} \frac{1}{(1-(1-p)x)^4} \\ &+ rp\left(\frac{px}{1-(1-p)x}\right)^{r-1} \frac{2(1-p)}{(1-(1-p)x)^3}. \end{aligned}$$

Behelyettesítéssel $E\xi = \frac{r}{p}$, $g''(1) = \frac{r^2+r}{p^2} - \frac{2r}{p}$, $\operatorname{Var}\xi = g''(1) + g'(1) - g'(1)^2 = \frac{r(1-p)}{p^2}$.

7.) Mutassunk példát olyan $\mathcal{P} = \{p_k\colon k = 1, 2, \dots\}$, $p_k \ge 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$, valószínűség eloszlásra a nem negatív egész számokon, amelynek $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k$ generátorfüggvénye semmilyen $\varepsilon > 0$ szám esetén nem konvergens a $-1 - \varepsilon < x < 1 + \varepsilon$ intervallumon.

Megoldás: Legyen $\alpha > 1$ tetszőleges szám. Ekkor $C(\alpha) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} < \infty$, és $p_k = p_k(\alpha) = \frac{1}{C(\alpha)n^\alpha}$, $k = 1, 2, \dots$, valószínűségeloszlás. Ennek generátor függvénye a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k x^k = \frac{1}{C(\alpha)} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^\alpha}$ semmilyen $\varepsilon > 0$ számra nem konvergál a $-1-\varepsilon < x < 1+\varepsilon$ intervallumon, mert minden $x > 1$ számra $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{x^k}{k^\alpha} = \infty$.

8.) Legyen ξ geometriai eloszlású valószínűségi változó, azaz legyen $P(\xi = k) = p(1-p)^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$. Lássuk be, hogy ξ teljesíti a következő (diszkrét) örökifjú tulajdonságot.

$$P(\xi = k + l | \xi > l) = p(1-p)^{k-1} = P(\xi = k).$$

Adjuk meg ennek az azonosságnak a valószínűségszámítási magyarázatát is.

Megoldás:

$$\begin{aligned} P(\xi = k + l | \xi > l) &= \frac{P(\xi = k + l)}{\sum\limits_{j=1}^{\infty} P(\xi = l + j)} = \frac{p(1-p)^{k+l-1}}{\sum\limits_{j=1}^{\infty} p(1-p)^{l+j-1}} \\ &= \frac{(1-p)^{k-1}}{\sum\limits_{j=0}^{\infty} (1-p)^j} = p(1-p)^{k-1} = P(\xi = k). \end{aligned}$$

Tekintsük egy a fej-oldalára p val´ószínűséggel eső pénzérme végtelen egymás utáni feldobását. A most bebizonyított azonosság baloldalán annak a feltételes valószínűsége áll, hogy ha az első l dobásban, nem volt fejdobás, akkor az l-ik dobás utáni első fejdobás az $l + k$-ik dobásnál jelenik meg. Mivel az első l dobás és az utána következő dobások eredményei egymástól függetlenek, ez a feltételes valószínűség megegyezik a feltétel nélküli valószínűséggel, és ezt fejezi ki ez az azonosság.

b.) *Hipergeometrikus eloszlás.*

Tekintsünk először egy tipikus példát, amelyben ilyen eloszlások megjelennek.

Adva van egy urnában M piros és $N - M$ fehér golyó. Visszatevés nélkül kihúzunk n, $n \le N$, golyót. Mi annak a valószínűsége, hogy k piros golyót húztunk ki?

Ez a valószínűség $\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$. Valóban, ha megkülönböztetjük az egyes golyókat, akkor $\binom{N}{n}$ különböző húzáseredmény alakulhat ki. (Nem különböztetünk meg két húzáseredményt, ha ugyanazokat a golyókat húztuk ki csak más sorrendben. Kissé részletesebben kifejtve: Az urnában levő golyókat számozzuk meg 1-től N-ig úgy, hogy a piros golyók kapják az $1, \dots, M$ és a fehér golyók az $M + 1, \dots, N$ számokat. Egy n hosszúságú visszatevés nélküli húzássorozat eredménye egy az $1, \dots, N$ számokból álló n hosszú számsorozat, amelynek minden tagja különböző. A különböző húzássorozatok számát számoljuk ki, ha azonosítunk két olyan sorozatot, amelyben ugyanazok a számok szerepelnek csak más sorrendben. Ezután azon n hosszúságú húzássorozatok számát számoljuk össze, amelyekben k piros, azaz az $1,\dots,M$ számok valamelyikével indexezett golyó van.) Olyan húzássorozat, amelyben az M piros golyóból k-t, az $N-M$ fehér golyóból pedig $n-k$-t húzunk $\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}$ van. Mivel ezek azok az n hosszú húzássorozatok, amelyekben pontosan k piros golyót húzunk, és az egyes húzássorozatok valószínűsége megegyezik, innen következik az állítás.

A hipergeometrikus eloszlás definiciója. *Azt mondjuk, hogy a ξ valószínűségi változó hipergeometrikus eloszlású N, M és n paraméterekkel, ahol N, M és n nem negatív egész számok, $M<N$, $n<N$, ha*

$$P(\xi=k)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}},\quad 0\le k\le n.$$

Ilyen módon valóban eloszlást definiáltunk. A $\sum\limits_{k=0}^{n}P(\xi=k)=1$ azonossággal ekvivalens $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}=\binom{N}{n}$ azonosságot (más jelöléssel) beláttuk a binomiális eloszlás vizsgálatában.

A következő feladat egy tipikus probléma, ahol a hipergeometrikus eloszlás megjelenik.

Számoljuk ki annak valószínűségét, hogy a lottóban pontosan három találatunk lesz.

E feladat megoldását már ismertettem a 2. előadás 6. feladatában, ezért ezt nem kell újra tárgyalnom. Oldjuk meg a következő feladatot.

Feladatok:

9.) Számoljuk ki egy hipergeometrikus eloszlású valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.

Megoldás: Tekintsünk egy urnát, amely M piros és $N-M$ fehér golyót tartalmaz, és húzzunk ki n golyót visszatevés nélkül. Legyen $\xi_j=1$, ha a j-ik húzás piros, $\xi_j=0$, ha a j-ik húzás fehér. Ekkor a megoldandó feladat ekvivalens az $S=\sum\limits_{j=1}^{n}\xi_j$ várható érékének és szórásnégyzetének a kiszámolásával. Viszont már korábbi eredményekből következik, hogy $E\xi_j=\frac{M}{N}$, $\mathrm{Var}\,\xi_j=\frac{M}{N}-\left(\frac{M}{N}\right)^2$ minden $1\le j\le N$ indexre, továbbá, $\mathrm{Cov}\,(\xi_j,\xi_k)=\frac{M}{N}\frac{M-1}{N-1}-\left(\frac{M}{N}\right)^2$ minden $1\le j,k\le n$, $j\ne k$ számpárra. A várható érték additivitásából következik, hogy $ES=\frac{nM}{N}$. (Itt nincs szükség az összeadandók függetlenségének a feltételezésére.) Az összeg szórásnégyzetének kiszámítására tanult általános képletből, (amikor az összeadandók nem feltétlenül függetlenek) és a fenti formulákból következik, hogy

$$\mathrm{Var}\,S=n\mathrm{Var}\,\xi_1+n(n-1)\mathrm{Cov}\,(\xi_1,\xi_2)$$

$$= n\left(\frac{M}{N}-\left(\frac{M}{N}\right)^2\right)+n(n-1)\left(\frac{M}{N}\frac{M-1}{N-1}-\left(\frac{M}{N}\right)^2\right)$$
$$= n\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}-(n-1)\frac{N-M}{(N-1)N}\right)$$
$$= n\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right)=n\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}.$$

10.) Számoljuk ki egy N, M és n paraméterű hipergeometrikus eloszlású ξ valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét, azaz egy olyan valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét, amelyre

$$P(\xi=k)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}},\qquad 0\le k\le n.$$

Mutassuk meg, hogy $E\xi=n\frac{M}{N}$, $\operatorname{Var}\xi=\frac{nM}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\frac{n-n}{N-1}$.

Megoldás: Tekintsünk egy urnát, amely M piros és $N-M$ fehér golyót tartalmaz, és húzzunk ki n golyót visszatevés nélkül. Legyen $\xi_j=1$, ha a j-ik húzás piros, $\xi_j=0$, ha a j-ik húzás fehér. Ekkor a megoldandó feladat ekvivalens az $S=\sum\limits_{j=1}^{n}\xi_j$ várható érékének és szórásnégyzetének a kiszámolásával. Viszont már korábbi eredményekből következik, hogy $E\xi_j=\frac{M}{N}$, $\operatorname{Var}\xi_j=\frac{M}{N}-\left(\frac{M}{N}\right)^2$ minden $1\le j\le N$ indexre, továbbá, $\operatorname{Cov}(\xi_j,\xi_k)=\frac{M}{N}\frac{M-1}{N-1}-\left(\frac{M}{N}\right)^2$ minden $1\le j,k\le n$, $j\ne k$ számpárra. A várható érték additivitásából következik, hogy $ES=\frac{nM}{N}$. (Itt nincs szükség az összeadandók függetlenségének a feltételezésére.) Az összeg szórásnégyzetének kiszámítására tanult általános képletből, (amikor az összeadandók nem feltétlenül függetlenek) és a fenti formulákból következik, hogy

$$\operatorname{Var}S = n\operatorname{Var}\xi_1+n(n-1)\operatorname{Cov}(\xi_1,\xi_2)$$
$$= n\left(\frac{M}{N}-\left(\frac{M}{N}\right)^2\right)+n(n-1)\left(\frac{M}{N}\frac{M-1}{N-1}-\left(\frac{M}{N}\right)^2\right)$$
$$= n\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}-(n-1)\frac{N-M}{(N-1)N}\right)$$
$$= n\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right)=n\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}.$$

Ha egy urnahúzásban N és $N-M$ nagy, azaz sok fehér és piros golyó van az urnában, és fix számú golyót kihúzunk, akkor a húzáseredmény szempontjából alig van jelentősége annak, hogy a kihúzott golyókat visszadobjuk-e vagy sem. Ilyen jellegű állítást fogalmaz meg a következő (egyszerű) feladat.

11.) Ha $N \to \infty$, $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{M}{N} = p$, $0 < p < 1$, n rögzített egész szám, akkor

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{minden } 0 \le k \le n \text{ számra.}$$

Megoldás:

$$\begin{aligned}
&\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \\
&\quad = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{M(M-1)\cdots(M-k+1)}{N(N-1)\cdots(N-k+1)} \frac{(N-M)\cdots(N-M-n+k+1)}{(N-k)\cdots(N-n+1)} \\
&\quad \to \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \text{ ha } N \to \infty,
\end{aligned}$$

mert $\frac{M(M-1)\cdots(M-k+1)}{N(N-1)\cdots(N-k+1)} \to p^k$, és $\frac{(N-M)\cdots(N-M-n+k+1)}{(N-k)\cdots(N-n+1)} \to (1-p)^{n-k}$, ha $N \to \infty$.

A hipergeometrikus eloszlás természetes általánosítása a polihipergeometrikus eloszlás. Ennek megértése érdekében tekintsük a következő feladatot: Egy urnában r különböző színű golyó van, N_1 1-es, N_2 2-es, ... N_r r-es színű golyó. Legyen $N = \sum\limits_{j=1}^{r} N_j$. Ezekből a golyókból kihúzunk n-et visszatevés nélkül. Mi annak a valószínűsége, hogy k_1 1-es, k_2 2-es, ... k_r r-es színű golyót húzunk ki?

A válasz:

$$\frac{\binom{N_1}{k_1}\binom{N_2}{k_2}\cdots\binom{N_r}{k_r}}{\binom{N}{n}},$$

ahol $n = \sum\limits_{j=1}^{r} k_r$. Ennek az állításnak a bizonyítása hasonlóan történhet mint a hipergeometrikus eloszlás bevezetése előtt tekintett feladaté. Ennek a feladatnak az alapján vezették be a következő fogalmat.

A polihipergeometrikus eloszlás definiciója. *Azt mondjuk, hogy a* $(\xi_1,\dots,\xi_r)$ *véletlen vektor polihipergeometrikus eloszlású* $N_1,\dots N_r$ *és* n *paraméterekkel, ahol* N_j, $1 \le j \le r$, *és* n *nem negatív egész számok, és* $N = \sum\limits_{j=1}^{r} N_j$ *jelöléssel* $n < N$, *ha*

$$P(\xi_1 = k_1,\dots,\xi_r = k_r) = \frac{\binom{N_1}{k_1}\binom{N_2}{k_2}\cdots\binom{N_r}{k_r}}{\binom{N}{n}},$$

ahol $n = \sum\limits_{j=1}^{r} k_j$.

Feladatok:

12.) Legyenek $\xi_1, \ldots, \xi_L$ és $\eta_1, \ldots, \eta_M$ valószínűségi változók ugyanazon a valószínűségi mezőn. Lássuk be, hogy

$$\mathrm{Cov}\left(\sum_{j=1}^{L} \xi_j, \sum_{k=1}^{M} \eta_k\right) = \sum_{j=1}^{L} \sum_{k=1}^{M} \mathrm{Cov}\,(\xi_j, \eta_k).$$

Megoldás:

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\left(\sum_{j=1}^{L} \xi_j, \sum_{k=1}^{M} \eta_k\right) &= E\left(\sum_{j=1}^{L} \xi_j \cdot \sum_{k=1}^{M} \eta_k\right) - \left(E\sum_{j=1}^{L} \xi_j\right)\left(E\sum_{k=1}^{M} \eta_k\right) \\ &= \sum_{j=1}^{L} \sum_{k=1}^{M} E\xi_j\eta_k - \sum_{j=1}^{L} \sum_{k=1}^{M} E\xi_j E\eta_k = \sum_{j=1}^{L} \sum_{k=1}^{M} \mathrm{Cov}\,(\xi_j, \eta_k).\end{aligned}$$

13.) Legyen $(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ véletlen vektor polihipergeometrikus eloszlású $N_1, \ldots N_r$ és n paraméterekkel. Számítsuk ki az $E\xi_j$ várható értékeket, a $\mathrm{Var}\,\xi_j$ szórásnégyzetet minden $1 \le j \le r$ számra és a $\mathrm{Cov}\,(\xi_j, \xi_k)$ kovarianciafüggvényt, ha $1 \le j, k \le r$, $j \ne k$.

Segítség: A hipergeometrikus eloszlásról szóló hasonló feladat módszere természetes módon adaptálható ebben az esetben is.

Megoldás: Számítsuk ki először a $\mathrm{Cov}\,(\xi_j, \xi_k)$ kovarianciafüggvényt. Ennek érdekében tekintsünk egy urnát, benne N_1 1-es, N_2 2-es, ... , N_r r-es színű golyót, és húzzunk ki belőlük n-et visszatevés nélkül. Legyen $N = \sum\limits_{k=1}^{r} N_r$, és vezessük be a következő $\eta_{l,s}$, $1 \le l \le n$, $1 \le s \le r$, valószínűségi változókat: $\eta_{l,s} = 1$, ha az l-ik húzásban s-es színű golyót húzunk, és $\eta_{l,s} = 0$, ha az l-ik húzás eredménye más. Definiáljuk a $\xi_s = \sum\limits_{l=1}^{n} \eta_{l,s}$ véletlen összegeket, $1 \le s \le r$. Ekkor a $\mathrm{Cov}\,(\xi_j, \xi_k)$ kovarianciafüggvényt kell kiszámolnunk az előbb definiált valószínűségi változókkal.

Ezt a hipergeometrikus eloszlás esetén alkalmazott érvelés természetes adaptációjával és az előző házi feladat eredményének felhasználásával tehetjük meg.

Először ki kell számolnunk az $\mathrm{Cov}\,(\eta_{l,j}, \eta_{l',k})$ kovarianciafüggvényeket. Külön kell választani az $l = l'$ és $l \ne l'$ eseteket. Mind a két esetben használhatjuk azt a tényt, hogy hasonlóan a két színű golyót tartalmazó urnamodellhez annak, hogy milyen valószínűséggel húzok bizonyos előírt színű golyókat adott húzásban nem függ attól, hogy hanyadik húzást tekintettük.

Az $l = l'$ esetben

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\,(\eta_{l,j}, \eta_{l,k}) &= P\,(\eta_{l,j} = 1, \eta_{l,k} = 1) - P\,(\eta_{l,j} = 1)\,P\,(\eta_{l,k} = 1) \\ &= -P\,(\eta_{1,j} = 1)\,P\,(\eta_{1,k} = 1) = -\frac{N_j N_k}{N^2}.\end{aligned}$$

Ha $l \neq l'$, akkor

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}\left(\eta_{l,j}, \eta_{l',k}\right) &= P\left(\eta_{l,j} = 1, \eta_{l',k} = 1\right) - P\left(\eta_{l,j} = 1\right) P\left(\eta_{l',k} = 1\right) \\ &= P\left(\eta_{1,j} = 1, \eta_{2,k} = 1\right) - P\left(\eta_{1,j} = 1\right) P\left(\eta_{1,k} = 1\right) \\ &= \frac{N_j N_k}{N(N-1)} - \frac{N_j N_k}{N^2}.\end{aligned}$$

Innen, illetve az előző feladatban megfogalmazott eredmény alapján

$$\operatorname{Cov}\left(\xi_j, \xi_k\right) = -n\frac{N_j N_k}{N^2} + n(n-1)\left(\frac{N_j N_k}{N(N-1)} - \frac{N_j N_k}{N^2}\right) = n\frac{(n-N)N_j N_k}{(N-1)N^2}.$$

Az $E\xi_j$ és $\operatorname{Var}\xi_j$ mennyiségeket is ki lehet számítani hasonlóan, de erre nincs szükség. Ha csak azt vesszük figyelembe, hogy az l-ik húzásban j-es vagy más színű golyót húztunk-e, azaz csak az $\eta_{j,l}$ valószínűségi változókkal dolgozunk, akkor rövid meggondolás után láthatjuk, hogy ugyanazt az eredményt kapjuk, mint a (két színnel rendelkező) hipergeometrikus eloszlást modellező urnamodell esetén $M = N_j$ és $N - M = N - N_j$ paraméterekkel. Ezért $E\xi_j = n\frac{N_j}{N}$, $\operatorname{Var}\xi_j = n\frac{N_j}{N}\left(1 - \frac{N_j}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$.

Poisson eloszlás.

A Poisson eloszlást közvetlenül fogom definiálni. Azok a tulajdonságai, amelyek miatt fontos szerepet játszik a valószínűségszámításban később fognak kiderülni.

Poisson eloszlás definiciója. *Egy ξ valószínűségi változó λ paraméterű Poisson eloszlású, ha ξ nem negatív egész értékeket vesz fel, és*

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Ez valóban valószínűség eloszlás, mert

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(\xi = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1.$$

Számítsuk ki egy λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó generátorfüggvényét. Ez

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(\xi = k)x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}x^k = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda x)^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda x} = e^{\lambda(x-1)}.$$

A következő állítást fontossága miatt fogalmazzuk meg Tétel formájában.

Tétel független Poisson eloszlású valószínűségi változók összegének eloszlásáról. *Ha ξ és η két független, λ illetve μ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó, akkor $\xi+\eta$ $\lambda+\mu$ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó.*

Bizonyítás:

$$
\begin{aligned}
P(\xi+\eta=k) &= \sum_{j=0}^{k} P(\xi=j,\eta=k-j) = \sum_{j=0}^{k} P(\xi=j)P(\eta=k-j) \\
&= \sum_{j=0}^{k} \frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}\frac{\mu^{k-j}}{(k-j)!}e^{-\mu} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}\sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{j!(k-j)!}\lambda^j\mu^{(k-j)} \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}(\lambda+\mu)^k.
\end{aligned}
$$

Feladat:

14.) Mutassuk meg, hogy a Poisson eloszlás generátorfüggvényének alakjából látható, hogy ha ξ és η két független, λ illetve μ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó, akkor $\xi+\eta$ $\lambda+\mu$ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó.

Megoldás: Mivel egy λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó generátorfüggvénye $e^{\lambda(x-1)}$, egy μ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó generátorfüggvénye $e^{\mu(x-1)}$, és egy $\lambda+\mu$ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó generátorfüggvénye $e^{(\lambda+\mu)(x-1)}$, a feladat állítása következik az

$$e^{\lambda(x-1)}e^{\mu(x-1)} = e^{(\lambda+\mu)(x-1)}$$

azonosságból.

A fenti eredmény következménye, hogy amennyiben véges sok független, Poisson eloszlású valószínűségi valószínűségi változónak vesszük az összegét, az ismét Poisson eloszlású lesz, amelynek paramétere az egyes valószínűségi változók paramétereinek az összege. A következő feladat állítása, amelynek érdekes következményei vannak, tekinthető úgy mint ennak az állításnak a megfordítása. Abban ugyanis egy alkalmas konstrukció segítségével egy Poisson eloszlású valószínűségi változót bontunk fel független kisebb paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változók összegére.

Feladat:

15.) Legyen adva k darab urna, és ezekbe dobjunk be véletlen ξ számú golyót, ahol ξ Poisson eloszlású valószínűségi változó $\lambda>0$ paraméterrel. Legyenek az egyes dobások eredményei egymástól és a ξ valószínűségi változótól függetlenek. Tegyük fel továbbá, hogy minden egyes dobásnál a golyó $p_j\ge 0$ valószínűséggel esik a j-ik urnába, $j=1,\dots,k$, $\sum\limits_{j=1}^{k} p_j=1$. Jelölje η_j a j-ik urnába eső golyók számát. Ekkor az η_j, $j = 1, \dots, k$, valószínűségi változók függetlenek, és η_j Poisson eloszlású λp_j paraméterrel, $j = 1, \dots, k$.

Megoldás:

$$\begin{aligned} P(\eta_1 = l_1, \dots, \eta_k = l_k) &= P(\xi = l_1 + \cdots + l_k) \frac{(l_1 + \cdots + l_k)!}{l_1! \cdots l_k!} p_1^{l_1} \cdots p_k^{l_k} \\ &= \frac{\lambda^{(l_1 + \cdots + l_k)}}{l_1! \cdots l_k!} p_1^{l_1} \cdots p_k^{l_k} e^{-\lambda} \\ &= \frac{\lambda^{l_1} \cdots \lambda^{l_k}}{l_1! \cdots l_k!} p_1^{l_1} \cdots p_k^{l_k} e^{-\lambda(p_1 + \cdots + p_k)} = \prod_{j=1}^{k} \frac{(\lambda p_j)^{l_j}}{l_j!} e^{-\lambda p_j} \end{aligned}$$

tetszőleges $l_1 \geq 0, \dots, l_k \geq 0$ egész számokra. Innen adódik az állítás.

Lássuk be az előző feladat segítségével a következő állítást:

16.) Legyen adva ξ Poisson eloszlású valószínűségi változó λ paraméterrel. Dobjunk le egymástól és a ξ valószínűségi változótól függetlenül véletlenül egyenletesen ξ darab pontot az egységintervallumra, azaz tegyük fel, hogy minden pont $b - a$ valószínűséggel esik valamely $[a, b] \subset [0, 1]$ intervallumba. Ekkor a $[0, 1]$ intervallum tetszőleges felbontására $[s_0, s_1]$, $[s_1, s_2]$, ... , $[s_{k-1}, s_k]$ intervallumokra, $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_k = 1$, az egyes intervallumokba eső pontok száma egymástól független Poisson eloszlású valószínűségi változó $s_j - s_{j-1}$, $1 \leq j \leq k$, paraméterrel.

Megoldás: Tekintsük a következő urnamodellt. Tekintünk ξ számú golyót, tehát annyit, ahány ledobott pontot tekintettünk az előző feladatban. Tegyük az l-ik golyót a j-ik urnába, ha a l-ik pont az $[s_{j-1}, s_j]$ intervallumba esett, $1 \leq j \leq k$. Akkor az előző feladat eredménye alapján az egyes urnákba eső golyók száma egymástól függetetlen Poisson eloszlású valószínűségi változó $s_j - s_{j-1}$, $1 \leq j \leq k$, paraméterrel. Innen következik a feladat állítása.

Számítsuk ki egy ξ λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.

$$E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda + \lambda} = \lambda,$$

$$\begin{aligned} E\xi^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda = \lambda^2 + \lambda, \end{aligned}$$

és $\operatorname{Var} \xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = (\lambda + \lambda^2) - \lambda^2 = \lambda$.

Megjegyzem, hogy a Poisson eloszlás várható értékére és szórásnégyzetére kapott eredmények összhangban vannak azzal a ténnyel, hogy független Poisson eloszlású valószínűségi változók összege olyan Poisson eloszlású valószínűségi változó, amelynek paramétere az összeadandók paramétereinek az összege. Ugyanis mind a várható érték mind a szórásnégyzet additív független valószínűségi változók összegzése esetén.

Feladat:

17.) Legyenek ξ_j, $j = 1, \dots, r$, független Poisson eloszlású valószínűségi változók λ_j, $1 \le j \le r$, paraméterekkel. Mutassuk meg, hogy

$$P\left(\xi_1 = k_1, \dots, \xi_r = k_r \,\middle|\, \sum_{j=1}^r \xi_j = n\right) = \frac{n!}{k_1! \cdots k_r!} \prod_{j=1}^r \frac{\lambda_j^{k_j}}{\left(\sum\limits_{s=1}^r \lambda_s\right)^{k_j}},$$

ha $\sum\limits_{j=1}^r k_j = n$. Azaz a $\xi_1, \dots, \xi_r$ vektor feltételes eloszlása feltéve, hogy $\sum\limits_{j=1}^r k_j = n$ a polinomiális eloszlás n és $p_j = \frac{\lambda_j}{\sum\limits_{s=1}^r \lambda_s}$, $1 \le j \le r$, paraméterekkel.

Megoldás:

$$\begin{aligned}
P\left(\xi_1 = k_1, \dots, \xi_r = k_r \,\middle|\, \sum_{j=1}^r \xi_j = n\right) &= \frac{P(\xi_1 = k_1, \dots, \xi_r = k_r)}{P\left(\sum_{j=1}^r \xi_j = n\right)} \\
&= \frac{P(\xi_1 = k_1) \cdots P(\xi_r = k_r)}{P\left(\sum_{j=1}^r \xi_j = n\right)},
\end{aligned}$$

mert $\{\omega\colon \sum_{j=1}^r \xi_j(\omega) = n\} \subset \{\omega\colon \xi_1(\omega) = k_1, \dots, \xi_r(\omega) = k_r)\}$, és a $\xi_1, \dots, \xi_r$ valószínűségi változók függetlenek. Innen

$$\begin{aligned}
P\left(\xi_1 = k_1, \dots, \xi_r = k_r \,\middle|\, \sum_{j=1}^r \xi_j = n\right) &= \frac{\prod\limits_{j=1}^r \frac{\lambda_j^{k_j}}{k_j!} e^{-\lambda_j}}{\frac{\left(\sum\limits_{s=1}^r \lambda_s\right)^{k_1 + \cdots + k_r} e^{-(\lambda_1 + \cdots + \lambda_r}}{n!}} \\
&= \frac{n!}{k_1! \cdots k_r!} \prod_{j=1}^r \frac{\lambda_j^{k_j}}{\left(\sum\limits_{s=1}^r \lambda_s\right)^{k_j}}.
\end{aligned}$$

A következő eredmény a binomiális eloszlás Poisson közelítéséről szól.

Lemma binomiális eloszlás Poisson közelítéséről. *Minden $n = 1, 2, \dots$ számra tekintsünk egy S_n binomiális eloszlású valószínűségi változót $B(n, p_n)$ eloszlással, azaz*

n és p_n paraméterekkel. Tegyük fel továbbá, hogy a $\lambda_n = np_n$, $n = 1, 2, \dots,$ számok teljesítik a $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$ feltételt valamilyen $\lambda > 0$ számmal. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

minden $k = 0, 1, 2, \dots$ számra.

Bizonyítás:

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} \left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k =$$

$$\frac{\lambda_n^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

ha $n \to \infty$ minden $k = 0, 1, 2, \dots$ számra, mert

$$\frac{\lambda_n^k}{k!} \to \frac{\lambda^k}{k!}, \quad \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n \to e^{-\lambda}, \quad \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k} \to 1,$$

és $\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \to 1$, ha $n \to \infty$.

Az előző lemma eredménye azt mondja, hogy ha tekintünk n függeten, egyforma eloszlású $\xi_j^{(n)}$, $1 \le j \le n$, valószínűségi változót, amelyekre $P(\xi_j^{(n)} = 0) = 1 - P(\xi_j^{(n)} = 1) = \lambda_n$, illetve vesszük ezek $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j^{(n)}$ összegét, akkor $n \to \infty$ és $n\lambda_n \to \lambda$ esetén az S_n összegek eloszlása tart a λ paraméterű Poisson eloszláshoz. A következő előadásban tárgyalom ennek az eredménynek egy általánosítását, amely azt mutatja, hogy független, nem negatív egész értékű valószínűségi változók összegének az eloszlása nagyon általános feltételek mellett konvergál egy Poisson eloszláshoz. Ezen előadás befejezéseként megmutatom egy feladatsor segítségével egy korábban tárgyalt feladat kapcsolatát a Poisson eloszlással, illetve az előbb tárgyalt lemmával.

További feladatok:

1.) Tekintsük a következő, a 4. előadás elején tárgyalt példát: Egy estélyen megjelenik n házaspár. Egy táncmester, aki nem tudja, hogy kik házastársak és kik nem, véletlen módon párba rendezi a férfiakat és nőket a tánc előtt. Jelölje T_n az együtt táncoló házaspárok számát. Mutassuk meg, hogy $E\binom{T_n}{k} = \frac{1}{k!}$ minden $1 \le k \le n$ számra.

   Megoldás: Vezessük be minden $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n$ k hosszúságú sorozatra a következő $\eta(j_1, \dots, j_k)$ valószínűségi változót: $\eta(j_1, \dots, j_k) = 1$, ha a j_1-ik, j_2-ik, $\dots$ j_k-ik házaspárok mindegyike egymással táncol, és $\eta(j_1, \dots, j_k) = 0$ egyébként. Ekkor

$$\binom{T_n}{k} = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n} \eta(j_1, \dots, j_k),$$

ahonnan

$$E\binom{T_n}{k} = \sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n} E\eta(j_1,\dots,j_k).$$

Viszont $E\eta(j_1,\dots,j_k) = \frac{(n-k)!}{n!}$, ahonnan $E\binom{T_n}{k} = \binom{n}{k}\frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{k!}$, mint állítottuk.

2.) Tekintsük az előző feladat következő módosított változatát. Egy estélyen ott van n házaspár minden férfi tagja. Egymás után megjelennek a feleségek, akiket egy jelenlevő táncmester megtáncoltat egy általa véletlenül kiválasztott férfival. Minden férfit egyforma valószínűséggel választ, és az egyes választások egymástól függetlenek. Jelölje $\bar T_n$ azon feleségek számát, akik a férjükkel táncolnak. Számoljuk ki az $E\binom{\bar T_n}{k}$ kifejezés várható értékét minden $1\le k\le n$ számra. Mutassuk meg, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} E\binom{\bar T_n}{k} = \frac{1}{k!}$ minden $k=1,2,\dots$ számra.

Megoldás: Vezessük be minden $1\le j_1<j_2<\cdots<j_k\le n$ k hosszúságú sorozatra a következő $\bar\eta(j_1,\dots,j_k)$ valószínűségi változót: $\bar\eta(j_1,\dots,j_k)=1$, ha a j_1-ik, j_2-ik, … j_k-ik feleségek mindegyike a férjével táncol, és $\bar\eta(j_1,\dots,j_k)=0$ egyébként. Ekkor

$$\binom{\bar T_n}{k} = \sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n} \bar\eta(j_1,\dots,j_k),$$

ahonnan

$$E\binom{\bar T_n}{k} = \sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n} E\bar\eta(j_1,\dots,j_k).$$

Viszont $E\bar\eta(j_1,\dots,j_k) = \frac{1}{n^k}$, ahonnan $E\binom{\bar T_n}{k} = \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}$. Innen látható, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} E\binom{\bar T_n}{k} = \frac{1}{k!}$.

3.) Legyen $\zeta=\zeta_\lambda$ egy λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó. Ekkor $E\binom{\zeta}{k} = \frac{\lambda^k}{k!}$.

Megoldás:

$$E\binom{\zeta}{k} = \sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\lambda^k\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{\lambda^k}{k!}.$$

4.) Tekintsük az 1.) feladatban definiált T_n a 2.) feladatban definiált $\bar T_n$ és a 3.) feladatban bevezetett $\zeta=\zeta_1$ $\lambda=1$ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változókat. Mutassuk meg, felhasználva az előző feladatok eredményeit, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} ET_n^k = \lim\limits_{n\to\infty} E\bar T_n^k = E\zeta^k$ minden $k=1,2,\dots$.

Megoldás: Vegyük észre, hogy a $E\binom{T_n}{0} = E\binom{\bar T_n}{0} = \binom{\zeta}{0} = 1$, ami az ott megfogalmazott állítások megfelelője az ‘elfajuló’ $k=0$ esetben. Továbbá $E\binom{\eta}{k} = \frac{1}{k!}E\eta(\eta-1)\cdots(\eta-k+1) = \frac{1}{k!}(E\eta^k + B_{k-1,k}E\eta^{k-1}+\cdots+B_{1,k}E\eta+B_{0,k})$ alkalmas $B_{j,k}$, $0\le j\le k-1$ konstansokkal, amelyek értékeit explicit módon meg lehet adni, de erre nem lesz szükségünk. Másrészt az előző feladatokból következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} E\binom{T_n}{k} = E\lim\limits_{n\to\infty}\binom{\bar{T}_n}{k} = \binom{\zeta}{k}$ minden $k = 0,1,2,\dots$ számra, ahonnan következik a feladat állítása.

Megjegyzés: Az 4. előadás ismertetésének a végén egy kiegészítésben megmutattam, hogy hogyan lehet kiszámolni a szita formula egy általánosításának a segítségével a 4. előadás elején tekintett feladatban az együtt táncoló házaspárok számának az eloszlását. Az ott ismertetett eredményből az is következett, hogy ezek az eloszlások konvergálnak az 1 paraméterű Poisson eloszláshoz, ha a házaspárok n száma konvergál a végtelenhez. Az előző feladatsorban megmutattuk, hogy ezen eloszlások minden momentuma konvergál az 1 paraméterű Poisson eloszlás megfelelő momentumához. A valószínűségszámítás egy általános, ebben az előadássorozatban nem tárgyalt eredménye szerint ebből következik az eloszlások konvergenciája is.

A feladatsorban szereplő második feladat célja az eredmény hátterének jobb megvilágítása volt. Az ott tekintett feladatban az, hogy az egyes feleségek a férjükkel táncolnak-e független események voltak. Az első feladatban nem volt teljes függetlenség ezen események között, de érezhető, hogy ez a függés nagyon kicsi volt. Heurisztikusan várható, hogy ‘majdnem független’ valószínűségi változók összegei nagyon hasonlóan viselkednek független valószínűségi változók összegeihez. Az itt tárgyalt példa ilyen jellegű jelenséget mutatott. Az azonban, hogy a ‘majdnem függetlenség’ mit jelent általános nagyon nehéz kérdés. Az ilyen problémák eldöntésére nincsen univerzális, mindig használható módszer.

Vegyük észre azt is, hogy a második feladatban definiált $\bar{T}_n$ valószínűségi változó $B(n,p)$ binomiális eloszlású valószínűségi változó volt $p = \frac{1}{n}$ paraméterrel. A binomiális eloszlás Poisson közelítéséről szóló lemmából következik, hogy az ilyen eloszlású valószínűségi változók eloszlásai konvergálnak a Poisson eloszláshoz $\lambda = 1$ paraméterrel $n \to \infty$ esetén. Azt láttuk be, hogy az ezektől kissé különböző, de velük sok hasonlóságot mutató, az első feladatban szereplő T_n valószínűségi változóknak ugyanaz a határeloszlása, (és momentumainak határértéke), ha $n \to \infty$.