A Valószínűségszámítás I. előadássorozat kilencedik előadása.
2007. április 10.

A többdimenziós sűrűségfüggvények bevezetése után definiáljuk a többdimenziós tér halmazaira koncentrált egyenletes eloszlást. Ezután határozzuk meg az egyenletes eloszlást néhány egyszerű esetben.

Többdimenziós halmazokra koncentrált egyenletes eloszlás definiciója. *Legyen adva egy $A \subset R^k$ (Borel mérhető) halmaz a k-dimenziós téren, amelynek Lebesque mértéke teljesíti a $\lambda(A) > 0$ feltételt. Az A-halmazon definiált egyenletes eloszlás az a P valószínűségi mérték az R^k tér Borel mérhető részhalmazain, amelyre $P(B) = \frac{\lambda(A \cap B)}{\lambda(A)}$ minden Borel mérhető halmazra a k-dimenziós téren. Másképp megfogalmazva, az A halmazra koncentrált egyenletes eloszlás az az eloszlás, amelynek sűrűségfüggvénye $f(u_1, \dots, u_k) = \frac{1}{\lambda(A)}$, ha $(u_1, \dots, u_k) \in A$, és $f(u_1, \dots, u_k) = 0$, ha $(u_1, \dots, u_k) \notin A$.*

Feladat:

Adjuk meg a $[0, 1] \times \cdots \times [0, 1]$ k-dimenziós egységkockán egyenletes eloszlás eloszlásfüggvényét.

b.) Tekintsük a síkon a $(0, 0)$, $(0, 1)$ és $(1, 0)$ csúcspontok által meghatározott háromszögön az egyenletes eloszlást. Adjuk meg ennek eloszlásfüggvényét.

Megoldás: A $[0, 1 \times \cdots \times [0, 1]$ k-dimenziós egységkockán egyenletes eloszlású valószínűségi változó eloszlása az $F(x_1, \dots, x_k) = G(x_1) \cdots G(x_k)$ függvény, ahol $G(x) = 0$, ha $x \le 0$, $G(x) = x$, ha $0 \le x \le 1$, és $G(x) = 1$, ha $x \ge 1$.

A tekintett háromszögön definiált egyenletes eloszlás $H(x, y)$ eloszlásfüggvénye, $H(x, y) = 0$, ha $x \le 0$ vagy $y \le 0$. $H(x, y) = 1$, ha ≥ 1 és $y \ge 1$. Definiálni kell még a $H(x, y)$ eloszlásfüggvényt abban az esetben, ha $0 \le x \le 1$ és $0 \le y \le 1$. Ebben az esetben $H(x, y) = 2\lambda([0, x] \times [0, y] \cap \mathbf{K})$. innen $H(x, y) = xy$, ha $0 \le x \le 1$ és $0 \le y \le 1$, és $x + y \le 1$. Ha $0 \le x \le 1$ és $0 \le y \le 1$, és $x + y \ge 1$, akkor $H(x, y) = xy - \dfrac{1}{2}(x + y - 1)^2$.

Független valószínűségi változók és szorzatuk várható értéke.

Valószínűségi változók függetlenségének a definiciója. *Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Azt mondjuk, hogy ezek a valószínűségi változók függetlenek, ha minden $x_1, \dots, x_n$ valós számra*

$$P(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n) = P(\xi_1 < x_1) \cdots P(\xi_n < x_n).$$

A teljesség kedvéért megadom e fogalom definicióját általánosabb, vektorértékű valószínűségi változókra is, bár valószínűleg ebben az előadássorozatban nem jutunk el addig a pontig, ahol erre a fogalomra szükség van. (Mindenekelőtt a többváltozós centrális határeloszlástételre gondolok, mint olyan témakörre, ahol ez a fogalom megjelenik.)

Vektorértékű valószínűségi változók függetlenségének a definiciója. *Legyenek $\xi^{(1)} = (\xi_{1,1}, \dots, \xi_{1,k})$, $\dots$, $\xi^{(n)} = (\xi_{n,1}, \dots, \xi_{n,k})$, értékeiket az R^k k-dimenziós*

Euklidesi térben felvevő valószínűségi változók (vektorok) egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Azt mondjuk, hogy ezek a valószínűségi vektorok függetlenek, ha minden $x^{(1)} = (x_{1,1}, \dots, x_{1,k})$, ... , $x^{(n)} = (x_{n,1}, \dots, x_{n,k})$, k-dimenziós vektorra

$$P(\xi_{1,1} < x_{1,1}, \dots, \xi_{1,k} < x_{1,k}, \ \dots, \ \xi_{n,1} < x_{n,1}, \dots, \xi_{n,k} < x_{n,k})$$
$$= P(\xi_{1,1} < x_{1,1}, \dots, \xi_{1,k} < x_{1,k}) \cdots P(\xi_{n,1} < x_{n,1}, \dots, \xi_{n,k} < x_{n,k}) .$$

Megjegyzés: Vektorértékű valószínűségi változók függetlenségének a definiciójában semmilyen függetlenségi feltevést nem tettünk az egyes $\xi^{(j)} = (\xi_{j,1}, \dots, \xi_{j,k})$, $1 \le j \le k$, vektorok koordinátái között. Ezzel a definicióval egyelőre nem foglalkozunk.

Független valószínűségi változókkal való számolást megkönnyíti a mértékelmélet egyik alapvető eredménye, az alább ismertetendő Fubini tétel. Ennek megfogalmazása előtt teszek néhány megjegyzést.

A Fubini tétel a következő, a területi (Riemann–)integrálról szóló eredménynek az általánosítása általános Lebesgue integrálokra.

$$\int\int f(x,y)\,dx\,dy = \int \left(\int f(x,y)\,dx \right) dy$$

minden integrálható $f(\cdot,\cdot)$ függvényre. Ez az eredmény azt jelenti, hogy egy kétváltozós függvény területi integrálját úgy is kiszámolhatjuk, hogy először rögzítjük az egyik paramétert, (amelyet itt y-nal jelöltünk,) és kiszámítjuk az így kapott egyváltozós integrált. Ezután az első lépésben rögzített paraméter szerint integrálva az így kapott függvényt, megkapjuk a területi integrál értékét. Ez azt jelenti, hogy a területi integrál kiszámítható két egyszeres integrál szukcesszív alkalmazásának a segítségével.

A Fubini tétel általános alakjának az ismertetése előtt megfogalmazom a következő eredményt.

Legyenek $F_1(\cdot)$, ... , $F_k(\cdot)$ eloszlásfüggvények a számegyenesen, és definiáljuk az

$$F(x_1, \dots, x_k) = F_1(x_1) \cdots F_k(x_k)$$

függvényt. Az így definiált $F(x_1, \dots, x_k)$ függvény egy k-változós eloszlásfüggvény. Részletesebben kifejtve ez a következőt jelenti. A hetedik és nyolcadik előadásban megadtam annak szükséges és elégséges feltételét, hogy egy egy illetve egy többváltozós függvény eloszlásfüggvény függvény legyen. A fenti állítás tartalma az, hogy ha az $F_j(\cdot)$, $1 \le j \le k$, függvények teljesítik az (egyváltozós) eloszlásfüggvény jellemzését leíró tulajdonságokat, akkor az $F(x_1, \dots, x_k) = F_1(x_1) \cdots F_k(x_k)$ függvény teljesíti a többváltozós eloszlásfüggvény eloszlását leíró tulajdonságokat.

Nem nehéz belátni, hogy a fenti állításban az összes ellenőrizendő feltétel teljesül. Mivel e részletek kidolgozása egyszerű, és ennek különösebb tanulságai nincsenek, ezért ezt elhagyom.

Ha $F_j(\cdot)$, $1 \le j \le k$, egydimenziós eloszlásfüggvények, akkor tekinthetjük az $F(x_1,\dots,x_k) = F_1(x_1)\cdots F_k(x_k)$ k-változós eloszlásfüggvényt, illetve az általa meghatározott $\mu_F = \mu_{(F_1,\dots,F_k)}$ Stieltjes mértéket a k-dimenziós téren. Az irodalomban általános szokás, hogy az előbb definiált μ_F k-dimenziós téren értelmezett mérték szerinti integrált $F_1(\,dx_1)\dots F_k(dx_k)$ vagy $dF_1(x_1)\dots\, dF_k(x_k)$-val jelölik, azaz

$$\begin{aligned}\int g(x_1,\dots,x_k)\mu_F(\,dx_1,\dots,\,dx_k) &= \int g(x_1,\dots,x_k)\mu_{(F_1,\dots,F_k)}(\,dx_1,\dots,\,dx_k)\\ &\overset{\text{jel.}}{=} \int g(x_1,\dots,x_k)F_1(\,dx_1)\dots F_k(\,dx_k) = \int g(x_1,\dots,x_k)\,dF_1(x_1)\dots\,dF_k(x_k)\end{aligned}$$

tetszőleges integrálható $g(x_1,\dots,x_k)$ (integrálható) fügvényre, ahol „jel." a jelölés szó rövidítése. A továbbiakban mi is ezt a jelölést követjük.

Fubini tétel. *Legyenek $F_j(\cdot)$, $1 \le j \le k$, eloszlásfüggvények a számegyenesen, és legyen $g(x_1,\dots,x_k)$ (mérhető) k-változós függvény. Ekkor*

$$\begin{aligned}&\int g(x_1,x_2,\dots,x_k)F_1(\,dx_1)F(\,dx_2)\dots F_k(\,dx_k)\\ &\qquad = \left(\int \dots \left(\int \left(\int g(x_1,\dots,x_k)F_1(\,dx_1)\right) F_2(\,dx_2)\right)\dots F_k(\,dx_k)\right).\end{aligned}$$

Ez az azonosság úgy értendő, hogy az azonosság két oldalán lévő integrál illetve szukcesszív integrál egyszerre létezik.

Érdemes külön megfogalmazni ennek az azonosságnak a következő fontos speciális esetét. Ha $g(x_1,\dots,x_k) = g_1(x_1)\cdots g_k(x_k)$ alakú speciális függvények integrálját tekintjük, akkor a következő azonosságot írhatjuk fel:

$$\begin{aligned}&\int g_1(x_1)g_2(x_2)\cdots g_k(x_k)F_1(\,dx_1)F_2(\,dx_2)\dots F_k(\,dx_k)\\ &\qquad = \int g(x_1)F_1(\,dx_1)\int g_2(x_2)F_2(\,dx_2)\cdots\int g_k(x_k)F_k(\,dx_k) = \prod_{j=1}^{k}\int g_j(x)F_j(\,dx).\end{aligned}$$

1. megjegyzés. A Fubini tétel valójában egy általánosabb eredmény mint a most kimondott tétel. A Fubini tétel a megfogalmazottakhoz hasonló eredményt mond ki általános (és nemcsak az Euklideszi terekben definiált) szorzatmértékek szerinti integrálokra. Számunkra viszont elegendő csak a fent leírt speciális esetet tekinteni.

2. megjegyzés. Az előbb kimondott tétel és a további eredmények röviden, informálisan úgy foglalhatók össze, hogy mindazok az eredmények, amelyeket független, diszkrét eloszlású valószínűségi változókról tanultunk, érvényben maradnak általános, nem feltétlenül diszkrét eloszlású valószínűségi változókra is.

Az alábbiakban a Fubini tételt fogjuk használni, és azokat a eredményeket, amelyek megadják, hogy valószínűségi változók függvényeinek várható értékét hogyan lehet kiszámolni e valószínűségi változók eloszlásfüggvényének a segítségével. Ezen eredmények felhasználásával bebizonyítok néhány alapvető eredményt független valószínűségi változókról. Ezelőtt egy megjegyzést teszek az itt követett tárgyalásmódról.

3. megjegyzés. Az alábbiakban független valószínűségi változók legfontosabb tulajdonságait ismertetem. Ezeket a tulajdonságokat meg lehet fogalmazni az eloszlások nyelvén is. Íly módon kiderül, hogy ezek a tulajdonságok ekvivalensek valamilyen integrálokra megfogalmazható azonosságokkal, és ezen azonosságok mindegyike a Fubini-tétel következményeként kezelhető.

Tétel. *Legyenek $\xi_1,\dots,\xi_k$ független valószínűségi változók, amelyek mindegyikének létezik várható értéke, azaz $E|\xi_j|<\infty$. Ekkor a $\xi_1\cdots\xi_k$ szorzatnak is létezik várható értéke, és*

$$E\xi_1\cdots\xi_k=E\xi_1\cdots E\xi_k.$$

Megjegyzés: Ezt az eredményt már tárgyaltam az 5. előadás 'Tétel független valószínűségi változók szorzatáról' eredményében, de ott csak diszkrét eloszlású valószínűségi változók szorzatát tekintettem.

A tétel bizonyítás: Jelölje $F_j(\cdot)$, $1\le j\le k$, a ξ_j valószínűségi változó eloszlásfüggvényét, és vezessük be a $g(x_1,\dots,x_k)=x_1\dots x_k$ függvényt. Ekkor

$$E\xi_1\cdots\xi_k=Eg(\xi_1,\dots,\xi_k)=\int x_1\cdots x_kF_1(\,dx_1)\dots F_k(\,dx_k).$$

Továbbá a Fubini tétel szerint

$$\int x_1\cdots x_kF_1(\,dx_1)\dots F_k(\,dx_k)=\prod_{j=1}^k\int xF_j(\,dx).$$

Mivel $E\xi_j=\int xF_j(x)$, ez az azonosság azt jelenti, hogy $E\xi_1\cdots\xi_k=E\xi_1\cdots E\xi_k$. Ezenkívül azt is állíthatjuk (felhasználva azt a tényt, hogy a Fubini tétel két oldalán szereplő kifejezés egyszerre értelmes, hogy a Tételben szereplő azonosság két oldala egyszerre értelmes.

Tétel. *Legyenek $\xi_1,\dots,\xi_k$ független valószínűségi változók, $B_1,\dots,B_k$ a számegyenes Borel mérhető részhalmazai. Ekkor*

$$P(\xi_1\in B_1,\dots,\xi_k\in B_k)=P(\xi_1\in B_1)\cdots P(\xi_k\in B_k).$$

Megjegyzés: A függetlenség definiciója csak azt követeli meg, hogy a tételben kimondott azonosság teljesüljön speciális $B_j=(-\infty,x_j)$ alakú halmazokra. A tétel azt állítja, hogy ha ez az azonosság teljesül ezekre a speciális alakú halmazokra, akkor ez teljesül minden ,,szép" azaz Borel mérhető halmazra. E tételnek, illetve e tételnek a 4. előadásban tárgyalt 'Lemma független diszkrét eloszlású valószínűségi változók tulajdonságairól' néven megfogalmazott megfelelőjének egyik következménye az, hogy a diszkrét valószínűségi változók függetlenségének korábban ismertetett definiciója megegyezik a függetlenség általános definiciójának a redukciójával erre az esetre.

Bizonyítás: Legyen $g_j(\cdot)$ a B_j halmaz indikátorfüggvénye, $1 \le j \le k$, azaz legyen $g_j(x) = 1$, ha $x \in B_j$, és $g_j(x) = 0$, ha $x \notin B_j$. Definiáljuk a $g(x_1, \dots, x_k) = g_1(x_1) \cdots g_k(x_k)$ függvényt a k-dimenziós téren. Ekkor a Fubini tétel alapján

$$
\begin{aligned}
P(\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_k \in B_k) &= Eg(\xi_1, \dots, \xi_k) = Eg_1(\xi_1) \cdots Eg_k(\xi_k) \\
&= P(\xi_1 \in B_1) \cdots P(\xi_k \in B_k).
\end{aligned}
$$

Feladat:

Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}, \dots, \xi_{n+m}$ független valószínűségi változók, $g(x_1, \dots, x_n)$ n-változós (mérhető) függvény, $\eta = g(\xi_1, \dots, \xi_n)$. Mutassuk meg a Fubini tétel segítségével, hogy $\eta, \xi_{n+1}, \dots, \xi_{n+m}$ független valószínűségi változók.

Megoldás: Rögzítsünk valamilyen $x_0, x_1, \dots, x_m$ számokat. Definiáljuk ezek segítségével a $h_j(u) = 1$, ha $u < x_j$, $h_j(u) = 0$, ha $u \ge x$, $1 \le j \le m$, függvényeket, valamint legyen $h_0(u_1, \dots, u_n) = 1$, ha $g(u_1, \dots, u_n) < x_0$, $h_0(u_1, \dots, u_n) = 0$, ha $g(u_1, \dots, u_n) \ge x_0$. Jelölje $F_j(\cdot)$ a ξ_j valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. Ekkor a Fubini tétel alapján

$$
\begin{aligned}
&P(\eta < x_0, \xi_{n+1} < x_{n+1}, \dots, \xi_{n+m} < x_{n+m}) \\
&\quad = \int h_0(u_1, \dots, u_n) h_1(u_{n+1}) \dots h_{n+m}(u_{n+m}) F(\,du_1) \dots F_{n+m}(\,du_{n+m}) \\
&\quad = \int h_0(u_1, \dots, u_n) F(\,du_1) \dots F_{n+m}(\,du_n) \\
&\qquad\quad \int h_1(u_{n+1}) F(\,du_1) \cdots \int h_{n+m}(u_{n+m}) F_{n+m}(\,du_{n+m}) \\
&\quad = P(\eta < x_0) P(\xi_{n+1} < x_{n+1}) \cdots P(\xi_{n+m} < x_{n+m}),
\end{aligned}
$$

ahonnan következik a feladat állítása.

Feladat:

Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független valószínűségi változók, és legyen a ξ_j, $1 \le j \le n$, valószínűségi változónak sűrűségfüggvénye, és jelöljük az $f_j(\cdot)$-vel. Lássuk be a Fubini tétel segítségével, hogy a $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ véletlen vektornak is van sűrűségfüggvénye, és az az $f(u_1, \dots, u_n) = f_1(u_1) \cdots f_n(u_n)$ függvény.

Megoldás: Rögzítsünk valamilyen $x_0, x_1, \dots, x_n$ számokat, és definiáljuk ezek segítségével a $h_j(u) = 1$, ha $u < x_j$, $h_j(u) = 0$, ha $u \ge x$ $1 \le j \le n$, függvényeket.

Ekkor

$$
\begin{aligned}
P(\xi_1 < x_1, \cdots, \xi_n < x_n) &= P(\xi_1 < x_1) \cdots P(\xi_n < x_n) \\
&= \int h_1(u) f_1(u)\, du \cdots \int h_n(u) f_n(u)\, du \\
&= \int \cdots \int h_1(u_1) f_1(u_1) \cdots h_n(u_n) f_n(u_n)\, du_1 \dots du_n \\
&= \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_1(u_1) \cdots f_n(u_n)\, du_1 \dots du_n
\end{aligned}
$$

ahonnan következik a feladat állítása.

Független valószínűségi változók összegének a szórásnégyzete, a nagy számok gyenge törvénye.

A diszkrét valószínűségi változókhoz hasonlóan defiálhatjuk általános, nem feltétlenül diszkrét eloszlású valószínűségi változók szórásnégyzetét, (ezt az előző előadáson megtettük), kovarianciáját, és (független) valószínűségi változók összegének szórásnégyzetére hasonló formula érvényes mint a diszkrét esetben. Röviden leírom a bizonyítást, bár azt akár el is hagyhatnám arra hivatkozva, hogy e tulajdonságok bizonyításában a diszkrét valószínűségi változók esetében is csak olyan összefüggéseket használtunk, amelyek általános valószínűségi változókra is érvényesek.

Valószínűségi változók kovarianciájának a definiciója. *Legyen ξ és η két valószínűségi változó ugyanazon a valószínűségi mezőn, (amelyekre teljesül az $E\xi^2 < \infty$, $E\eta^2 < \infty$ feltétel.) A ξ és η valószínűségi változók kovarianciafüggvénye*

$$\mathrm{Cov}\,(\xi, \eta) = E[(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)].$$

Lemma.

$$\mathrm{Cov}\,(\xi, \eta) = E\xi\eta - E\xi E\eta.$$

Ha ξ és η független valószínűségi változók, akkor $\mathrm{Cov}\,(\xi, \eta) = 0$.

Bizonyítás:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}\,(\xi, \eta) &= E[(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)] = E(\xi\eta - \xi E\eta - \eta E\xi + E\xi E\eta) \\
&= E\xi\eta - E\xi E\eta - E\xi E\eta + E\xi E\eta = E\xi\eta - E\xi E\eta.
\end{aligned}
$$

Ha ξ és η független valószínűségi változók, akkor $E\xi\eta = E\xi E\eta$, ezért $\mathrm{Cov}\,(\xi, \eta) = 0$.

Tétel. *Legyenek ξ_j, $1 \le j \le k$, valószínűségi változók ugyanazon a valószínűségi mezőn, amelyekre teljesül $E\xi_j^2 < \infty$ feltétel. Ekkor*

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{j=1}^k \xi_j\right) = \sum_{j=1}^k \mathrm{Var}\,\xi_j + \sum_{\substack{1 \le j, l \le k \\ j \ne l}} \mathrm{Cov}\,(\xi_j, \xi_l) = \sum_{j=1}^k \mathrm{Var}\,\xi_j + 2\sum_{j=1}^{k-1} \sum_{l=j+1}^{k} \mathrm{Cov}\,(\xi_j, \xi_l).$$

Speciálisan, ha a ξ_j valószínűségi változók függetlenek, akkor

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{j=1}^{k}\xi_j\right)=\sum_{j=1}^{k}\operatorname{Var}\xi_j.$$

Bizonyítás. Vezessük be a $\bar{\xi}_j=\xi_j-E\xi_j$ valószínűségi változókat. Ekkor

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{j=1}^{k}\xi_j\right)=E\left(\sum_{j=1}^{k}\bar{\xi}_j\right)^2=E\left(\sum_{j=1}^{k}\bar{\xi}_j^2+\sum_{\substack{1\le j,l\le k\\ j\ne l}}\bar{\xi}_j,\bar{\xi}_l\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{k}E\bar{\xi}_j^2+\sum_{\substack{1\le j,l\le k\\ j\ne l}}E\bar{\xi}_j\bar{\xi}_l=\sum_{j=1}^{k}\operatorname{Var}\xi_j+\sum_{\substack{1\le j,l\le k\\ j\ne l}}\operatorname{Cov}(\xi_j,\xi_l).$$

Ha a ξ_j valószínűségi változók függetlenek, akkor $\operatorname{Cov}(\xi_j,\xi_l)=0$, ezért

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{j=1}^{k}\xi_j\right)=\sum_{j=1}^{k}\operatorname{Var}\xi_j.$$

Legyenek ξ_j, $j=1,2,\dots$, független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, és legyen $E\xi_1^2<\infty$. Becsüljük meg a Csebisev egyenlőtlenség segítségével a

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\xi_j-E\xi_j)\right|>\varepsilon\right)$$

valószínűségeket minden $n=1,2,\dots$ és $\varepsilon>0$ számra. Látni fogjuk, hogy ebből a becslésből adódik a valószínűségszámítás egyik fontos eredménye, a nagy számok (gyenge) törvénye.

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\xi_j-E\xi_j)\right|>\varepsilon\right)=P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\xi_j-E\xi_j)\right|>\varepsilon\right)$$

$$=P\left(\left(\sum_{j=1}^{n}(\xi_j-E\xi_j)\right)^2>n^2\varepsilon^2\right)\le\frac{E\left(\sum\limits_{j=1}^{n}(\xi_j-E\xi_j)\right)^2}{n^2\varepsilon^2}$$

$$=\frac{\operatorname{Var}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\xi_j\right)}{n^2\varepsilon^2}=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\operatorname{Var}\xi_j}{n^2\varepsilon^2}=\frac{\operatorname{Var}\xi_1}{n\varepsilon^2}.$$

A nagy számok (gyenge) törvényének bizonyítása előtt bevezetünk két definiciót.

Sztochasztikus konvergencia definiciója. *Legyenek ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, független valószínűségi változók ugyanazon a valószínűségi mezőn. Azt mondjuk, hogy a ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi változók sztochasztikusan konvergálnak a ξ valószínűségi változóhoz, ha $\lim\limits_{n\to\infty} P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) = 0$ minden $\varepsilon > 0$ számra.*

Megjegyzés: A mértékelméletben is megjelenik ez a fogalom, de ott ezt mértékben való konvergenciának nevezik.

Nagy számok gyenge törvényének a definiciója. *Legyen ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, független, egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata egy valószínűségi mezőn, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$, $k = 1, 2, \dots$. Azt mondjuk, hogy ezek a ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi változók teljesítik a nagy számok gyenge törvényét, ha létezik olyan E szám, amelyre teljesül, hogy az $\frac{S_n}{n}$, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi változók sztochasztikusan konvergálnak az E számhoz, azaz ahhoz a valószínűségi változóhoz, amely egy valószínűséggel az E konstanssal egyenlő.*

Tétel a nagy számok gyenge törvényéről. *Legyen ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, független, egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata, amelyekre teljesül az $E\xi_1^2 < \infty$ tulajdonság. Ezek a valószínűségi változók teljesítik a nagy számok gyenge törvényét az $E = E\xi_1$ konstanssal.*

Bizonyítás: Láttuk, hogy az adott feltételek mellett

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\xi_j - E\xi_j)\right| > \varepsilon\right) \le \frac{\operatorname{Var}\xi_1}{n\varepsilon^2}$$

minden $\varepsilon > 0$ számra. Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Var}\xi_1}{n\varepsilon^2} = 0$, innen következik a Tétel állítása.

1. megjegyzés. A gyenge jelző a nagy számok gyenge törvényében arra utal, hogy a nagy számok gyenge törvényében független valószínűségi változók átlagainak konvergenciáját egy viszonylag gyenge konvergenciafogalom szerint, a sztochasztikus konvergencia szerint követeljük meg. A valószínűségszámításban foglalkoznak a nagy számok erős törvényével is, amelyben ezen átlagok konvergenciáját egy erősebb konvergenciafogalom szerint, az úgynevezett egy valószínűséggel való konvergencia szerint követelik meg. Láttuk, hogy a nagy számok gyenge törvénye érvényes akkor, ha a tekintett független valószínűségi változók négyzetének létezik várható értéke. Felmerülhet az a kérdés, hogy ez a feltétel elhagyható-e, vagy ha nem hagyható el, akkor lehet-e azt gyengíteni. Ugyancsak természetes probléma annak a kérdésnek a vizsgálata, hogy a $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E\right| > \varepsilon\right)$ valószínűségek milyen gyorsan tartanak nullához. Ezeknek a kérdéseknek a tárgyalásához később még visszatérek.

2. megjegyzés. Bár nem hangsúlyoztuk, de hallgatólagosan felhasználtuk azt a tényt, hogy amennyiben egy ξ valószínűségi változó négyzetének létezik várható értéke, akkor létezik a ξ valószínűségi változó várható értéke is. Valóban, ez következik az úgynevezett Cauchy–Schwarz egyenlőtlenségből, amely szerint $(E|\xi|)^2 \le E\xi^2$. Ez az egyenlőtlenség kiolvasható a szórásnégyzet figyelmesebb vizsgálatából, amely szerint $E\xi^2 - (E|\xi|)^2 = \operatorname{Var}|\xi| > 0$. Egy másik, talán egyszerűbb érvelés: Jelölje $F(\cdot)$ a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. Ekkor, mivel $|x| \le \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)$, ezért $E|\xi| = \int |x| F(\,dx) \le \displaystyle\int \frac{1}{2}(x^2+1)F(\,dx) = \frac{1}{2}(E\xi^2+1) < \infty$, ha $E\xi^2 < \infty$.

A nagy számok (gyenge) törvényének szemléletes tartalma az, hogy ha sok egymástól független egyforma eloszlású kisérlet történik, akkor ezek átlaga ,,regularizálódik”, konstans lesz. Ez magyarázza meg például azt a tényt, hogy minden évben közel ugyanannyi fiú és lány születik.

Független valószínűségi változók összegének a sűrűségfüggvénye. Sűrűségfüggvények konvoluciója.

A következő kérdéssel foglalkozunk. Legyen ξ és η két független valószínűségi változó, amelyeknek létezik $f(\cdot)$ és $g(\cdot)$ sűrűségfüggvénye. Lássuk be, hogy a $\xi+\eta$ összegnek is létezik $h(\cdot)$ sűrűségfüggvénye, és adjuk meg azt a formulát, amelynek segítségével azt kiszámolhatjuk. E vizsgálat során be fogjuk vezetni két (sűrűség)függvény konvoluciójának a fogalmát. Ezután alkalmazzuk ezt az eredményt néhány konkrét esetben.

Jelölje $H(x) = P(\xi+\eta < x)$ a független $f(\cdot)$ és $g(\cdot)$ sűrűségfüggvényű ξ és η valószínűségi változók $\xi+\eta$ összeg eloszlásfüggvényét. Ekkor

$$
\begin{aligned}
H(x) = P(\xi+\eta<x) &= \int\int_{\{(u,v)\colon\, u+v<x\}} f(u)g(v)\,du\,dv \\
&= \int\int_{\{(\bar u,\bar v)\colon\, \bar v<x\}} f(\bar u)g(\bar v-\bar u)\,d\bar u\,d\bar v \\
&= \int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\bar u)g(\bar v-\bar u)\,d\bar u\right]d\bar v = \int_{-\infty}^{x} K(v)\,dv,
\end{aligned}
$$

ahol

$$
K(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(v-u)\,du.
$$

A fenti számolásokban egy integráltranszformációt alkalmaztunk $\bar v = u+v$, $\bar u = u$ helyettesítéssel, majd felhasználtuk a Fubini tételt. Az elvégzett számolásban észre kell venni, hogy a $\bar v = u+v$, $\bar u = u$ transzformáció az $\{(u,v)\colon\; u+v<x\}$ tartomány a $\{(\bar u,\bar v)\colon\; \bar v<x,\; -\infty<\bar u<\infty\}$ tartományba képezi, és e (lineáris) transzformáció Jacobiánja azonosan 1.

Ezután bevezetjük a következő definiciót.

(Sűrűség)függvények konvoluciójának a definiciója. *Legyen $f(\cdot)$ és $g(\cdot)$ két sűrűségfüggvény a számegyenesen, általánosabban integrálható függvények, azaz tegyük fel,* *hogy* $\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|\, du < \infty$ *és* $\int_{-\infty}^{\infty} |g(u)|\, du < \infty$. *Az* $f(\cdot)$ *és* $g(\cdot)$ *függvények* $f * g(\cdot)$ *konvoluciója az*

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)\, du, \quad -\infty < x < \infty,$$

függvény.

1. megjegyzés: Egyszerű (lineáris) transzformációval kapjuk, hogy a konvoluciót másképp is kiszámolhatjuk. Ez mutatja, hogy a konvolucióban résztvevő függvények szimmetrikus szerepet játszanak.

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)\, du = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)g(u)\, du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x}{2}-u\right) g\left(\frac{x}{2}+u\right) du, \quad -\infty < x < \infty. \end{aligned}$$

2. megjegyzés: Érdemes megérteni azt szemléletes képet, amely egyszerűen megmagyarázza, hogy független valószínűségi változók összegének sűrűségfüggvényét miért az általunk megadott képlet fejezi ki. A következő meglehetősen informális magyarázat hasznos lehet. Legyen ξ sűrűségfüggvénye $f(x)$, η sűrűségfüggvénye $g(x)$. A $\xi+\eta$ összeg $h(x)$ sűrűségfüggvényét egy x pontban a $P(\xi+\eta \in [x, x+dx) \sim h(x)dx$ reláció határozza meg. A $\xi+\eta \in [x, x+dx]$ esemény úgy következhet be, ha $\xi \in [y, y+dy)$ és $\eta \in [x-y, x-y+dx)$ valamely y számra. Ennek valószínűsége rögzített y számra $f(y)g(x-y)dydx$. Ezeket a valószínűségeket ,,összegezve", pontosabban integrálva az y érték szerint azt kapjuk, hogy $h(x)dx = \int f(y)g(x-y)\, dy \cdot dx$, ahonnan dx-szel leosztva megkapjuk a keresett formulát. Ugyanez az érvelés azt sugallja, hogy $\xi - \eta$ sűrűségfüggvénye $\int_{-\infty}^{\infty} f(x+y)g(y)\, dy$. Ennek az állításnak a precíz indoklását tartalmazza a következő feladat.

Feladat:

Legyen ξ és η két független valószínűségi változó $f(x)$ illetve $g(x)$ sűrűségfüggvénnyel. Ekkor $\xi - \eta$ $h(x)$ sűrűségfüggvénye, (amelyik létezik) $h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y)g(y)\, dy$ alakú.
Megoldás: Tekintsük az $\bar{\eta} = -\eta$ valószínűségi változót. Ekkor $\bar{\eta}$ sűrűségfüggvénye $\bar{g}(x) = g(-x)$. Valóban, legyen $G(x)$ az η, és $\bar{G}(x)$ az $\bar{\eta}$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. Ekkor $\bar{g}(x) = \frac{d\bar{G}(x)}{dx} = \frac{d(1-G(-x))}{dx} = g(-x)$. Ezért $\xi - \eta$ sűrűségfüggvénye megegyezik $\xi + \bar{\eta}$ sűrűségfüggvényével, és ez

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\bar{g}(y)\, dy &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(-y)\, dy \\ &= -\int_{\infty}^{-\infty} f(x+y)g(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(y-x)\, dy. \end{aligned}$$

Az előbb elvégzett számolásokból következik a következő eredmény.

Tétel független valószínűségi változók összegének a sűrűségfüggvényéről. *Legyen ξ és η két független valószínűségi változó $f(\cdot)$ és $g(\cdot)$ sűrűségfüggvénnyel. Ekkor a $\xi+\eta$ összegnek is létezik sűrűségfüggvénye, és az az*

$$f*g(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)\,du, \quad -\infty<x<\infty$$

függvény.

1. megjegyzés. Felmerülhet a kérdés, hogy amennyiben $f(\cdot)$ és $g(\cdot)$ integrálható függvény, de nem teszünk fel semmilyen további tulajdonságot ezekről a függvényekről, akkor szükségszerűen létezik-e az $f*g(\cdot)$ konvolució? Rögzített x számra az $f*g(x)$ számot definiáló integrál nem feltétlenül létezik. Viszont a mértékelméletben belátják, hogy az olyan kivételes pontok halmaza, amelyekre ez az integrál nem létezik, kicsi, (pontosabban fogalmazava nulla Lebesgue mértékű halmaz). Ez azt jelenti, hogy a számegyenes majdnem minden pontjában a konvoluciót definiáló integrál létezik. Azokban a konkrét esetekben, amelyekkel találkozni fogunk ez a probléma nem merül fel. Ezért ezzel a kérdéssel nem foglalkozom, csak megemlítem a bizonyítás részleteinek tárgyalása nélkül, hogy az általános eset vizsgálata a következő észrevételen alapul.

Be lehet látni, hogy

$$\int_{\infty}^{\infty} |f|*|g|(u)\,du=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)||g(u)|\,du\,dv,$$

és az általános eredmény ebből az azonosságból és az integrálok alapvető tulajdonságaiból következik.

2. megjegyzés. Az $f*g(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\,dy$ konvolució kiszámolásában az integrálást az egész számegyenesen el kell végezni. Viszont a konvoluciós integrál definiciója alapján az integrálási tartományból ki lehet hagyni azt a halmazt, ahol $f(y)g(x-y)=0$. Például abban a fontos speciális esetben, ha az $f(\cdot)$ és $g(\cdot)$ sűrűségfüggvények olyanok, hogy $f(x)=0$ és $g(x)=0$ az $x\le 0$ értékekre az $f*g(x)=\int_0^x f(y)g(x-y)\,dy$ képlet érvényes, mert ekkor $f(y)g(x-y)\neq 0$ csak akkor, ha $y\ge 0$ és $x-y\ge 0$, azaz $0\le y\le x$.

Lássunk néhány példát a fenti eredmények alkalmazására.

Feladatok:

1.) Legyenek ξ_1 és ξ_2 független exponenciális eloszlású valószínűségi változók, azaz legyen sűrűségfüggvényük $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ ha $x\ge 0$, és $f(x)=0$, ha $x>0$. Számítsuk ki $\xi_1+\xi_2$ sűrűségfüggvényét.
Általánosabban, legyenek $\xi_1,\dots\xi_m$ független exponenciális eloszlású valószínűségi változók $\lambda>0$ paraméterrel. Mutassuk meg, hogy $\xi_1+\cdots+\xi_m$ sűrűségfüggvénye $f_m(x)=\frac{\lambda^m x^{m-1}}{(m-1)!}e^{-\lambda x}$, ha $x\ge 0$, és $f_m(x)<0$, ha $x<0$.

Megoldás: Ki kell számolnunk az $f*f(x)$ illetve $\underbrace{f*\cdots*f}_{m-\text{szer}}(x)$ konvoluciókat a fenti $f(x)$ sűrűségfüggvénnyel. Mivel $f(x)=0$, ha $x\le 0$, a konvoluciót meghatározó integrálban szereplő $f(y)f(x-y)$ integrandus nulla, ha $y\le 0$ vagy $x-y\le 0$. Innen a konvoluciót definiáló integrál csak $x\ge 0$ esetén lehet nulla, az $x\le 0$ esetben $f(y)f(x-y)>0$ minden y-ra nulla, és $x\ge 0$ esetén az $f(y)f(x-y)>0$ integrandus csak $0\le y\le x$ esetén nem nulla. Innen a $\xi_1+\xi_2$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f_2(x)=f*f(x)$ $x<0$-ra $f_2(x)=0$, és

$$
\begin{aligned}
f_2(x)=f*f(x)&=\int_{-\infty}^{\infty} f(y)f(x-y)\,dy=\int_0^x \lambda e^{-\lambda y}\lambda e^{-\lambda(x-y)}\,dy\\
&=\int_0^x \lambda^2 e^{-\lambda x}\,dy=\lambda^2 x e^{-\lambda x},\quad \text{ha } x\ge 0.
\end{aligned}
$$

Hasonlóan, ha $f_m(x)=\underbrace{f*\cdots*f}_{m-\text{szer}}(x)$ jelöli $\xi_1+\cdots\xi_m$ sűrűségfüggvényét, akkor $f_m(x)=0$ minden $m\ge 1$ számra, ha $x<0$. Azt állítom, hogy $f_m(x)=\frac{\lambda^m x^{m-1}}{(m-1)!}e^{-\lambda x}$, ha $x\ge 0$. Ezen állítás bizonyításához elég belátni teljes indukcióval azt, hogy $f_{m-1}*f(x)=f_m(x)$ a fent definiált f_m függvényekkel. Viszont

$$
\begin{aligned}
f_{m-1}*f(x)&=\int_{-\infty}^{\infty} f_{m-1}(y)f(x-y)\,dy=\int_0^x \lambda^{m-1}\frac{y^{m-2}}{(m-2)!}\lambda e^{-\lambda y}e^{-\lambda(x-y)}\,dy\\
&=\lambda^m e^{-\lambda x}\int_0^x \frac{y^{m-2}}{(m-2)!}\,dy=e^{-\lambda x}\frac{\lambda^m x^{m-1}}{(m-1)!},\quad \text{ha } x\ge 0.
\end{aligned}
$$

Másrészt $f_m(x)=0$, ha $x\le 0$.

2.) Legyenek $\xi_1,\xi_2,\dots,$ független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók valamely $\lambda>0$ paraméterrel, definiáljuk ezek $S_n=\sum\limits_{j=1}^n \xi_j$ részletösszegeit, és vegyünk valamely $x>0$ számot. Lássuk be minden $n=0,1,\dots$ számra, hogy annak a valószínűsége, hogy mind az $S_{n+1}>x$, mind az $S_n\le x$ események bekövetkeznek $\frac{(\lambda x)^n}{n!}e^{-\lambda x}$. (Az $S_0=0$ definiciót használjuk.) Ez azt jelenti, hogy az $S_1(\omega)$, $S_2(\omega),\dots$ (véletlen) sorozatnak a $[0,x]$ intervallumba eső pontjainak száma Poisson eloszlású λx paraméterrel.

Megoldás: $P(S_{n+1}>x,\,S_n\le x)=P(S_n\le x)-P(S_{n+1}\le x)=\int_0^x[f_n(u)-f_{n+1}(u)]\,du$, ahol $f_n(u)$ jelöli az S_n valószínűségi változó sűrűségfüggvényét. Innen az előző feladat eredménye alapján

$$
P(S_{n+1}>x,\,S_n\le x)=\int_0^x \frac{\lambda^n u^{(n-1)}}{(n-1)!}e^{-\lambda u}\,du-\int_0^x \frac{\lambda^{n+1}u^n}{n!}e^{-\lambda u}\,du.
$$

Parciális integrálással ($f'(u)=\lambda e^{-\lambda u}$ és $g(u)=\frac{\lambda^n u^n}{n!}$ választással) kapjuk, hogy

$$
\int_0^x \frac{\lambda^{n+1}u^n}{(n)!}e^{-\lambda u}\,du=-\frac{\lambda^n x^n}{n!}e^{-\lambda x}+\int_0^x \frac{\lambda^n u^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda u}\,du.
$$

A fenti két azonosságból következik a feladat állítása.

3.) Legyen ξ és η két független valószínűségi változó, mind a kettő $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$, $-\infty<x<\infty$, sűrűségfüggvénnyel. Lássuk be először, hogy $f(x)$ valóban sűrűségfüggvény. Számítsuk ki a $\xi+\eta$ valószínűségi változó $g(x)$ sűrűségfüggvényét.

Megoldás: Az $f(x)$ függvény minden pontban nem negatív. Annak ellenőrzéséhez, hogy $f(x)$ sűrűségfüggvény azt kell megmutatnunk, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$. Ez igaz, mert $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx=\frac{1}{2}\left[e^{x}\right]_{-\infty}^{0}+\frac{1}{2}\left[-e^{-x}\right]_{0}^{\infty}=1$.

A $\xi+\eta$ valószínűségi változó $g(x)$ sűrűségfüggvényét a $g(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(y)f(x-y)\,dy$ formula segítségével számíthatjuk ki. Számítsuk ki ezt az integrált. Tekintsük először azt az esetet, amikor $x\ge 0$. Az integrált számítsuk ki úgy, hogy nézzük mind a négy (elvileg) lehetséges esetet, amikor a) $y\ge 0$ és $x-y\ge 0$, b) $y\ge 0$ és $x-y<0$, c) $y<0$, $x-y\ge 0$, d) $y<0$, $x-y<0$. Számítsuk ki mind a négy esetben azt, hogy milyen tartományban veszi fel értékét az y változó, és mi az integrandus illetve az integrál értéke ebben a tartományban. Az a) esetben $0\le y\le x$, az integrandus $f(y)f(x-y)=\frac{1}{4}e^{-y}e^{-(x-y)}=\frac{e^{-x}}{4}$, az integrál pedig $\frac{xe^{-x}}{4}$ az a) tartományban. A b) esetben $y>x$ és $f(y)f(x-y)=\frac{e^{-y}e^{x-y}}{4}=\frac{e^{x-2y}}{4}$ az integrál pedig $\frac{1}{4}\int_{x}^{\infty} e^{x-2y}\,dy=\frac{e^{-x}}{8}$, a c) esetben $y<0$ és $f(y)f(x-y)=\frac{1}{4}e^{y}e^{-(x-y)}=\frac{e^{2y-x}}{4}$, az integrál pedig $\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{0} e^{2y-x}\,dy=\frac{e^{-x}}{8}$, a d) eset nem lehetséges, mert ekkor egyrészt az $y<0$ másrészt az $y>x\ge 0$ feltételeknek kellene teljesülniük. Innen azt kapjuk, hogy $g(x)=\frac{(x+1)e^{-x}}{4}$, ha $x>0$. Mivel f szimmetrikus függvény, ezért mint nem nehéz megmutatni, $f(x)$ is az. Tehát $g(-x)=g(x)$, és $g(x)=\frac{(|x|+1)e^{-|x|}}{4}$.

Megjegyzem, hogy az előző feladatokban tekintett konvoluciót csak akkor használhatjuk, ha olyan valószínűségi változók összegének a sűrűségfüggvényét akarjuk kiszámolni, amelyek függetlenek. Ez az oka annak, hogy a következő feladat megoldásában nem használhatjuk a konvoluciót, hanem más módszert kell alkalmaznunk.

4.) Legyen ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\lambda=1$ paraméterrel, azaz $F(x)=P(\xi<x)=1-e^{-x}$, ha $x\ge 0$, $F(x)=P(\xi<x)=0$, ha $x\le 0$. Számítsuk ki a $\xi+\xi^2$ valószínűségi változó eloszlás és sűrűségfüggvényét.

Megoldás: Jelölje $G(x)$ a $\xi+\xi^2$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. Ekkor a $G(x)=P(\{\omega\colon\ \xi(\omega)+\xi^2(\omega)<x\})$ eloszlásfüggvényt kell kiszámolni az $F(x)$ eloszlásfüggvény ismeretében. Viszont, ha ismerjük egy ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét, akkor az meghatározza a $P(\omega\colon\ \xi(\omega)\in B)$ halmazok valószínűségét minden ,,szép”, azaz Borel mérhető B halmazra. Vegyük észre, hogy jelen feladatban is ilyen jellegű problémát kell megoldani. Az ebben a feladatban megjelenő B halmaz egyszerű szerkezetű, és ezért ez a feladat könnyebben megoldható. Tekintsük az $A(\omega,x)=\{\omega\colon\ \xi(\omega)+\xi(\omega)^2<x\}$ halmazokat. Ezek valószínűségét kell kiszámítanunk. Ennek érdekében tekintsük az $B(x)=\{y\colon\ y+y^2<x\}$ hamazt. Vegyük észre, hogy $B(x)=\{y\colon\ y_1(x)<y<y_2(x)\}$, ahol $y_1(x)=\frac{-1-\sqrt{1+4x}}{2}$ és $y_2(x)=\frac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}$ az $y^2+y=x$ egyenlet kisebb és nagyobb megoldása, (feltéve, hogy a fenti megoldások léteznek, mint valós számok), és $A(\omega,x)=\{\omega\colon\ y_1(x)<$

$\xi(\omega) < y_2(x)\}$. Innen

$$G(x) = P\left(\{\omega\colon\, y_1(x) < \xi(\omega) < y_2(x)\}\right) = F(y_2(x)) - F(y_1(x)), \quad \text{ha } x \geq -\frac{1}{4},$$

azaz, ha a fenti $y_1(x)$ és $y_2(x)$ megoldások léteznek, és az $G(x) = 0$, ha ezek a megoldások nem léteznek, és az $A(\omega, x)$ halmaz üres. Így $G(x) = 0$, ha $x \leq -\frac{1}{4}$. Mivel $P(\xi \leq 0) = 0$, ezért $G(x) = P(\xi + \xi^2 < x) = 0$, ha $y_2(x) \leq 0$, azaz, ha $x \leq 0$. Másrészt $y_1(x) \leq 0 \leq y_2(x)$ minden $x \geq 0$ számra, ezért a $\xi + \xi^2$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a $G(x) = P\left(y_1(x) < \xi < y_2(x)\right) = P\left(\xi < y_2(x)\right) = 1 - e^{-y_2(x)} = 1 - \exp\left\{\frac{1-\sqrt{1+4x}}{2}\right\}$, ha $x \geq 0$, és $G(x) = 0$, ha $x \leq 0$. A $\xi + \xi^2$ valószínűségi változó $g(\cdot)$ sűrűségfüggvénye ennek deriváltja, ezért $g(x) = 0$, ha $x < 0$, és $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+4x}} \exp\left\{\frac{1-\sqrt{1+4x}}{2}\right\}$, ha $x \geq 0$.

5.) Legyenek ξ és η független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Lássuk be, hogy $\xi^2 + \eta^2$ exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\lambda = \frac{1}{2}$ paraméterrel.
Megoldás: $P(\xi^2 < x) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}) = 2\Phi(\sqrt{x}) - 1$, ha $x \geq 0$. Írjuk fel ξ^2 sűrűségfüggvényét és konvolúció segítségével a kívánt sűrűségfüggvényt. A ξ^2 valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $g(x) = \frac{\varphi(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x/2}$, ha $x \geq 0$, és $g(x) = 0$, ha $x < 0$, és $\xi^2 + \eta^2$ sűrűségfüggvénye

$$\begin{aligned} f(x) = g * g(x) &= \int_0^x \frac{1}{2\pi\sqrt{u(x-u)}} e^{-u/2} e^{-(x-u)/2}\, du \\ &= e^{-x/2} \int_0^1 \frac{1}{2\pi\sqrt{v(1-v)}}\, dv = \frac{1}{2} e^{-x/2}, \quad \text{ha } x \geq 0, \end{aligned}$$

és $f(x) = 0$, ha $x \leq 0$.

Megjegyzés: Az x paramétertől nem függő $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{v(1-v)}}\, dv$ integrál értékét meghatározza az a tény, hogy a végeredményként kapott függvény sűrűségfüggvény, ezért integrálja a számegyenesen eggyel egyenlő. De ki is tudjuk számolni ezt az integrált. Valóban, vegyük észre, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{v(1-v)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} - (v - \frac{1}{2})^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 - (2v-1)^2}},$$

ezért $u = 2v - 1$ helyettesítéssel

$$\int_0^x \frac{1}{2\pi\sqrt{v(1-v)}}\, dv = \int_{-1}^{2x-1} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-u^2}}\, du = \frac{1}{2\pi} \left[\arcsin x\right]_{-1}^{2x-1} = \frac{\arcsin(2x-1) + \frac{\pi}{2}}{2\pi}.$$

Innen következik, hogy a tekintett integrál értéke $x = 1$ esetén $\frac{1}{2}$. Ugyanis $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.

6.) Legyen ξ és η két független, a $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változó, azaz legyen ξ és η sűrűségfüggvénye $f(x)=1$, ha $-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}$, és $f(x)=0$ egyébként. Számoljuk ki $\xi+\eta$ sűrűségfüggvényét.

Megoldás: A $\xi+\eta$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye a $g(x)=\int f(y)f(x-y)\,dy$ függvény, ahol $f(x)$ a $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ intervallumban egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye. Ezért $f(y)f(x-y)=1$, ha $-\frac{1}{2}\le y\le\frac{1}{2}$, és $-\frac{1}{2}\le x-y\le\frac{1}{2}$, azaz $-\frac{1}{2}+x\le y\le\frac{1}{2}+x$, és nulla egyébként. Ez azt jelenti, hogy a $\xi+\eta$ összeg $g(x)$ sűrűségfüggvénye az x pontban megegyezik a $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\cap\left[-\frac{1}{2}+x,\le\frac{1}{2}+x\right]$ intervallum hosszával. Ha $|x|>1$, akkor a fenti metszet üres, ezért ebben az esetben $g(x)=0$. Ha $0\le x\le 1$, akkor ez a metszet a $\left[-\frac{1}{2}+x,\frac{1}{2}\right]$ intervallum, és ennek hossza $1-x$, azaz ebben az esetben $g(x)=1-x$. Ha $-1\le x\le 0$, akkor ez a metszet a $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}+x\right]$ intervallum amelynek hossza $1+x=1-|x|$, azaz $g(x)=1+x=1-|x|$ ebben az esetben. Ez azt jelenti, hogy $g(x)=1-|x|$, ha $|x|\le 1$, és $g(x)=0$, ha $|x|>1$.

Megadok egy másik megoldást is, amely a korábban tárgyalt geometriai érvelésen alapul.

Számítsuk ki először a $\xi+\eta$ valószínűségi változó $G(x)$ eloszlásfüggvényét. Definiáljuk a $K=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\times\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ négyzetet, és jelölje λ a Lebesgue mértéket, azaz a területet a síkon. Ekkor a sík tetszőleges $A\subset R^2$ mérhető részhalmazára igaz az, hogy $P((\xi,\eta)\in A)=\lambda(A\cap K)$. Speciálisan, $G(x)=P(\xi+\eta<x)=\lambda(K\cap\{(u,v)\colon\ u+v<x\})$. Ha $x\le -1$, akkor $G(x)=0$, ha $-1\le x\le 0$, akkor $G(x)$ a $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}+x\right)$ és $\left(\frac{1}{2}+x,-\frac{1}{2}\right)$ pontok által meghatározott háromszög területe $\frac{1}{2}(1+x)^2$. Hasonlóan, ha $x\ge 1$, akkor $G(x)=1$. Ha $0\le x\le 1$, akkor a $G(x)$ eloszlásfüggvény megegyezik annak a poligonnak területével, amelyet úgy kapunk, hogy a K négyzetből kihagyjuk a $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}+x\right)$ és $\left(-\frac{1}{2}+x,\frac{1}{2}\right)$ pontok által meghatározott háromszöget. Ezért $G(x)=1-\frac{1}{2}(1-x)^2$ ebben az esetben. A $G(x)$ függvényt deriválva kapjuk, hogy $g(x)=0$, ha $|x|\le 1$, $g(x)=1+x$, ha $-1\le x\le 0$, és $g(x)=1-x$, ha $0\le x\le 1$.

Tekintsünk két a második előadáson tárgyalt feladatot, amelyet annak idején geometriai meggondolások alapján oldottunk meg. Megmutatom, hogy ezek a feladatok megoldhatóak a most tárgyalt konvolució segítségével is.

7.) Két ember 8 és 9 óra között megjelenik egy téren egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással. Mind a kettő félórát vár a másikra, és ha az addig nem jön, akkor hazamegy. Mi a valószínűsége annak, hogy találkoznak?

8.) Két botot véletlenszerűen, egyenletes eloszlással eltörünk. A két rövidebb darabot összeragasztjuk. Mi az így kapott új bot hosszának az $F(u)$ eloszlásfüggvénye?

A 7.) feladat megoldása. Jelölje ξ_j, $j=1,2$, azt a valószínűségi változót, amely azt adja meg, hogy hány (0 és 1 közötti számmal kifejezhető) órával 8 óra után jelent meg a j-ik ember a helyszínen. Ekkor ξ_1 és ξ_2 független a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Minket a $-\frac{1}{2}\le\xi_1-\xi_2\le\frac{1}{2}$ események valószínűsége érdekel. Mivel $\xi_1-\xi_2=\xi_1+(-\xi_2)=\xi_1+\bar\xi_2$-t is írhatunk, ahol $\bar\xi_2=-\xi_2$, és $\bar\xi_2$ sűrűségfüggvényét könnyen kiszámolhatjuk, ezért a konvolucióról tanultak alapján ezt a feladatot meg tudjuk oldani. Az $F(u)=P(\xi_1-\xi_2<u)$

eloszlás sűrűségfüggvénye a $g(u) = f_1 * f_2(u)$ konvolució, ahol $f_1(u) = 1$, ha $0 \le u \le 1$, $f_1(u) = 0$, különben, $f_2(u) = 1$, ha $-1 \le u \le 0$, $f_2(u) = 0$ különben. Ekkor a minket érdeklő mennyiség az $F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(-\frac{1}{2}\right) = \int_{-1/2}^{1/2} g(u)\,du$ integrál. Továbbá,

$$g(x) = f_1 * f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(u) f_2(x-u)\,du = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)f(x-u)\,du, \quad -\infty < x < \infty,$$

ahol $f(u) = 1$, ha $\frac{1}{2} \le u \le \frac{1}{2}$, $f(u) = 0$, ha $u \ge \frac{1}{2}$.
Az előző feladat megoldásában láttuk, hogy $g(u) = 1-u$, ha $0 < u < 1$ $g(u) = 1+u$, ha $-1 < u < 0$. Innen $F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(-\frac{1}{2}\right) = \int_{-1/2}^{1/2}(1-|u|)\,du = \frac{3}{4}$.
A 8.) feladat megoldása. Jelölje ξ_j, $j = 1, 2$, azt a valószínűségi változót, amely azt adja meg, hogy a j-ik bot rövidebb végének mi a hossza. Ekkor ξ_1, és ξ_2 független valószínűségi változók, amelyek sűrűségfüggvénye az az $f(\cdot)$ függvény, amelyre $f(x) = 2$, ha $0 \le x \le \frac{1}{2}$, és $f(x) = 0$ egyébként. Minket a $\xi_1 + \xi_2$ valószínűségi változó eloszlása érdekel. Viszont $\xi_1 + \xi_2$ sűrűségfüggvénye $g(x) = f * f(x)$, ahonnan $g(x) = 2-|2-4x|$, ha $0 \le x \le 1$, $g(x) = 0$ különben. Ezt kiintegrálva megkapjuk az eredményt, amelyet a a következő képletek adnak meg: $F(u) = 0$, ha $u \le 0$, $F(u) = 1 - 2u^2$, ha $0 \le u \le \frac{1}{2}$, $F(u) = 1 - 2(1-u)^2 = 4u - 2u^2 - 1$, ha $\frac{1}{2} \le u \le 1$. Ha $u \ge 1$, akkor $F(u) = 1$.

További feladatok. Poisson folyamatok jellemzése.

9.) Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots,$ független exponenciális eloszlású valószínűségi változók valamely $\lambda > 0$ paraméterrel, és tekintsük az $S_k = \sum\limits_{j=1}^{k} \xi_j$, $k = 1, 2, \dots,$ részletösszegeket. Mutassuk meg, hogy az $(S_1, \dots, S_{n+1})$ véletlen vektornak van $g(u_1, \dots, u_{n+1})$ sűrűségfüggvénye, és az a $g(u_1, \dots, u_{n+1}) = \lambda^{n+1} e^{-\lambda u_{n+1}}$ függvény, ha $0 \le u_1 < \cdots < u_{n+1}$, és $g(u_1, \dots, u_{n+1}) = 0$ egyébként.
Megoldás: Ez levezethető abból a tényből, hogy a $(\xi_1, \dots, \xi_{n+1})$ véletlen vektor sűrűségfüggvénye a $h(v_1, \dots, v_{n+1}) = \prod\limits_{j=1}^{n+1} k(v_j)$ függvény, ahol $k(v) = \lambda e^{-\lambda v}$, ha $v \ge 0$, és $k(v) = 0$, ha $v < 0$. A feladat állításának bizonyítása érdekében írjuk fel a

$$\begin{aligned} P(S_1 < x_1, \dots, S_{n+1} < x_{n+1}) &= P((\xi_1, \dots, \xi_{n+1}) \in A_{n+1}) \\ &= \int_{A_{n+1}} h(v_1, \dots, v_{n+1})\,dv_1 \dots dv_{n+1} \end{aligned}$$

azonosságot, ahol $A_{n+1} = A_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \{(v_1, \dots, v_{n+1})\colon v_1 < x_1, v_1+v_2 < x_2, \dots, v_1 + \cdots + v_{n+1} < x_{n+1}\}$. Ezután alkalmazzuk az $u_j = v_1 + \cdots + v_j$, $1 \le j \le n+1$, transzformációt. E transzformáció Jacobianja 1, másrészt $h(v_1, \dots, v_{n+1}) = \prod\limits_{j=1}^{n+1} k(u_j - u_{j-1})$, $u_0 = 0$ választással, ahonnan $h(v_1, \dots, v_{n+1}) = g(u_1, \dots, u_{n+1})$, azaz $h(v_1, \dots, v_{n+1}) = \lambda^{n+1} e^{-u_{n+1}}$, ha $0 < u_1 < \cdots < u_{n+1}$ mert ez felel meg a $v_j > 0$, $1 \le j \le n+1$ feltételnek, és $h(v_1,\dots,v_{n+1}) = g(u_1,\dots,u_{n+1}) = 0$, egyébként. Innen azt kapjuk, hogy

$$P(S_1 < x_1,\dots,S_{n+1} < x_{n+1}) = \int_{B_{n+1}} g(u_1,\dots,u_{n+1})\,du_1\dots du_n,$$

$B_{n+1} = \{(u_1,\dots,u_{n+1})\colon\ u_1 < x_1,\dots,u_{n+1} < x_{n+1}\}$ választással, és ez volt a bizonyítandó állítás.

10.) Legyenek $\xi_1,\xi_2,\dots,$ független exponenciális eloszlású valószínűségi változók valamely $\lambda > 0$ paraméterrel, és tekintsük az $S_k = \sum\limits_{j=1}^{k} \xi_j$, $k = 1,2,\dots,$ részletösszegeket. Rögzítsünk egy $A > 0$ valamint egy n pozitív egész számot, és definiáljuk segítségükkel a következő $C = C(A,n)$ eseményt. $C = \{\omega\colon\ S_n(\omega) < A < S_{n+1}(\omega)\}$. Mutassuk meg, hogy az $(S_1,\dots,S_n)$ véletlen vektor feltételes eloszlásának feltéve a C eseményt van $f(u_1,\dots,u_n)$ sűrűségfüggvénye, és $f(u_1,\dots,u_n) = \frac{n!}{A^n}$, ha $0 \le u_1 < u_2 < \dots < u_n \le A$, $f(u_1,\dots,u_n) = 0$ egyébként. Ez azt jelenti, hogy $P(S_1 < x_1, S_2 < x_2,\dots,S_n < x_n|C) = \int_{u_1<x_1,\dots,u_n<x_n} f(u_1,\dots,u_n)\,du_1\dots du_n$ minden $x_1,\dots,x_n$ valós szám-n-esre ezzel az $f(u_1,\dots,u_n)$ függvénnyel.

Megoldás: Rögzítsünk bizonyos $0 < x_1,\dots,x_n \le A$ számokat, definiáljuk a $D = D(x_1,\dots,x_n) = \{\omega\colon\ S_1(\omega) < x_1,\dots,S_n(\omega) < x_n\}$ eseményt. Vegyük észre, hogy az előző feladat eredménye alapján

$$\begin{aligned} P(D \cap C) &= \int_B f_0(u_1,\dots,u_n)\lambda^n e^{-\lambda v}\,du_1\dots du_n\,dv \\ &= \int_{B_0} f_0(u_1,\dots,u_n)\,du_1\dots du_n \int_A^\infty \lambda^{n+1} e^{-\lambda v}\,dv, \end{aligned}$$

ahol $f_0(u_1,\dots,u_n) = 1$, ha $0 \le u_1 < u_2 < \dots < u_n$, $f_0(u_1,\dots,u_n) = 0$ egyébként, $B = B(x_1,\dots,x_n,v) = \{(u_1,\dots,u_n,v)\colon\ u_1 \le x_1,\dots,u_n < x_n, v > A)\}$, és $B_0 = B_0(x_1,\dots,x_n) = \{(u_1,\dots,u_n)\colon\ u_1 \le x_1,\dots,u_n < x_n)\}$. Ugyanis a $P(D \cap C)$ valószínűség kiszámításához az $(S_1,\dots,S_{n+1})$ véletlen vektor sűrűségfüggvényét kell integrálni az $U = \{(u_1,\dots,u_n,u_{n+1})\colon\ u_1 \le x_1,\dots,u_n < x_n, A < u_{n+1} < \infty\}$ halmazon, és ez a sűrűségfüggvény $f_0(u_1,\dots,u_n)\lambda^{n+1}e^{-\lambda u_{n+1}}$-gyel egyenlő az U halmazon az előző feladat eredménye alapján.

Speciálisan $x_1 = x_2 = \dots = x_n = A$ választással $P(C) = \frac{A^n}{n!}\int_A^\infty \lambda^{n+1}e^{-\lambda v}\,dv$, mert

$$\int_{B_0(A,\dots,A)} f_0(u_1,\dots,u_n)\,du_1\dots du_n = \frac{A^n}{n!}.$$

(Az integrálást elvégezve megkapjuk a $P(C) = \frac{(\lambda A)^n}{n!}e^{-\lambda A}$ formulát, azaz a 2. feladat egy másik megoldását.) Innen

$$\begin{aligned} P(S_1 < x_1, S_2 < x_2,\dots,S_n < x_n|C) &= P(D|C) = \frac{P(D \cap C)}{P(C)} \\ &= \int_{u_1<x_1,\dots,u_n<x_n} f(u_1,\dots,u_n)\,du_1\dots du_n, \end{aligned}$$

és ezt kellett belátnunk.

11.) Legyenek $\xi_1,\dots,\xi_n$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók a számegyenesen valamely $g(x)$ sűrűségfüggvénnyel. Vegyük e valószínűségi változók

$$\xi_1^{(1)}<\xi_2^{(1)}<\cdots<\xi_n^{(n)}$$

nagyság szerinti sorbarendezését. (Az eredeti $\xi_1,\dots,\xi_n$ valószínűségi változókat egy $g(x)$ sűrűségfüggvényű mintának, a $\xi_1^{(1)}<\xi_2^{(1)}<\cdots<\xi_n^{(n)}$ sorozatot pedig $g(x)$ sűrűségfüggvényű rendezett mintának nevezik a matematikai statisztikában.) Lássuk be, hogy a $(\xi_1^{(1)},\xi_2^{(1)},\dots,\xi_n^{(n)})$ véletlen vektornak van sűrűségfüggvénye, és az $\bar g(x_1,\dots,x_n)=n!\prod\limits_{j=1}^n g(x_j)$ alakú, ha $x_1<x_2,\dots<x_n$, és $\bar g(x_1,\dots,x_n)=0$, ha az $x_1<x_2,\dots<x_n$ egyenlőtlenségrendszer nem teljesül. Speciálisan, ha a ξ valószínűségi változók egyenletes eloszlásúak a számegyenes valamely B, $<\lambda(B)<\infty$ mérhető halmazán, ahol $\lambda(\cdot)$ a Lebesgue mértéket jelöli, akkor $\bar g(x_1,\dots,x_n)=\frac{n!}{\lambda(B)}$, ha $x_1<x_2,\dots<x_n$, és $x_j\in B$ minden $1\le j\le n$ indexre, és $\bar g(x_1,\dots,x_n)=0$ egyébként.

Megoldás: Azt kell belátni, hogy az n-dimenziós tér tetszőleges $C\subset R^n$ (mérhtető) részhalmazára

$$P((\xi_1^{(1)},\xi_2^{(2)},\dots,\xi_n^{(n)})\in C)=\int_C \bar g(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots\,dx_n.$$

Elég ezt az azonosságot a $C\subset A$, $A=\{(x_1,\dots,x_n)\colon\ x_1<x_2,\dots<x_n\}$ alakú halmazokra belátni, mert $C\in R^n\setminus A$ esetén mind $P((\xi_1^{(1)},\xi_2^{(2)},\dots,\xi_n^{(n)})\in C)=0$, mind $\int_C \bar g(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots\,dx_n=0$. Adva egy $C\subset A$ (mérhető) halmaz vezessük be az $\{1,\dots,n\}$ halmaz $\pi\in\Pi_n$ permutációinak a halmazát, és legyen $C_\pi=\{(x_{\pi(1)},\dots,x_{\pi(n)})\colon\ (x_1,\dots,x_n)\in C,\}$ minden $\pi\in\Pi_n$ permutációra, és $\bar C=\bigcup\limits_{\pi\in\Pi_n}C_\pi$. Ekkor

$$\{\omega\colon\ ((\xi_1^{(1)}(\omega),\xi_2^{(2)}(\omega),\dots,\xi_n^{(n)}(\omega))\in C\}=\{\omega\colon\ ((\xi_1(\omega),\xi_2(\omega),\dots,\xi_n)(\omega))\in\bar C\},$$

a C_π halmazok diszjunktak különböző π permutációkra, és

$$\begin{aligned}\int_C \bar g(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots\,dx_n&=\int_{\bar C} g(x_1)\cdots g(x_n)\,dx_1\dots\,dx_n\\&=P((\xi_1,\dots,\xi_n)\in\bar C).\end{aligned}$$

Innen következik a feladat állítása az általános esetben. Mivel egy a B halmazon egyenletes eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $g(x)=\frac{1}{\lambda(B)}$, ha $x\in B$, $g(x)=0$ egyébként, innen következik a feladat második állítása is.

12.) Tekintsük a következő két véletlen ponthalmazt:

a.) Veszünk független λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változókat, vesszük ezek $S_1,S_2,\dots$ részletösszegeit. Választunk egy $A>0$ számot, és az $S_1, S_2, \dots$ számok közül azokat őrizzük meg, amelyek kisebbek, mint ez az A szám.

b.) Veszünk véletlen számú pontot λA paraméterű Poisson eloszlással. E pontokat egymástól függetlenül ledobjuk a $[0, A]$ intervallumra egyenletes eloszlással.

Lássuk be, hogy e két pontrendszer eloszlása egyforma eloszlású, azaz ugyanolyan valószínűséggel tartalmaznak n pontot minden $n = 0, 1, 2 \dots$ számra, és ha n pontot tartalmaznak, akkor ezt az n pontot nagyság szerint rendezve ugyanazt az eloszlást kapjuk mind a két esetben.

Megoldás: A 2.) feladat eredménye alapján annak a valószínűsége, hogy az a) rendszer pontosan n pontot tartalmaz Poisson eloszlású λA paraméterrel, tehát ugyanannyi, mint a b) esetben. Továbbá mind a két esetben, ha a rendszer n pontot tartalmaz, akkor ezek nagyság szerint rendezve egy n elemű egyenletes eloszlású mintát alkotnak a $[0, A]$ intervallumban. Ez az utolsó két feladat állításából következik.

Megjegyzés: Az előző feladat az úgynevezett Poisson folyamatok egy fontos jellemzését adja meg. Egy valamely $[0, A]$ intervallumon definiált Poisson folyamat olyan a $t \in [0, A]$ intervallum pontjaival indexelt $X_t(\omega)$, $0 \le t \le A$, valószínűségi változók rendszere, amelyre az igaz, hogy pozitív számok növekvő $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n \le A$ sorozatára az $X(t_1)$, $X(t_2) - X(t_1)$, $\dots$, $X(t_n) - X(t_{n-1})$ valószínűségi változók függetlenek és Poisson eloszlásúak λt_1, $\lambda(t_2 - t_1)$, $\dots$, $\lambda(t_n - t_{n-1})$ paraméterekkel egy $\lambda > 0$ konstanssal. Ezenkívül azt is feltehetjük, hogy minden rögzített ω-ra a $X_t(\omega)$ függvény, mint a t paraméter függvénye, (ezt a függvényt az irodalomban trajektóriának szokás nevezni) szép függvény. Ez egy egész értékeket felvevő monoton függvény, amely véges sok helyen 1-et ugrik, két ugráshely között az értéke konstans. Az, hogy létezik Poisson folyamat könnyen levezethető a 6. előadás 15. és 16. feladataiból. Az előző feladat és a Poisson folyamatoknak a hatodik előadás feladatainak segítségével megadott konstrukciója a Poisson folyamatok egy fontos tulajdonságára mutat rá. Ezt a tulajdonságot szemléletesen úgy fogalmazhatjuk meg, hogy egy Poisson folyamat ugrásai között eltelt időszakok egymástól független exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Ez az eredmény összhangban van a szemléletünkkel. Az a heurisztikus magyarázat, amely megmagyarázta, hogy egy adott időintervallumban lehullt csillagok száma Poisson eloszlású egyben azt is magyarázza, hogy ha egyszerre tekintjük minden t időpontra a megfigyelés kezdetétől mért t időpontig lehullt csillagok (véletlen) $X(t)$ számát, akkor ezek a valószínűségi változók Poisson folyamatot alkotnak. Másrészt természetes azt várni, hogy az egyes csillaghullások közötti időintervallumok egymástól függetlenek és exponenciális eloszlásúak, az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonsága miatt. A fenti eredmény e heurisztikus kép pontos megfogalmazását és bizonyítását tartalmazza.

A konvolució operátornak még egy tulajdonságáról fogok beszélni. Láttuk, hogy ha az $f(x) = 1$, ha $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$, $f(x) = 0$, ha $|x| \le \frac{1}{2}$ függvénynek, azaz az egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénynek a konvolucióját tekintjük önmagával, akkor a konvolució az $f * f(x) = 1 - |x|$, ha $|x| \le 1$, és $f * f(x) = 0$, ha $|x| \ge 1$. Ez azt jelenti, hogy ebben a példában az eredeti sűrűségfüggvény két pontban, az $x = \pm\frac{1}{2}$ pontban nem folytonos, viszont ennek konvoluciója önmagával már mindenütt folytonos. Hasonlóan egy exponenciális eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye az $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ha $x \geq 0$, és $f(x) = 0$, ha $x > 0$ sűrűségfüggvény. Ez a függvény nem folytonos az origóban, viszont ennek konvoluciója önmagával már mindenüttt folytonos. Sőt, amennyiben e sűrűségfüggvény m-szeres konvolucióját alkalmazzuk m alkalommal, akkor az így kapott függvény még simább, $m-1$-szer differenciálható. Ezek a példák azt sugallják, hogy a konvolució operátor folytonosabbá teszi a függvényeket. Ez az elképzelés helyes. Nem fogom ezt a kérdést részletesebben tárgyalni, de a következő feladatban megfogalmazok egy olyan állítást, amelyik ilyen jellegű eredményt mond ki.

13.) Legyen $f(\cdot)$ és $g(\cdot)$ két függvény, amelyek k-szor illetve l-szer differenciálható, és ezek a differeniálhányadosok szintén integrálható függvények. Ekkor az $f * g(\cdot)$ konvolució $k+l$-szer differenciálható függvény.

Megoldás: Az $f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)\,du$ függvényt l-szer differenciálva, és felhasználva, hogy (legalábbis szép esetekben) a differenciálás és integrálás sorrendje felcserélhető, kapjuk hogy $\frac{d^l}{dx^l} f*g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g_l(x-u)\,du$, ahol $g_l(x) = \frac{d^l}{dx^l} g(x)$. Írjuk át ezt az azonosságot $\frac{d^l}{dx^l} f*g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)g_l(u)\,du$ alakba. Ekkor további k differenciálás segítségével azt kapjuk, hogy $\frac{d^{k+l}}{dx^{k+l}} f*g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_k(x-u)g_l(u)\,du$, ahol $f_k(x) = \frac{d^k}{dx^k} f(x)$. Innen következik a feladat állítása.