

A JÚNIUS 29.-i VIZSGA FELADATAI

1. Egy szabályos dobókockát feldobunk egymás után végtelen sokszor. Mi annak a valószínűsége, hogy a hatodik hárommal osztható szám a harmadik hárommal osztható dobás után 20 dobással később jelenik meg?
2. Legyen adva két urna, mind a kettőben 9 piros és 6 fehér golyó. Egymás után 15-ször kihúzzunk egy-egy golyót mind a két urnából visszatevés nélkül. Tekintsük azokat a húzás párokat, amelyek során különböző színű golyókat húztunk. Számítsuk ki az ilyen húzás párok számának a várható értékét és szórásnégyzetét.
3. Egy teszt-vizsgán, ahol két lehetőség közül kell kiválasztani a helyes választ ketten vesznek részt. Az első résztvevő p_1 , a második résztvevő pedig p_2 valószínűséggel tudja a helyes választ, továbbá a vizsga két résztvevője egymástól függetlenül tudja vagy nem tudja, hogy mi a helyes válasz. Mindkét résztvevő a jó választ jelöli meg, ha tudja azt, ellenkező esetben pedig mindentől függetlenül egyforma valószínűséggel véletlenül bejelöli a két lehetséges válasz valamelyikét. Mi a feltételes valószínűsége annak, hogy mind a két résztvevő a helyes választ jelölte be, feltéve, hogy ugyanazt a választ adták?
4. Legyen ξ normális eloszlású valószínűségi változó 1 várható értékkel és 2 szórásnégyzettel, azaz legyen ξ sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-(x-1)^2/4}$. Számoljuk ki a ξ valószínűségi változó $E\xi^4$ negyedik momentumát.
5. A következő játékot játszunk. Két szabályos pénzdarabot feldobnak egymás után 10 000 alkalommal. Ha egy dobás eredménye két fejdobás akkor 2 forintot nyerünk, ha az eredmény két írásdobás akkor 2 forintot veszünk, ha az eredmény egy fej és egy írásdobás akkor 1 forintot nyerünk. Adjunk jó becslést a mellékelt normális eloszlástáblázat alapján annak a valószínűségére, hogy nyereményünk összege 4850 és 5300 forint között lesz.
6. Mikor mondjuk, hogy egy (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mezőn adott $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók egymástól függetlenek?
7. Az alábbi négy állítás közül melyik helyes és melyik nem:
 - a.) Ha ξ és η két valószínűségi változó egy valószínűségi mezőn, akkor a $\xi + \eta$ összeg várható értéke egyenlő a ξ és η valószínűségi változók várható értékének az összegével, azaz $E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$.
 - b.) Ha ξ és η két független valószínűségi változó egy valószínűségi mezőn, akkor a $\xi + \eta$ összeg várható értéke egyenlő a ξ és η valószínűségi változók várható értékének az összegével, azaz $E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$.
 - c.) Ha ξ és η két valószínűségi változó egy valószínűségi mezőn, akkor a $\xi + \eta$ összeg szórásnégyzete egyenlő a ξ és η valószínűségi változók szórásnégyzetének az összegével, azaz $\text{Var}(\xi + \eta) = \text{Var}\xi + \text{Var}\eta$.
 - d.) Ha ξ és η két független valószínűségi változó egy valószínűségi mezőn, akkor a $\xi + \eta$ összeg szórásnégyzete egyenlő a ξ és η valószínűségi változók szórásnégyzetének az összegével, azaz $\text{Var}(\xi + \eta) = \text{Var}\xi + \text{Var}\eta$.