A Valószínűségszámítás II. előadássorozat első témája.

A VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS MEGALAPOZÁSA

Ezen előadássorozat első témája a valószínűségszámítás megalapozása. Felidézem a valószínűségszámításnak a bevezető valószínűségszámítás előadássorozatban ismertetett Kolmogorov-féle modelljét, illetve az ehhez kapcsolódó legfontosabb fogalmakat. Felmerül a kérdés, hogy ez a modell megfelel-e céljainknak. A fő probléma az, hogy minden természetes, véletlen jellegű jelenség vizsgálható-e ebben a modellben. Erre a kérdésre a valószínűségszámítás Kolmogorov-féle alaptétele alapján tudunk pozitív választ adni. Ismertetem ezt az eredményt bizonyításával együtt. Ezelőtt felelevenítek néhány fontos fogalmat.

A valószínűségszámítás (Kolmogorov-féle) modelljének az alapvető fogalma a valószínűségi mező. Felidézem ennek definicióját.

Valószínűségi mező modellje. *Egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ hármas valószínűségi mező, ha Ω egy halmaz, amelyet a biztos eseménynek nevezünk, $\mathcal{A}$ egy az Ω bizonyos részhalmazaiból álló σ-algebra, P az $\mathcal{A}$ σ-algebrán értelmezett egyre normált nem negatív σ-additív halmazfüggvény. Az ilyen halmazfügggvényeket (egyre normált vagy valószínűségi) mértéknek is szokták hívni az $\mathcal{A}$ σ-algebrán.*

Felidézek néhány az előbbi definicióban használt fogalmat is.

Algebra és σ-algebra definiciója. *Legyen adva egy Ω halmaz, és az Ω halmaz bizonyos $A \subset \Omega$ részhalmazainak $\mathcal{A}$ rendszere. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{A}$ algebra, ha tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ halmazra ennek komplementere, az $\Omega \setminus A$ halmaz is eleme a $\mathcal{A}$ halmazrendszernek, azaz $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$, és az $\emptyset$ üres halmaz is eleme az $\mathcal{A}$ algebrának, azaz $\emptyset \in \mathcal{A}$, továbbá, ha $A \in \mathcal{A}$ és $B \in \mathcal{A}$ elemei az $\mathcal{A}$ halmazrendszernek, akkor e halmazok metszete és uniója is teljesíti az $A \cap B \in \mathcal{A}$ valamint $A \cup B \in \mathcal{A}$ feltételeket.*

Az $\mathcal{A}$ algebra akkor σ-algebra, ha ezen kívül teljesíti a következő feltételeket is: Ha $A_1, A_2, \dots,$ megszámlálható sok halmaz, melyek az $\mathcal{A}$ algebra elemei, azaz $A_n \in \mathcal{A}$ minden $n = 1, 2, \dots$ számra, akkor ezek metszete és uniója is benne van az $\mathcal{A}$ σ-algebrában, azaz $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, és $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Additív és σ-additív halmazfüggvény definiciója. *Legyen adva egy Ω halmaz részhalmazaiból álló $\mathcal{A}$ algebra vagy σ-algebra. Azt mondjuk, hogy egy $\mu(A)$, $A \in \mathcal{A}$, halmazfüggvény additív, ha bármely diszjunkt $A \in \mathcal{A}$ és $B \in \mathcal{A}$ halmazra $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. Tekintsük először azt az esetet, amikor $\mathcal{A}$ σ-algebra. Azt mondjuk, hogy ez a μ halmazfüggvény nemcsak additív, hanem σ-additív is, ha minden diszjunkt $A_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \dots,$ halmazokból álló sorozatra $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. Ez a σ-additív halmazfüggvény nem-negatív, ha minden $A \in \mathcal{A}$ halmazra $\mu(A) \ge 0$, és egyre normált, ha $\mu(\Omega) = 1$. Nem negatív halmazfüggvényt mértéknek, egyre normált mértéket valószínűségi mértéknek hívunk.*

Hasonlóan definiálhatjuk a σ-additív halmazfüggvény fogalmát akkor, ha $\mathcal{A}$ algebra, de nem feltétlenül σ-algebra. Azt mondjuk, hogy $\mu(A)$, $A \in \mathcal{A}$, σ-additív halmazfüggvény az $\mathcal{A}$ algebrán, ha minden diszjunkt $A_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \dots$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, halmazokból álló sorozatra $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. (A különbség a σ-algebrán és algebrán definiált σ-additív halmazfüggvény között az, hogy az utóbbi esetben a kívánt egyenlőtlenségek teljesüléséhez fel kell tenni a $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ feltételt is.)

Már a bevezető valószínűségszámítás előadásban láttuk, hogyan alkalmazzuk ezt a modellt valószínűségszámítási feladatok megoldására. Az $\omega \in \Omega$ elemeket (pontokat) neveztük elemi eseménynek, az összes elemi esemény unióját, Ω-t a biztos eseménynek, és kijelöltük az Ω biztos esemény bizonyos részhalmazait, melyek egy $\mathcal{A}$ σ-algebrát alkotnak. Az $A \in \mathcal{A}$ halmazoknak (eseményeknek) definiáltuk a valószínűségét, de az $\mathcal{A}$ σ-algebrába nem tartalmazó halmazoknak nem beszéltünk a valószínűségéről. Véges sok diszjunkt halmaz uniójának a valószínűsége megegyezik az egyes halmazok (események) valószínűségének az összegével, azaz a valószínűség additív, sőt ennek az állításnak igaz egy erősebb formája. Megszámlálhatóan végtelen sok diszjunkt esemény uniójának a valószínűsége is megegyezik az egyes események valószínűségének az összegével, a valószínűség σ-additív. Már a bevezető valószínűségszámítás előadássorozat bizonyos számolásaiban kihasználtuk, hogy a valószínűség nemcsak additív, hanem σ-additív is. Ez biztosítja azt, hogy végtelen sok diszjunkt esemény valószínűségeinek az összegével úgy számolhatunk, mint ahogy azt az analízisben megszoktuk.

Amikor olyan valószínűségi mezőt akarunk konstruálni, amelyben a minket érdeklő véletlen jelenségeket tanulmányozni tudjuk a fő matematikai nehézséget annak bizonyítása okozza, hogy a valószínűségi mezőn definiált valószínűségi mérték valóban mérték, tehát nemcsak additív, hanem σ-additív is. Az $\mathcal{A}$ σ-algebra bevezetése az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezők definiciójában azért volt hasznos, mert a P valószínűségi mérték σ-additivitása a minket érdeklő esetekben bizonyítható egy elég gazdag σ-algebrán, de ez a σ-additivitás sokszor nem maradna érvényben, ha a P mértéket az Ω (biztos) esemény összes részhalmazára is megpróbálnánk kiterjeszteni. Ugyanakkor az a megszorítás, hogy bizonyos halmazoknak nincs valószínűsége nem okoz valódi problémát. Gyakorlati alkalmazásokban mindig a következő jellegű problémával találkoznunk. Bizonyos szép halmazoknak tudjuk a valószínűségét, és csak olyan halmazok valószínűségére vagyunk kiváncsiak, amelyeket explicit "rekurzív" módon (úgy is mondhatjuk, hogy egy jól megírt program segítségével) tudunk definiálni ezen szép halmazok segítségével. Az így definiálható halmazok viszont benne vannak a "szép halmazok" által generált (azaz az őket tartalmazó legszűkebb) σ-algebrában. Ezért elég a valószínűségi mértéket ezen a σ-algebrán megadni. A valószínűségi mérték konstrukciójában nagy segítséget nyújt az alább megfogalmazott Carathéodory-féle kiterjesztési tétel. Ezt az eredményt, amelynek tárgyalása a mértékelmélet tantárgy anyaga, bizonyítás nélkül ismertetem.

Carathéodory-féle kiterjesztési tétel. *Legyen adva egy $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ hármas, ahol $\mathcal{A}$ algebra (ennek definicióját felidéztem az előbbiekben). Tegyük fel továbbá, hogy μ σ-*

additív az $\mathcal{A}$ algebrán, azaz amennyiben C_j, $j = 1, 2, \dots$, diszjunkt halmazok $C_j \in \mathcal{A}$, és ezenkívül $C = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} C_j \in \mathcal{A}$, akkor $\mu(C) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(C_j)$. Legyen továbbá $\mu(\Omega) < \infty$. Ekkor létezik egy $\mathcal{A}$-t tartalmazó legszűkebb $\sigma(\mathcal{A})$ σ-algebra, (ezt nevezzük az $\mathcal{A}$ algebra által generált σ-algebrának), és a μ mérték egyértelműen *kiterjeszthető a $\sigma(\mathcal{A})$ σ-algebrán definiált mértékké.*

A Carathéodory-féle kiterjesztési tétel redukálja a minket érdeklő problémát egy egyszerűbb, könnyebben vizsgálható kérdésre. Nevezetesen, elég a keresett valószínűségi mértéket egy algebrán megadni, és akkor az már kiterjeszthető az algebra által generált σ-algebrára is. Fontos a Carathéodory-féle tétel azon állítása is, hogy a mérték kiterjesztése az algebráról az algebra által generált σ-algebrára egyértelmű. Ez biztosítja, hogy a minket érdeklő események valószínűségét egyértelműen tudjuk definiálni.

A Carathéodory-féle kiterjesztési tétel segít valószínűségi mértékek konstrukciójában, de önmagában nem elegendő a minket érdeklő problémák megoldásához. Ahhoz ugyanis, hogy ezt az eredményt alkalmazni tudjuk, tudnunk kell, hogy a μ halmazfüggvény a kiinduló $\mathcal{A}$ algebrán σ-additív. Ennek bizonyítása sok esetben nemtriviális érvelést igényel.

Példa: Tekintsük az egységnégyzetban levő véges sok téglalap uniójaként előállítható halmazok rendszerét. Nem nehéz belátni, hogy az ilyen alakú halmazok algebrát alkotnak. Továbbá, ha ezen halmazok mértékét úgy definiáljuk, mint azok területét, akkor additív halmazfüggvényt kapunk ezen az algebrán. Ha ezt a halmazfüggvényt ki szeretnénk terjeszteni az ezen halmazok által generált σ-algebrán definiált (σ-additív) mértékké a Carathéodory-féle kiterjesztési tétel segítségével, akkor először meg kell mutatnunk, hogy a terület nemcsak additív, hanem σ-additív halmazfüggvény. Ez egy igaz, de nem magától értetődő állítás.

Megjegyzés. A Carathéodory tétel eredeti alakja általánosabb, úgynevezett (halmaz) gyűrűkre (vagy kissé még általánosabban félgyűrűkre) vonatkozik. Egy $\mathcal{A}$ halmazrendszer akkor gyűrű, ha egyrészt zárt (véges) metszet és unióképzésre, $\emptyset \in \mathcal{A}$, és ha $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{A}$, akkor $A \setminus B \in \mathcal{A}$. Viszont nem követeljük meg, hogy egy $A \in \mathcal{A}$ halmaz komplementere is benne legyen a $\mathcal{A}$ gyűrűben. Számunkra elegendő csak az algebrákra korlátoznunk a figyelmünket. Lényeges, hogy amennyiben $\mathcal{A}$ algebra, akkor abból, hogy $A_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \dots$, halmazok egy sorozatára, nem feltétlenül következik, hogy ezek $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ uniója is eleme $\mathcal{A}$-nak. Ezt figyelembe kellett venni az $\mathcal{A}$ algebrán definiált σ-additív mértékek definiciójában.

Nem kötelező feladat:

Tekintsük az r-dimenziós euklidészi térnek azon halmazait, melyek előállnak, mint véges sok olyan téglatest uniója, melyek a koordinátatengelyekkel párhuzamos balról zárt jobbról nyílt intervallumok direkt szorzatai. (Ezek az intervallumok lehetnek félegyenesek vagy egyenesek is.) Mutassuk meg, hogy az ilyen halmazok algebrát alkotnak, de nem alkotnak σ-algebrát.

A bevezető valószínűségszámítás előadásban a valószínűségi mezők definiciójának ismertetése után konkrét feladatokban sohasem azt tettük, hogy egy valószínűségi mezőt definiáltunk, és annak tulajdonságait vizsgáltuk. Ehelyett azt mondtuk, hogy tekintsük események egy olyan rendszerét, amelyek együttes valószínűségét bizonyos képletek adják meg, illetve tekintsünk bizonyos valószínűségi változókat, amelyek eloszlását bizonyos eloszlásfüggvények határozzák meg. Ezután azt vizsgáltuk, hogy események ilyen rendszeréről illetve ilyen valószínűségi változókról mit tudunk mondani. Ahhoz viszont, hogy jogunk legyen bizonyos együttes valószínűséggel megadott események rendszeréről, illetve bizonyos eloszlású valószínűségi változókról beszélnünk, meg kell mutatnunk, hogy azok valóban léteznek. Kissé pontosabban fogalmazva azt kell megmutatni, hogy létezik egy valószínűségi mező és azon események olyan rendszere, amelyek együttes valószínűségét az általunk előírt képletek adják meg, illetve olyan valószínűségi változók, amelyeknek az eloszlását az általunk felírt eloszlásfüggvények adják meg.

Példa olyan esetre, amikor ilyen jellegű nem triviális probléma felmerül: Több feladatban mondtuk, hogy tekintsük egy szabályos pénzdarab végtelen sok független egymás utáni feldobását, és az ilyen dobássorozat tulajdonságait vizsgáltuk. Ez azt jelentette, hogy tekintettük minden $n = 1, 2, \dots$ számra az összes olyan eseményt, amely egy n-hosszúságú fej-írás sorozat, és azt mondtuk, hogy egy ilyen sorozat valószínűsége legyen 2^{-n}. Felmerülhet a kérdés: Honnan tudjuk, hogy létezik olyan valószínűségi mező, ahol ezeket az eseményeket definiálni tudjuk az általunk előírt valószínűségekkel? Be lehet látni, hogy ez lehetséges, de a bizonyítás nem-triviális mértékelméleti eredmények alkalmazását igényli.

A fent jelzett problémák vizsgálata érdekében felidézek néhány korábban bevezetett fogalmat.

Valószínűségi változó fogalma: *Legyen adva egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező. Egy ezen a téren értelmezett valós értékű (mérhető) $\xi(\omega)$ függvényt valószínűségi változónak fogunk nevezni. Azaz ξ egy $\Omega \to R^1$ leképezés. Az a megkötés, hogy a függvény legyen mérhető, azt jelenti, hogy minden x valós számra teljesül az $\{\omega\colon\ \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{A}$ feltétel.*

Azt mondjuk, hogy $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \dots, \xi_n(\omega))$ n-dimenziós valószínűségi változó egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, ha $\xi(\omega)$ mérhető leképezése az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ térnek az $(R^n, \mathcal{B}^n)$ térre, azaz minden $(x_1, \dots, x_n) \in R^n$ pontra $\{\omega\colon\ \xi_1(\omega) < x_1, \dots, \xi_n(\omega) < x_n\} \in \mathcal{A}$.

Megjegyzés. Az előbbi definicióban csak speciális, $\{\omega\colon\ \xi_1(\omega) < x_1, \dots, \xi_n(\omega) < x_n\}$ alakú halmazokra követeltük meg, hogy azok legyenek az $\mathcal{A}$ σ-algebrában, és így beszélhessünk a valószínűségükről. De valójában ebből már minden „értelmes esemény” mérhetősége is következik. Ezért beszélhetünk minden ilyen eseménynek a valószínűségéről. Ezt a tényt fogalmazza meg az alábbi mértékelméleti eredmény.

Tétel. *Legyen $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ n-dimenziós valószínűségi változó egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Ekkor az n-dimenziós tér tetszőleges B Borel mérhető halmazára $\{\omega\colon\ (\xi_1(\omega), \dots, \xi_n(\omega)) \in B\} \in \mathcal{A}$.*

Megjegyzés. A teljesség kedvéért felidézem a Borel mérhető halmaz definicióját. A mi számunkra elegendő annyit tudni, hogy az n-dimenziós tér minden „szép” halmaza, melyekkel különböző feladatok megoldása során találkozunk, Borel–mérhető. A formális definició a következő. Tekintsük az euklidészi tér részhalmazait, ezen belül az $A(x_1,\dots,x_n)=\{(u_1,\dots,u_n)\colon\ u_1<x_1,\dots,u_n<x_n\}$ alakú halmazokat minden $(x_1,\dots,x_n)$ szám-n-esre. Létezik az R^n tér részhalmazaiból álló legszűkebb σ-algebra, amely tartalmazza ezeket a halmazokat, és ezt nevezzük az n-dimenziós tér Borel σ-algebrájának. E Borel σ-algebra elemeit, azaz az ebben a σ-algebrában lévő halmazokat, nevezzük Borel mérhető halmazoknak.

További megjegyzés. A fentiekben valós, illetve vektorértékű valószínűségi változók definicióját ismertettem. A valószínűségi változó definiciója után szereplő tételben megadtuk a valószínűségi változók kissé különböző, de ekvivalens definicióját. Ezt a definiciót lehet általánosítani. Ha adva van egy tetszőleges $(Y,\mathcal{Y})$ mértéktér, akkor definiálhatjuk az Y-térbeli értékeket felvevő valószínűségi változók fogalmát is. Azt mondjuk, hogy ξ egy az $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mezőn definiált, értékeit az $(Y,\mathcal{Y})$-térben felvevő valószínűségi változó, ha az $\xi\colon\ \Omega\to Y$ az $(\Omega,\mathcal{A},P)$ tér mérhető leképezése az $(Y,\mathcal{Y})$ térre, azaz $\{\omega\colon\ \xi(\omega)\in B\}\in\mathcal{A}$ minden $B\in\mathcal{Y}$ halmazra. Erre az általános definicióra azonban nem lesz szükségünk.

Valójában a valószínűségszámításban nem közvetlenül a valószínűségi változókkal dolgozunk, hanem azok eloszlásával. Felidézem ennek a definicióját.

Valószínűségi változó eloszlásfüggvényének a definiciója. *Legyen adva egy $\xi(\omega)$ (valós értékű) valószínűségi változó egy $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mezőn. Ennek $F(x)$ eloszlásfüggvényén az $F(x)=P(\{\omega\colon\ \xi(\omega)<x\})$, $-\infty<x<\infty$, függvényt értjük.*

Többdimenziós eloszlásfüggvény definiciója. *Legyen adva n valós értékű $\xi_1,\dots,\xi_n$ valószínűségi változó egy $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mezőn. Ezek (együttes) eloszlásfüggvénye az*

$$F(x_1,\dots,x_n)=P(\{\omega\colon\ \xi_1(\omega)<x_1,\dots,\xi_k(\omega)<x_n\}),$$

n változós függvény, ahol $-\infty<x_j<\infty$ minden $1\le j\le n$ indexre.

Ismerve egy (egy vagy több-dimenziós) valószínűségi változó eloszlásfüggvényét, más események valószínűségét is ki lehet számítani. Ezt a tényt fejezi ki az alábbi mértékelméleti eredmény.

Tétel eloszlások meghatározásáról az eloszlásfüggvény segítségével. *Legyen egy n-dimenziós $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F(x_1,\dots,x_n)$. Az F eloszlásfüggvény egyértelműen meghatározza a $P(\{\omega\colon\ (\xi_1(\omega),\dots,\xi_n(\omega))\in B\})$ valószínűséget minden „szép” halmazra, azaz az n-dimenziós tér minden Borel mérhető B halmazára. Részletesebben kifejtve létezik olyan az F eloszlásfüggvény által meghatározott μ_F valószínűségi mérték az R^n tér $\mathcal{B}_n$ Borel σ-algebráján úgy, hogy $\mu_F((-\infty,x_1)\times\cdots\times(-\infty,x_n))=F(x_1,\dots,x_n)$, és az F eloszlásfüggvény egyértelműen meghatározza ezt a μ_F mértéket. Továbbá $P(\{\omega\colon\ (\xi_1(\omega),\dots,\xi_n(\omega))\in B\})=\mu_F(B)$ minden $B\in\mathcal{B}$ halmazra.*

Ismertetem, hogy hogyan következik a fenti eredmény a Carathéodory-féle tétel azon viszonylag egyszerűbb állításából, amely szerint egy algebrán definiált mérték kiterjesztése az algebra által generált σ-algebrára egyértelműen meg van határozva.

Nem nehéz belátni, hogy a $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ véletlen vektor $F(x_1,\dots,x_n)$ eloszlásfüggvénye meghatározza a $P((\xi_1,\dots,\xi_n)\in B)$ alakú valószínűségeket a $B=[a_1,b_1)\times\cdots\times[a_n,b_n)$ alakú halmazokon, azaz a koordinátatengelyekkel párhuzamos oldalú téglatesteken az R^n Euklideszi térben. (Megengedett az $a_j=-\infty$ és $b_j=\infty$, $1\le j\le n$, választás is a B halmaz definiciójában.) Az $F(x_1,\dots,x_n)$ eloszlásfüggvény a $\mu_F(B)=P((\xi_1,\dots,\xi_n)\in B)$ alakú valószínűségeket akkor is meghatározza, ha B véges sok diszjunkt téglatest uniója. Az összes ilyen alakú halmaz egy $\mathcal{B}_0$ algebrát alkot, és ezen algebra generálja a Borel halmazok $\mathcal{B}$ Borel σ-algebráját. Továbbá a valószínűségi mérték σ-additivítása (és az eloszlásfüggvény definiciója) implikálja, hogy ez a $\mu_F(B)$ halmazfüggvény σ-additív ezen a $\mathcal{B}_0$ algebrán. Ezért a Carathéodory-féle tétel idézett része szerint az eloszlásfüggvény egyértelműen meghatároz egy olyan $\mu_F(A)$, $A\in\mathcal{B}$, valószínűségi mértéket az n-dimenziós Euklideszi tér $\mathcal{B}$ Borel σ-algebráján, amelyre teljesül a $\mu_F(B)=P((\xi_1,\dots,\xi_n)\in B)$ azonosság minden $B\in\mathcal{B}_0$ halmazra. Másrészt a $\bar\mu_F(A)=P((\xi_1,\dots,\xi_n)\in A)$, $A\in\mathcal{B}$, szintén valószínűségi mérték a $\mathcal{B}$ σ-algebrán, és $\mu_F(B)=\bar\mu_F(B)$ a $\mathcal{B}_0$ algebra halmazaira. Ezért a mérték algebráról σ-algebrára való kiterjesztésének egyértelműségéből következik, hogy $\mu_F(A)=\bar\mu_F(A)=P((\xi_1,\dots,\xi_n)\in A)$ minden $A\in\mathcal{B}$ Borel mérhető halmazra.

Valószínűségi változók eloszlásfüggvényéhez hasonlóan bevezethetjük valószínűségi változók eloszlásának a fogalmát is.

Valószínűségi változók eloszlásának a definiciója. *Legyen adva n darab $\xi_1,\dots,\xi_n$ valószínűségi változó egy $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mezőn, amit úgy is tekinthetünk mint egy n-változós $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ véletlen vektort. Ennek eloszlásán a $\mu(B)=P((\xi_1,\dots,\xi_n)\in B))$, $B\in\mathcal{B}^{(n)}$, függvényt értjük, ahol $\mathcal{B}^{(n)}$ az n-dimenziós Euklideszi tér Borel halmazainak a σ-algebrája.*

A fent definiált μ eloszlás egy valószínűségi mérték az R^n n-dimenziós Euklideszi tér $\mathcal{B}^{(n)}$ Borel σ-algebráján. Az előző tétel azt mondja ki, hogy egy $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ véletlen vektor eloszlásának megadásához elég definiálni annak eloszlásfüggvényét. De felmerül a kérdés, hogy mely függvények tekinthetőek eloszlásfüggvénynek. Részletesen fogalmazva a következő kérdések jelennek meg.

Problémák:

a) Mely egyváltozós $F(x)$ függvények tekinthetőek eloszlásfüggvénynek, azaz mely $F(x)$ függvényekhez létezik olyan $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mező és azon ξ valószínűségi változó, amelyre $P(\xi<x)=F(x)$ minden $-\infty<x<\infty$ számra?

b) Mely n-változós $F(x_1,\dots,x_n)$ függvények tekinthetők eloszlásfüggvénynek, azaz mely $F(x_1,\dots,x_n)$ függvényekhez létezik olyan $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mező és azon $\xi_1,\dots,\xi_n$ valószínűségi változók rendszere, amelyekre $P(\xi_1<x_1,\dots,\xi_n<x_n)=F(x_1,\dots,x_n)$ minden $-\infty<x_j<\infty$, $1\le j\le n$ szám n-esre?

Érdekel minket a fenti problémák következő végtelen dimenziós megfelelője is.

c) Legyen adva egy $T = \{t_1, t_2, \ldots, \}$ megszámlálható halmaz és annak minden véges $\{t_{j_1}, \ldots, t_{j_n}\} \subset T$ részhalmazán egy az R^n, n-dimenziós tér $\mathcal{B}^{(n)}$ Borel σ-algebráján definiált $\mu_{\{t_{j_1},\ldots,t_{j_n}\}}$ eloszlás. Milyen feltételt kell teljesíteni ennek a rendszernek ahhoz, hogy létezzen egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, és azon $\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \ldots$ valószínűségi változók sorozata úgy, hogy a T halmaz minden $\{t_{j_1}, \ldots, t_{j_n}\}$ véges részhalmazára a $(\xi_{t_{j_1}}, \ldots, \xi_{t_{j_n}})$ véletlen vektor eloszlása a $\mu_{\{t_{j_1},\ldots,t_{j_n}\}}$ eloszlás legyen?

A c) kérdés természetesen általánosítható arra az esetre, amikor a T halmaz tetszőleges végtelen, és nem feltétlenül megszámlálhatóan végtelen halmaz. De mint látni fogjuk, ennek az általánosabb problémának a megoldása könnyen visszavezethető a c) kérdés megoldására. Ezért egyelőre csak ezzel fogunk foglalkozni.

Először megfogalmazom az a), b) és c) problémában megfogalmazott kérdésekre a választ. A c) problémára adott válasz a valószínűségszámítás Kolmogorov által bizonyított alaptétele. Azután ismertetni fogom az eredmények bizonyítását az analízis néhány fontos, itt ismertetett eredményének a segítségével. Az a) probléma megoldását a Tétel A1, a b) probléma megoldását a Tétel A2 tartalmazza. A c) probléma megoldását tartalmazó eredmény megfogalmazásához előbb be kell vezetni eloszlások konzisztenciájának a definicióját.

Tétel A1. *Egy $F(x)$ függvény akkor és csak akkor eloszlásfüggvénye egy alkalmas ξ valószínűségi változónak valamely $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, ha teljesíti az alábbi a)—d) tulajdonságokat.*

a) $F(x)$ monoton növekvő függvény.

b) $F(x)$ balról folytonos függvény, azaz $\lim\limits_{h\to 0,\, h>0} F(x-h) = F(x)$ minden $-\infty < x < \infty$ számra.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$.

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

Tétel A2. *Egy $F(x_1, \ldots, x_n)$ függvény akkor és csak akkor (együttes) eloszlásfüggvénye alkalmas $\xi_1, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változóknak valamely $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, ha ez az F függvény teljesíti a következő (i)—(iv) tulajdonságokat.*

(i) $F(x_1, \ldots, x_n)$ minden változójának balról folytonos függvénye.

(ii) $\lim\limits_{\substack{x_j\to\infty \\ \text{minden } j=1,\ldots,k \text{ számra}}} F(x_1, \ldots, x_n) = 1.$

(iii) $\lim\limits_{\substack{x_j\to-\infty \\ \text{valamely } 1\le j\le n \text{ számrra}}} F(x_1, \ldots, x_n) = 0.$ *(Ez úgy értendő, hogy az összes x_s, $1 \le s \le n$, $s \neq j$ koordinátát rögzítjük, és $x_j \to -\infty$.)*

Végül definiáljuk egy az R^n téren definiált $F(x_1, \ldots, x_n)$ függvényre és egy $\mathbf{K} = [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n)$ téglatestre a

$$\mu(\mathbf{K}) = \mu_F(\mathbf{K}) = \sum_{\substack{x_j = a_j \text{ vagy } b_j \\ j=1,\ldots,n}} (-1)^{\chi(x_1,\ldots,x_n)} F(x_1, \ldots, x_n)$$

mennyiséget, ahol $\chi(x_1, \dots, x_n)$ *jelöli az* a_j*-k számát az* $x_1, \dots, x_n$ *sorozatban. Ekkor*

(iv) $\mu_F(\mathbf{K}) \geq 0$ *minden* $\mathbf{K}$ *téglatestre.*

Feladat:

A Tétel A2 (iv) feltételének jobb megértése érdekében lássuk be a következő állítást. Legyen $(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega))$ két-változós valószínűségi változó $F(x_1, x_2)$ eloszlásfüggvénnyel. Ekkor

$$P((\xi_1(\omega), \xi_2(\omega)) \in [a_1, b_1) \times [a_2, b_2)) = F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2)$$

minden $-\infty < a_1 < b_1 < \infty$, $-\infty < a_2 < b_2 < \infty$ esetben.

Adva egy mérhető $A \subset R^2$ halmaz, jelölje $I_A(\omega)$ a következő valószínűségi változót. $I_A(\omega) = 1$, ha $(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega)) \in A$, és $I_A(\omega) = 0$, ha $(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega)) \notin A$. Mutassuk meg, hogy

$$\begin{aligned} I_{[a_1,b_1)\times[a_2,b_2)}(\omega) &= I_{(-\infty,b_1)\times(-\infty,b_2)}(\omega) - I_{(-\infty,b_1)\times(-\infty,a_2)}(\omega) \\ &\quad - I_{(-\infty,a_1)\times(-\infty,b_2)}(\omega) + I_{(-\infty,a_1)\times(-\infty,a_2)}(\omega), \end{aligned}$$

és vezessük le a fenti azonosságot ebből az összefüggésből. Általánosítsuk a feladat állítását tetszőleges n-változós véletlen vektorra.

Annak érdekében, hogy megfogalmazzam a c) probléma megoldását bevezetem mértékek konzisztenciájának a fogalmát. E fogalom bevezetése előtt definiálom eloszlások vetületét (projekcióját), illetve kényelmi okokból megadom Euklideszi terek reprezentációját véges halmazokon definiált függvények tereként.

Euklideszi terek megadása véges halmazon értelmezett függvények tereként. *Legyen* $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ *egy (véges)* n *elemű halmaz. Definiáljuk az* S *halmazzal indexelt* R_S *Euklideszi teret, mint azt a teret, amelynek pontjai az* S *halmazon definiált valós értékű* $x_j = X(s_j)$, $1 \leq j \leq n$, *függvények, és két* $X(s_j)$, $1 \leq j \leq n$, *illetve* $\bar{X}(s_j)$, $1 \leq j \leq n$, *függvény (pont) távolsága az* R_S *térben*

$$\rho((X(s_1), \dots, X(s_n)), (\bar{X}(s_1), \dots, \bar{X}(s_n))) = \left(\sum_{j=1}^{n} (X(s_j) - \bar{X}(s_j))^2 \right)^{1/2}.$$

Legyen a $\mathcal{B}_S$ *Borel* σ*-algebra az* R_S *téren az*

$$\{(X(s_1), \dots, X(s_n))\colon\ a_j < X(s_j) < b_j,\ 1 \leq j \leq n\}$$

alakú halmazok által generált legszűkebb σ*-algebra. A továbbiakban, ha* R_S *téren definiált mértékről beszélünk, akkor az* R_S *tér* $\mathcal{B}_S$ *Borel* σ*-algebráján definiált mértékre fogunk gondolni. Egyébként a* $\mathcal{B}_S$ σ*-algebra elemei az*

$$\{(X(s_1), \dots, X(s_n))\colon\ (X(s_1), \dots, X(s_n)) \in B\}, \quad B \in \mathcal{B}^{(n)},$$

alakú halmazok, ahol $\mathcal{B}^{(n)}$ az R^n n-dimenziós Euklideszi tér σ-algebrája, és az R_S téren definiálható μ mértékek megadhatóak

$$\mu(\{(X(s_1),\dots,X(s_n))\colon\ (X(s_1),\dots,Xx(s_n))\in B\})=\bar\mu(B)$$

alakban, ahol $\bar\mu$ egy az $(R^n,\mathcal{B}^{(n)})$ téren definiált mérték.

Megjegyzés. Az R^n Euklideszi tér felfogható úgy is, mint a számegyenes önmagával vett n-szeres direkt szorzata. Terek direkt szorzatát gyakran szokták úgy reprezentálni, mint egy alaphalmazon értelmezett függvények terét. A fenti definicióban mi is ezt tettük, mert bizonyos meggondolások egyszerűbben kifejezhetőek ilyen módon.

Euklideszi téren definiált valószínűségi mérték vetületének a definiciója. *Legyen adva egy véges $S_1=\{s_1,\dots,s_n\}$ halmaz, és annak egy $S_2=\{s_{j_1},s_{j_2},\dots,s_{j_m}\}\subset S_1$, $m\le n$, részhalmaza. Ha adva van egy μ (valószínűségi) mérték az R_{S_1} Euklideszi téren, akkor annak μ_P vetületét az R_{S_2} Euklideszi térbe a*

$$\begin{aligned}\mu_P(\{(X(s_{j_1}),X(s_{j_2}),\dots,X(s_{j_m})\colon\ (X(s_{j_1}),X(s_{j_2}),\dots,X(s_{j_m}))\in B\})\\ =\mu(\{(X(s_1),X(s_2),\dots,X(s_n))\colon\ (X(s_{j_1}),X(s_{j_2}),\dots,X(s_{j_m}))\in B,\\ X(s_l)\in R^1,\ \text{ha } l\notin\{j_1,\dots,j_m\}\})\end{aligned}$$

képlet adja meg, ahol $B\in\mathcal{B}^{(m)}$. Szóban elmagyarázva, az R_{S_1} téren levő μ valószínűségi mérték vetülete egy olyan mérték az R_{S_2} téren, amely szerint annak a valószínűsége, hogy egy az S_2 téren vett függvény (mint m-dimenziós vektor), értékét az R^m tér valamely $B\in\mathcal{B}^{(m)}$ halmazában veszi fel, megegyezik annak az eseménynek a μ mérték szerinti valószínűségével, hogy egy az S_1 halmazon értelmezett függvény megszorítása az S_2 halmazra ebbe a B halmazba esik.

Valószínűségi mértékek konzisztenciájának a definiciója. *Legyen adva egy megszámlálható $T=\{t_1,t_2,\dots,\}$ halmaz, és annak minden véges $\{t_{j_1},\dots,t_{j_n}\}\subset T$ részhalmazához rendeljük hozzá az $R_{\{t_{j_1},\dots,t_{j_n}\}}$ Euklideszi teret. Legyen adva mindegyik R_{T_0} téren, ahol $T_0\subset T$, és T_0 véges halmaz, egy μ_{T_0} valószínűségi mérték. Azt mondjuk, hogy ezek a mértékek konzisztensek, ha minden $T_0\subset T_1\subset T$, halmazpárra, amelyre T_0, T_1 véges halmazok, a μ_{T_0} mérték a μ_{T_1} mérték vetülete.*

Ismertetem a valószínűségszámítás Kolmogorov-féle alaptételének nevezett eredményt. Valójában e tétel egy változatát ismertetem, ahol véges dimenziós eloszlásokkal dolgozunk, míg az eredmény eredeti (valójában természetesebb) formájában eloszlásfüggvények nyelvén fogalmazza meg az állítást. Később ezt az eredményt is ismertetem.

A valószínűségszámítás Kolmogorov-féle alaptétele. *Legyen adva egy megszámlálható $T=\{t_1,t_2,\dots,\}$ halmaz, és annak minden véges $\{t_{j_1},\dots,t_{j_n}\}\subset T$ részhalmazához rendeljünk hozzá egy $\mu_{\{t_{j_1},\dots,t_{j_n}\}}$ valószínűségi mértéket az $R_{\{t_{j_1},\dots,t_{j_n}\}}$ téren. Akkor és csak akkor létezik egy $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mező, és azon $\xi_{t_1},\xi_{t_2},\dots$ valószínűségi változók sorozata úgy, hogy a T halmaz minden $\{t_{j_1},\dots,t_{j_n}\}$ véges részhalmazára a*

$(\xi_{t_{j_1}},\dots,\xi_{t_{j_n}})$, $j_1<j_2<\cdots<j_n$, véletlen vektor eloszlása a $\mu_{\{t_{j_1},\dots,t_{j_n}\}}$ valószínűségi mérték, ha a $\mu_{\{t_{j_1},\dots,t_{j_n}\}}$ valószínűségi mértékek konzisztensek.

Továbbá, ha a $\mu_{\{t_{j_1},\dots,t_{j_n}\}}$ valószínűségi mértékek konzisztensek, akkor azok meghatározzák a $P((\xi_{t_1},\xi_{t_2},\dots)\in B)$ valószínűségeket az R^∞ 'végtelen dimenziós Euklideszi tér' $B\in\mathcal{B}^{(\infty)}$ Borel-mérhető részhalmazain. Itt R^∞ a valós számokból álló végtelen $(x_1,x_2,\dots)$ sorozatok terét jelöli, $\mathcal{B}^{(\infty)}$ pedig az R^∞ halmaz

$$A=\{(x_1,x_2,\dots,)\colon\ (x_1,x_2,\dots,x_n)\in B\},\quad B\in\mathcal{B}^{(n)}$$

alakban előállítható részhalmazai (hengerhalmazai) által generált legszükebb σ-algebrát, ahol n tetszőleges pozitív egész szám, $\mathcal{B}^{(n)}$ pedig az R^n n-dimenziós Eukideszi tér Borel σ-algebráját jelöli.

Az, hogy a Tétel A1-ban, Tétel A2-ben és a valószínűségszámítás Kolmogorov-féle alaptételében megfogalmazott feltételek szükséges feltételei a tételekben megkövetelt tulajdonságú valószínűségi mezők létezésének viszonylag könnyen látható. Érdemes megjegyezni, hogy e feltételek szükségességének ellenőrzésekor fel kell használni, hogy a valószínűség nem csak additív, hanem σ-additív is. Így például a b) feltétel ellenőrzésénél a Tétel A1-ban azt kell megmutatni, hogy a $P(\xi<x-h_n)=F(x-h_n)$ valószínűségek konvergálnak a $P(\xi<x)=F(x)$ valószínűséghez minden valós x számra, és $h_n>0$ számok olyan monoton sorozatára, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty}h_n=0$. Mivel $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{\omega\colon\ \xi(\omega)<x-h_n\}=\{\omega\colon\ \xi(\omega)<x\}$ ez az állítás következik a valószínűségi mérték folytonossági tulajdonságából. De ennek a tulajdonságnak a teljesüléséhez nem elég a valószínűség additivítása, annak σ-additivítása is szükséges. (Lásd a bevezető valószínűségszámítás előadássorozat 2. előadásában a Tétel A eredményt.)

A Tétel A2 feltételeinek szükségessége hasonlóan bizonyítható, mint az analóg állítás a Tétel A1-ben. Azt kell még megmutatni, hogy ha $F(x_1,\dots,x_n)$ egy $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ véletlen vektor eloszlása, akkor a (iv) tulajdonság megfogalmazása előtt bevezetett $\mu(\mathbf{K})$ mennyiség teljesíti a $P((\xi_1,\dots,\xi_n)\in\mathbf{K})=\mu(\mathbf{K})$ relációt. Az, hogy Kolmogorov tételében a valószínűségi mértékek konzisztenciáját fel kell tenni nyílvánvaló.

Annak bizonyítása, hogy a fenti tételekben megfogalmazott feltételek elégségesek is, lényegesen nehezebb. Ismertetem, bizonyos részletek elhagyásával ezeket a bizonyításokat is. Először az elégségesség igazolását visszavezetem az alább megfogalmazott Tétel B1, Tétel B2 és egy ebben a jegyzetben Kolmogorov tételnek nevezett eredmény bizonyítására. Ez a visszavezetés egyben azt is mutatni fogja, hogy a bizonyítás fő nehézsége annak igazolása, hogy bizonyos additív halmazfüggvények σ-additívak is.

Tétel B1. *Teljesítse egy $F(x)$ függvény a Tétel A1 a)–d) feltételeit. Akkor létezik a számegyenes Borel mérhető halmazain olyan $\mu=\mu_F$ valószínűségi mérték, amelyre $\mu((-\infty,x))=F(x)$ minden x valós számra.*

Tétel B2. *Teljesítse egy $F(x_1,\dots,x_n)$ függvény a Tétel A2 (i)–(iv) feltételeit. Akkor létezik az R^n n-dimenziós tér Borel mérhető halmazain olyan $\mu=\mu_F$ valószínűségi* *mérték, amelyre* $\mu_F((-\infty, x_1) \times \cdots \times (\infty, x_n)) = F(x_1, \ldots, x_n)$ *minden* $(x_1, \ldots, x_n)$ *valós szám* n*-esre.*

Feladat:

Mutassuk meg a Tétel B2 segítségével, hogy az n-dimenziós $[0,1]^n$ egységkocka Borel-mérhető részhalmazain létezik Lebesgue mérték, azaz olyan $\lambda(\cdot)$ σ-additív halmazfüggvény, amelyre $\lambda([a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n)) = \prod\limits_{j=1}^{n} (b_j - a_j)$ minden $[a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n) \subset [0,1]^n$ téglatestre.

Az alább megfogalmazott eredményt, amelyből következik a valószínűségszámítás Kolmogorov-féle alaptétele Kolmogorov tétele néven ismertetem.

Kolmogorov tétele. *Legyen adva egy megszámlálható* $T = \{t_1, t_2, \ldots,\}$ *halmaz és annak minden véges* $\{t_{j_1}, \ldots, t_{j_n}\} \subset T$ *részhalmazához rendeljünk hozzá egy* $\mu_{\{t_{j_1}, \ldots, t_{j_n}\}}$ *valószínűségi mértéket az* $R_{\{t_{j_1}, \ldots, t_{j_n}\}}$ *téren. Legyenek ezek a mértékek konzisztensek. Jelölje* R_T *az* $(X(t_1), X(t_2), \ldots)$ *végtelen valós számsorozatokból álló teret, azaz a* T *halmazon definiált valós értékű függvények terét. Jelölje* $\mathcal{C}_0^T$ *az összes*

$$\begin{aligned} &C(t_{j_1}, \ldots, t_{j_n}, B_n) \\ &\quad = \{(X(t_1), X(t_2), \ldots)\colon (X(t_{j_1}), \ldots, X(t_{j_n})) \in B_n,\ X(t_l) \in R^1,\ \textit{ha } l \notin \{j_1, \ldots, j_n\}\} \end{aligned}$$

alakú hengerhalmazból álló halmazrendszert az R_T *téren, ahol*

$$n = 1, 2, \ldots, \quad \{t_{j_1}, t_{j_2}, \ldots, t_{j_n}\} \subset T, \quad j_1 < j_2 < \cdots < j_n, \quad B_n \in \mathcal{B}^{(n)},$$

és $\mathcal{B}^{(n)}$ *az* n*-dimenziós Euklideszi tér Borel* σ*-algebráját jelöli.*

Az előbb definiált $\mathcal{C}_0^T$ *halmazrendszer algebra, és legyen* $\mathcal{B}_T$ *a* $\mathcal{C}_0^T$ *halmazrendszer által generált* σ*-algebra. Létezik olyan* μ *valószínűségi mérték az* $(R_T, \mathcal{B}_T)$ *téren, amelyre*

$$\mu(C(t_{j_1}, \ldots, t_{j_n}, B_n)) = \mu_{\{t_{j_1}, \ldots, t_{j_n}\}}(\{(X(t_{j_1}), \ldots, X(t_{j_n}))\colon (X(t_{j_1}), \ldots, X(t_{j_n})) \in B_n\}) \tag{1}$$

minden $C(t_{j_1}, \ldots, t_{j_n}, B_n)) \in \mathcal{C}_0^T$ *halmazra. Továbbá az (1) feltételt teljesítő* μ *mértéket egyértelműen meghatározzák a* $\mu_{\{t_{j_1}, \ldots, t_{j_n}\}}$ *mértékek.*

A Tétel B1-ből könnyen következik, hogy amennyiben az $F(x)$ függvény teljesíti a Tétel A1 a)-d) feltételeit, akkor létezik egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező és azon egy ξ valószínűségi változó úgy, hogy ξ eloszlásfüggvénye az $F(x)$ függvény. Valóban, legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P) = (R^1, \mathcal{B}^{(1)}, \mu_F)$, ahol R^1 az egydimenziós Euklideszi tér, azaz a számegyenes, $\mathcal{B}^{(1)}$ a Borel σ-algebra a számegyenesen, és μ_F a Tétel B1-ben szereplő mérték. Az ω elemi események ebben a valószínűségi mezőben a valós számok. Definiáljuk a $\xi(\omega) = \xi(x)$, (ha $\omega = x$), valószínűségi változót a $\xi(x) = x$ képlettel. Ekkor a Tétel B1 szerint a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye az $F(x)$ függvény.

Hasonlóan láthatjuk be a Tétel B2 segítségével, hogy amennyiben egy $F(x_1, \ldots, x_n)$ függvény teljesíti a Tétel A2 (i)–(iv) feltételeit, akkor létezik $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, és azon $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ véletlen vektor, amelynek $F(x_1, \dots, x_n)$ az eloszlásfüggvénye. Valóban, legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P) = (R^n, \mathcal{B}^{(n)}, \mu_F)$, ahol R^n az n-dimenziós Euklideszi tér, $\mathcal{B}^{(n)}$ a Borel σ-algebra R^n-en, és μ_F a Tétel B1-ben szereplő μ_F mérték. Definiáljuk a $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változókat az $\omega = (x_1, \dots, x_n)$ pontban a $\xi_1(\omega) = x_1$, $\xi_2(\omega) = x_2$, ... $\xi_n(\omega) = x_n$ formulákkal. Ekkor a $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ véletlen vektor eloszlása az $F(x_1, \dots, x_n)$ függvény.

Hasonlóan következik a valószínűségszámítás Kolmogorov-féle alaptétele a Kolmogorov tételből. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P) = (R_T, \mathcal{B}_T, \mu)$ a Kolmogorov tételben szereplő R_T, $\mathcal{B}_T$ és μ mennyiségekkel. Legyen $\xi_{t_j}(\omega) = X(t_j)$, $j = 1, 2, \dots$, az $\omega = (X(t_1), X(t_2), \dots)$ pontban. Ekkor ezen valószínűségi változóknak a kívánt eloszlásuk van a Kolmogorov tétel alapján. A Kolmogorov-féle alaptételben szereplő valószínűségek egyértelműsége könnyen következik a Carathéodory-féle kiterjesztési tételben, az ott tekintett, a kiinduló algebra által generált σ-algebrán definiált mérték egyértelműségéből.

Feladat: Lássuk be, hogy megfordítva a Tétel B1 következik a Tétel A1-ből, a Tétel B2, a Tétel A2-ből és a Kolmogorov tétel a valószínűségszámítás Kolmogorov-féle alaptételéből.

Segítség: Ha léteznek a kívánt tulajdonságú valószínűségi változók valamely valószínűségi mezőn, akkor vezessük be a $\mu_F(B) = P(\xi \in B)$, $B \in \mathcal{B}^{(1)}$), mértéket a Tétel B1, a $\mu_F(B) = P((\xi_1, \dots, \xi_n) \in B)$, $B \in \mathcal{B}^n$, mértéket a Tétel B2 igazolásában. Végül a Kolmogorov tétel esetében legyen $\mu(B) = P((\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \dots) \in B)$, $B \in \mathcal{B}^T$.

Be kívánjuk látni a Tétel B1-t, Tétel B2-t és a Kolmogorov tételt. A bizonyításban felhasználunk néhány a matematikai analízisben tanult eredményt a kompakt halmazokról. Felidézem az ott tanult legfontosabb fogalmakat és eredményeket.

Kompakt halmazok definiciója metrikus terekben. *Egy (X, ρ) (szeparábilis) metrikus térben akkor nevezünk egy K halmazt kompaktnak, ha tetszőleges x_n, $n = 1, 2, \dots$, sorozatnak, amelyre $x_n \in K$, $n = 1, 2, \dots$ létezik x_{n_j} konvergens részsorozata, és e konvergens részsorozat $x_\infty = \lim\limits_{j \to \infty} x_{n_j}$ határértéke mindig teljesíti az $x_\infty \in K$ relációt. Szavakban megfogalmazva: Tetszőleges a K halmazban levő sorozatnak van konvergens részsorozata, és minden K halmazbeli értékeket felvevő konvergens sorozat határértéke a K halmazban van.*

Tétel Euklideszi tér kompakt halmazainak jellemzéséről. *Az R^n n-dimenziós Euklideszi tér kompakt halmazai (a szokásos metrikával) megegyeznek az R^n tér zárt és korlátos halmazaival.*

Heine–Borel-féle befedési tétel. *Fedjen be nyílt halmazok uniója egy kompakt halmazt. Ekkor kiválasztható ezen nyílt halmazok közül véges sok, amely szintén befedi ezt a kompakt halmazt.*

Számunkra elsősorban a következő eredmény lesz hasznos. Ezért ennek bizonyítását megadom.

Tétel egymásba skatulyázott kompakt halmazok metszetéről. *Legyen $K_1 \supset K_2 \supset \cdots$ egymásba skatulyázott kompakt halmazok végtelen sorozata egy metrikus térben. (Speciálisan az Euklideszi térben korlátos, zárt halmazokat tekintünk.) Ha teljesül a $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$ tulajdonság, akkor létezik olyan $N < \infty$ szám, amelyre a $K_N = \emptyset$ reláció is teljesül.*

Bizonyítás: Azt látjuk be, hogy amennyiben $K_n \neq \emptyset$ minden $n = 1, 2, \dots$ számra, akkor létezik egy $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ pont. Valóban, ebben az esetben kiválaszthatunk mindegyik K_n halmazból egy $x_n \in K_n$ pontot. Ekkor $x_n \in K_1$ is teljesül minden $n = 1, 2, \dots$ indexre, ezért létezik e sorozatnak egy konvergens x_{n_j} részsorozata, és $x_\infty = \lim\limits_{j\to\infty} x_{n_j} \in K_1$. Sőt, $x_\infty \in K_n$ minden $n = 1, 2, \dots$ indexre, mert az x_{n_j} sorozat pontjai véges sok kivétellel benne vannak a K_n halmazban, és a K_n halmaz is kompakt. Innen következik a tétel állítása, mert $x_\infty \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$.

Felidézem és bebizonyítom a következő (egyszerű) eredményt mértékek folytonosságáról. (Ez szerepelt a bevezető valószínűségi előadássorozat 2. előadásának a Tétel A eredményében.)

Tétel additív halmazfüggvény σ-additivításának biztosításáról folytonossági tulajdonság alapján. *Legyen adva egy μ véges, nem-negatív, additív halmazfüggvény egy X halmaz bizonyos részhalmazaiból álló $\mathcal{A}$ algebrán. A μ halmazfüggvény mérték (azaz σ-additív), ha teljesíti a következő folytonossági tulajdonságot:*

Ha $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$, $A_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \dots$ olyan egymásba skatulyázott $\mathcal{A}$ mérhető halmazok sorozata, amelyre $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.

Bizonyítás: Azt kell belátni, hogy ha B_n, $n = 1, 2, \dots$ diszjunkt halmazok olyan sorozata az X téren, amelyekre $B_n \in \mathcal{A}$, és $C = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \mu(C)$.

Vezessük be az $A_N = C \setminus \left(\bigcup\limits_{n=1}^{N} B_n\right) = \bigcup\limits_{n=N+1}^{\infty} B_n$ halmazokat, $N = 1, 2, \dots$. Ekkor $A_N \in \mathcal{A}$ minden $N = 1, 2, \dots$ számra, $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$. Ezért a tétel feltételei szerint $\lim\limits_{N\to\infty} \mu(A_N) = 0$. Továbbá a $B_1, B_2, \dots, B_N$ és az A_N halmazok diszjunktak, $\left(\bigcup\limits_{n=1}^{N} B_n\right) \cup A_N = C$ minden $N = 1, 2, \dots$ indexre. Ezért $\sum\limits_{n=1}^{N} \mu(B_n) + \mu(A_N) = \mu(C)$. Végrehajtva az $N \to \infty$ határátmenetet az utolsó azonosságban, és felhasználva a $\lim\limits_{N\to\infty} \mu(A_N) = 0$ relációt megkapjuk a tétel állítását.

Szemléletesen világos, hogy a fenti tételben megfogalmazott folytonossági tulajdonság teljesülésének az ellenőrzésében hasznos lehet az előtte megfogalmazott egymásba skatulyázott kompakt halmazok metszetéről szóló tétel. A Tétel B1, Tétel B2 és

Kolmogorov tétel bizonyításában szükség van olyan eredményre is, amely azt biztosítja, hogy az Euklideszi tér mérhető halmazai jól approximálhatóak kompakt halmazokkal. Megmutatom, hogyan lehet a fenti tételeket egy ilyen gondolatmenet segítségével bebizonyítani.

A Tétel B1 bizonyítása. Jelölje $\mathcal{A}$ az $\bigcup_{j=1}^{N} [a_j, b_j)$ alakban előállítható halmazokból álló halmazrendszert, ahol az unióban véges sok diszjunkt $[a_j, b_j)$ intervallum van. Az $a_j = -\infty$, $b_j = \infty$ választás is megengedett. Definiáljuk egy az $\mathcal{A}$ halmazrendszerben levő halmaz mértékét a $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{N} [a_j, b_j)\right) = \sum_{j=1}^{N} [F(b_j) - F(a_j)]$ képlet segítségével, ahol definició szerint $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$.

Nem nehéz belátni, hogy $\mathcal{A}$ algebra, a μ halmazfüggvény egyértelműen van definiálva az $\mathcal{A}$ algebrán, és az additív, nem-negatív, valamint $\mu((-\infty, \infty)) = 1$. (A μ halmazfüggvény egyértelműsége igazolásakor azt kell ellenőrizni, hogy bár egy $\mathcal{A}$-beli halmaz előállítása nem egyértelmű, hiszen például egy $[a, b)$ intervallum előállítható $[a, b) = [a, c) \cup [c, b)$, $a < c < b$, alakban is, egy $\mathcal{A}$-beli halmaz μ mértékét úgy definiáltuk, hogy az nem függ ennek a halmaznak az előállításától.)

Azt állítom, hogy a μ halmazfüggvény nem csak additív, hanem σ-additív is. Ehhez elegendő belátni azt, hogy amennyiben $A_n = \bigcap_{j=1}^{N(n)} [a_j^{(n)}, b_j^{(n)}) \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \dots$, olyan az $\mathcal{A}$ halmazrendszer halmazaiból álló sorozat, amelyre $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, akkor $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.

Ezen állítás bizonyítása érdekében rögzítsünk egy kis $\varepsilon > 0$ számot, és válasszunk minden A_n halmazhoz olyan $K_n = \bigcap_{j=1}^{N(n)} [\bar{a}_j^{(n)}, \bar{b}_j^{(n)}) \in \mathcal{A}$, halmazt, amelyre $a_j^{(n)} \le \bar{a}_j^{(n)} \le \bar{b}_j^{(n)} < b_j^{(n)}$ $-\infty < \bar{a}_j^{(n)} < \bar{b}_j^{(n)} < \infty$, és $\mu(K_n) \ge \mu(A_n) - 2^{-n}\varepsilon$. Ilyen választás lehetséges az $F(\cdot)$ függvény baloldali folytonossága miatt, azaz a Tétel A1 b) feltétele miatt, és a Tétel A1 c) és d) feltétele miatt. Ilyen választással nemcsak a $K_n \subset A_n$, hanem a $\bar{K}_n \subset A_n$ tulajdonságot is biztosítjuk, ahol $\bar{K}_n$ a K_n halmaz lezártját jelenti. Ezenkívül $\bar{K}_n$ korlátos, zárt, ezért kompakt halmaz.

Vezessük be a $K_N^* = \bigcap_{n=1}^{N} K_n$, és $\bar{K}_N^* = \bigcap_{n=1}^{N} \bar{K}_n$ halmazokat. Ekkor $\bar{K}_1^* \supset \bar{K}_2^* \supset \cdots$ egymásba skatulyázott kompakt halmazok sorozata, amelyek metszete üres. Ezért az egymásba skatulyázott kompakt halmazok metszetéről szóló tétel alapján létezik olyan N index, amelyre a $\bar{K}_N^*$, így a K_N^* halmaz is üres. Innen kapjuk, hogy $A_N = A_N \setminus K_N^* \subset \bigcap_{n=1}^{N} (A_n \setminus K_n)$, és $\mu(A_N) \le \sum_{n=1}^{N} (\mu(A_n) - \mu(K_n)) \le \varepsilon$. Ezért $\mu(A_n) \le \varepsilon$, ha $n \ge N = N(\varepsilon)$. Mivel ez az állítás minden $\varepsilon > 0$ számra igaz, innen következik, hogy $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$, és a μ halmazfüggvény mérték a $\mathcal{A}$ algebrán.

A Carathéodory-féle kiterjesztési tétel alapján a μ mértéket ki lehet terjeszteni az $\mathcal{A}$ algebra által generált σ-algebrára, amely megegyezik a számegyenes Borel σ-algebrájával. Továbbá $\mu((-\infty,x))=F(x)$ minden x valós számra. A Tétel B1-t bebizonyítottuk.

A Tétel B2-t is be lehet bizonyítani a Tétel B1 bizonyításának természetes finomításával. Azt kell kihasználni, hogy a több-változós eloszlásfüggvények Tétel A2-ben megfogalmazott (iv) tulajdonsága a monotonítás tulajdonságának természetes több-változós megfelelője. Vegyük észre, hogy az említett (iv) feltételből következik, hogy a $F_j(x)=F_j(\underbrace{\infty,\dots,\infty}_{j-1 \text{ argumentum}},x,\underbrace{\infty,\dots,\infty}_{n-j \text{ argumentum}})$ függvény monoton és balról folytonos, és $F_j(b_j)-F_j(a_j)\ge\mu_F([a_1,b_1)\times\cdots\times[a_{j-1},b_{j-1})\times[a_j,b_j)\times[a_{j+1},b_{j+1}),\times\cdots[a_n,b_n))$ minden olyan $a_1,\dots,a_n$ és $b_1,\dots,b_n$ számsorozatra, amelyre $a_j\le b_j$, $1\le j\le n$. A Tétel B2 bizonyításában a μ mértéket először $K=[a_1,b_1)\times\cdots[a_j,b_j)$ diszjunkt téglatestek véges uniójára definiáljuk. (Az $a_j=-\infty$ és $b_j=\infty$ választás is megengedett.) A μ mértéket a (iv) formula előtt téglatestekre bevezetett $\mu(K)=\mu_F(K)$ képlet segítségével definiáljuk. A Tétel B1 érveléséhez hasonlóan bebizonyíthatjuk, hogy ilyen módon egy mértéket definiálunk egy olyan algebrán, amely generálja a $\mathcal{B}^{(n)}$ Borel σ-algebrát az R^n Euklideszi téren. E mérték Carathéodory-féle kiterjesztése a $\mathcal{B}^{(n)}$ σ-algebrára megadja a Tétel B1 feltételeit teljesítő μ mértéket a $\mathcal{B}^{(n)}$ σ-algebrán. A bizonyítás részleteinek kidolgozását elhagyom.

Megfogalmazok és bebizonyítok két tételt, amelyeket a Kolmogorov tétel bizonyításában fogok felhasználni. Az első tétel azt mondja ki, hogy egy Euklideszi térben minden mérhető halmaz jól approximálható kompakt halmazokkal, a második tétel pedig azt, hogy kompakt halmazokra támaszkodó hengerhalmazok metszete a végtelen dimenziós térben hasonló tulajdonságokkal rendelkezik, mint kompakt halmazok metszete egy metrikus térben.

Tétel mérhető halmazok approximálásáról kompakt halmazokkal Euklideszi terekben. *Legyen μ véges mérték az R^n n-dimenziós Euklideszi tér $\mathcal{B}^{(n)}$ Borel σ-algebráján, azaz legyen $\mu(R^n)<\infty$. Ekkor minden $B\in\mathcal{B}^{(n)}$ halmazhoz és $\varepsilon>0$ számhoz létezik olyan K kompakt halmaz, amelyre $K\subset B$, és $\mu(K)>\mu(B)-\varepsilon$.*

Bizonyítás. Jelölje $\mathcal{B}$ azon $B\in\mathcal{B}^{(n)}$ mérhető halmazok osztályát, amelyekre igaz, hogy minden $\varepsilon>0$ számhoz található olyan $K=K(\varepsilon,B)$ kompakt és $G=G(\varepsilon,B)$ nyílt halmaz, amelyekre $K\subset B$, és $\mu(K)>\mu(B)-\varepsilon$, valamint $B\subset G$, és $\mu(B)>\mu(G)-\varepsilon$. A tétel bizonyításához elég a következő két állítást igazolni.

a) Minden $S=[a_1,b_1)\times\cdots\times[a_n,b_n)$ alakú téglatest eleme a $\mathcal{B}$ halmazosztálynak.

b) $\mathcal{B}$ σ-algebra.

Az a) állítás bizonyítása érdekében definiáljuk minden $S=[a_1,b_1)\times\cdots\times[a_n,b_n)$ téglatesthez az $K_N=[a_1,b_1-\frac1N]\times\cdots\times[a_n,b_n-\frac1N]$ kompakt és $G_N=(a_1-\frac1N,b_1)\times\cdots\times(a_n-\frac1N,b_n)$ nyílt halmazokat, $N=1,2,\dots$. Ekkor $K_1\subset K_2\subset\cdots$, és $S=\bigcup\limits_{N=1}^{\infty}K_N$.

Ezért minden $\varepsilon > 0$ számra $\mu(K_N) > \mu(S) - \varepsilon$, ha $N = N(\varepsilon)$ elég nagy, és $K_N \subset S$. Hasonlóan, $S = \bigcap\limits_{N=1}^{\infty} G_N$, és $G_1 \supset G_2 \supset \cdots$, ezért minden $\varepsilon > 0$ számra létezik olyan nyílt $G_N \supset S$ halmaz, amelyre $\mu(G_N) < \mu(S)+\varepsilon$. A $\mathcal{B}$ halmazrendszer a) tulajdonságát beláttuk.

Lássuk be, hogy ha $B \in \mathcal{B}$, akkor $R^n \setminus B \in \mathcal{B}$. Minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $K \subset B$ kompakt halmaz, amelyre $\mu(K) > \mu(B) - \varepsilon$. Egy ilyen K kompakt halmazt választva azt kapjuk, hogy a $G = R^n \setminus K$ halmaz nyílt, $R^n \setminus B \subset G$, és $\mu(R^n \setminus B) > \mu(G) - \varepsilon$. Másrészt válasszunk olyan nyílt $G \supset B$ halmazt, amelyre $\mu(G) < \mu(B) + \frac{\varepsilon}{2}$. Ekkor az $F = R^n \setminus G$ halmaz zárt, de nem feltétlenül kompakt, $F \subset R^n \setminus B$, és $\mu(R^n \setminus B) < \mu(F) + \frac{\varepsilon}{2}$. Válasszunk olyan nagy $T > 0$ számot, amelyre $\mu(R^n \setminus ([-T,T] \times \cdots \times [-T,T])) < \frac{\varepsilon}{2}$. Ekkor a $K = F \cap ([-T,T] \times \cdots \times [-T,T])$ halmaz korlátos, zárt, ezért kompakt, $K \subset R^n \setminus B$, és $\mu(R^n \setminus B) < \mu(K) + \varepsilon$. Beláttuk, hogy $R^n \setminus B \in \mathcal{B}$.

Megmutatom, hogy amennyiben $B_N \in \mathcal{B}$, $N = 1, 2, \dots$, $B_\infty = \bigcup\limits_{N=1}^{\infty} B_N$, akkor minden $\varepsilon > 0$ számra létezik olyan $K = K(\varepsilon)$ kompakt és $G = G(\varepsilon)$ nyílt halmaz, amelyekre $K \subset B_\infty$, $\mu(K) > \mu(B_\infty) - \varepsilon$, és $B_\infty \subset G$, $\mu(B_\infty) > \mu(G) - \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy $\bigcup\limits_{N=1}^{\infty} B_N = B_\infty \in \mathcal{B}$.

Valóban, minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $M = M(\varepsilon)$ index, amelyre

$$\mu\left(\bigcup_{N=1}^{M} B_N\right) + \frac{\varepsilon}{2} \ge \mu(B_\infty).$$

Válasszunk minden N indexre olyan kompakt $K_N \subset B_N$ halmazt, amelyre $\mu(K_N) > \mu(B_N) - \varepsilon 2^{-N-2}$. Ekkor a $K = \bigcup\limits_{N=1}^{M} K_N$ halmaz kompakt, $K \subset \bigcup\limits_{N=1}^{M} B_N \subset B_\infty$. Továbbá $\mu\left(\bigcup\limits_{N=1}^{M} B_N\right) - \mu(K) \le \sum\limits_{N=1}^{M} [\mu(B_N) - \mu(K_N)] < \frac{\varepsilon}{2}$, ahonnan

$$\mu(K) > \mu\left(\bigcup_{N=1}^{M} B_N\right) - \frac{\varepsilon}{2} > \mu(B_\infty) - \varepsilon.$$

Másrészt minden $\varepsilon > 0$ és $N = 1, 2, \dots$ számhoz válasszunk olyan G_N nyílt halmazt, amelyre $B_N \subset G_N$, és $\mu(G_N) < \mu(B_N) + \varepsilon 2^{-n-1}$. Ekkor $G = \bigcup\limits_{N=1}^{\infty} G_N$ nyílt halmaz, $B_\infty \subset G$, és $\mu(G) \le \mu(B_\infty) + \sum\limits_{N=1}^{\infty} \mu(G_N \setminus B_N) < \mu(B_\infty) + \varepsilon$.

Végül vegyük észre, hogy amennyiben $B_N \in \mathcal{B}$ minden $N = 1, 2, \dots$ indexre, akkor $\bigcap\limits_{N=1}^{\infty} B_N \in \mathcal{B}$, mert ekkor $\bar{B}_N = R^n \setminus B_N \in \mathcal{B}$ minden $N = 1, 2, \dots$ indexre, és $\bigcap\limits_{N=1}^{\infty} B_N = R^n \setminus \left(\bigcup\limits_{N=1}^{\infty} \bar{B}_N\right) \in \mathcal{B}$. Ezzel a $\mathcal{B}$ halmazrendszer b) tulajdonságát is beláttuk, és a tétel bizonyítását befejeztük.

Feladat:

Lássuk be közvetlenül, a fenti tétel felhasználása nélkül, hogy a $[0,1]$ intervallum irracionális számaiból álló halmaznak minden $\varepsilon > 0$ számra van olyan zárt részhalmaza, amelynek a Lebesgue mértéke nagyobb, mint $1-\varepsilon$.

A következő tétel megfogalmazása előtt bevezetek néhány jelölést. Jelölje R^∞, a 'végtelen dimenziós Euklideszi tér' a valós számokból álló végtelen $(x_1, x_2, \dots)$ sorozatok terét, és álljon $\mathcal{B}_0^{(\infty)}$ az R^∞ halmaz $B = \{(x_1, x_2, \dots,)\colon (x_1, x_2, \dots, x_n) \in C\}$, $C \in \mathcal{B}^{(n)}$, valamilyen n pozitív egész számra, alakú részhalmazaiból. A $\mathcal{B}_0^{(\infty)}$ halmazrendszer elemeit az R^∞ tér hengerhalmazainak fogom nevezni, mert az ilyen halmazok felírhatóak $B = B_0 \times R^\infty$ alakban, $B_0 \subset R^n$ alakban. A B halmaz $B = B_0 \times R^\infty$ alakú előállításában szereplő B_0 halmazt az B hengerhalmaz tartójának fogjuk nevezni. Ha B_0 kompakt halmaz az $(R^n, \mathcal{B}^{(n)})$ Euklideszi térben, akkor azt mondjuk, hogy a B halmaz egy kompakt tartójú hengerhalmaz. Ha ennek a kompakt B_0 halmaznak a dimenziója n, akkor azt mondjuk, hogy $n = r(B)$ a B halmaz tartójának a dimenziója. Megjegyzem, hogy egy B hengerhalmaz $B = B_0 \times R^\infty$ alakú előállítása nem egyértelmű. Valóban, az előállításban szereplő B_0 halmazt helyettesíthetjük például a $B_0 \times R^1$ halmazzal. Viszont, ha B kompakt tartójú hengerhalmaz, akkor annak $A = B_0 \times R^\infty$ alakú előállítása egy B_0 *kompakt* halmaz segítségével egyértelmű. Ezért egy B kompakt tartójú hengerhalmaz tartójának $r(B)$ dimenziója értelmes fogalom.

Tétel egymásba skatulyázott kompakt tartójú hengerhalmazok metszetének tulajdonságairól. *Legyen $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$, $A_j = K_j \times R^\infty$, ahol K_j kompakt halmaz az $(R^{n_j}, \mathcal{B}^{(n_j)})$ Euklideszi térben valamely n_j paraméterrel, $j = 1, 2, \dots$, egymásba skatulyázott kompakt tartójú hengerhalmazok sorozata az R^∞ 'végtelen dimenziós Euklideszi tér'-ben. Ha $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, akkor létezik olyan $N < \infty$ index, amelyre $A_N = \emptyset$.*

A tétel bizonyítása. Azt kell belátni, hogy amennyiben $A_n \neq \emptyset$ minden $n = 1, 2, \dots$ indexre, akkor létezik egy $x = (x_1, x_2, \dots) \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ pont. Ha $A = K \times R^\infty \subset \bar{A} = \bar{K} \times R^\infty$ két K és $\bar{K}$ alapú kompakt tartójú hengerhalmazra, akkor $r(A) \le r(\bar{A})$, azaz a K kompakt halmaz dimenziója kisebb vagy egyenlő, mint a $\bar{K}$ halmazé. Innen következik, hogy az $r(A_j)$ számok sorozata monoton nő, ezért vagy $\lim\limits_{n \to \infty} r(A_n) = \infty$ vagy $r(A_n) = N$ valamely fix N pozitív egész számmal minden elég nagy n indexre. Az utóbbi esetben a Tétel állítása következik az egymásba skatulyázott kompakt halmazok metszetéről szóló tételből. Ezért feltehetjük, hogy $\lim\limits_{n \to \infty} r(A_n) = \infty$.

Legyen $\lim\limits_{n \to \infty} r(A_n) = \infty$. Ekkor minden $A_n = K_n \times R^\infty$ halmazból kiválaszthatunk egy $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots) \in A_n$ pontot. Megmutatom az úgynevezett átlós eljárás segítségével, hogy a pozitív egész számok $n = 1, 2, \dots$ sorozatának van olyan $N_1, N_2, \cdots$ részsorozata, amelyre létezik az $\bar{x}_k = \lim\limits_{j \to \infty} x_k^{(N_j)}$ (véges) határérték minden $k = 1, 2, \dots$ indexre.

Valóban, mivel az A_n halmazok kompakt tartójú hengerhalmazok az R^∞ térben van olyan $N_1^{(1)}, N_2^{(1)}, \dots$ sorozat, amelyre létezik az $\bar{x}_1 = \lim\limits_{j\to\infty} x_1^{(N_j^{(1)})}$ határérték. Mivel $r(A_n) \ge 2$ véges sok n index kivételével, ennek alkalmas

$$\{N_1^{(2)}, N_1^{(2)}, \dots\} \subset \{N_1^{(1)}, N_2^{(2)}, \dots\}$$

részsorozatára létezik az $\bar{x}_2 = \lim\limits_{j\to\infty} x_2^{(N_j^{(2)})}$ határérték. Hasonlóan látható, hogy mivel $r(A_n) \ge k$ véges sok n index kivételével minden k számra, ezért induktív módon megkonstruálhatjuk az egész számok sorozatának olyan egymásba skatulyázott $\{N_1^{(k)}, N_2^{(k)}, \dots\}$ részsorozatait minden $k = 1, 2, \dots$ indexre, amelyekre

$$\{N_1^{(k+1)}, N_2^{(k+1)}, \dots\} \subset \{N_1^{(k)}, N_2^{(k)}, \dots\},$$

és az $\bar{x}_k = \lim\limits_{j\to\infty} x_k^{(N_j^{(k)})}$ határérték létezik minden $k = 1, 2, \dots$ indexre. Definiáljuk az $N_j = N_j^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots$ sorozatot. E sorozat elemeit esetleg véges sok tag kivételével tartalmazza az $\{N_1^{(k)}, N_1^{(k)}, \dots\}$ sorozat minden $k = 1, 2, \dots$ indexre. Ezért létezik az $\bar{x}_k = \lim\limits_{j\to\infty} x_k^{(N_j)}$ határérték minden $k = 1, 2, \dots$ indexre.

Azt állítom, hogy $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots) \in A_n$ minden $n = 1, 2, \dots$ számra, ahonnan következik a bizonyítandó $\bar{x} \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ reláció. Valóban, legyen $r(A_n) = k_n$, azaz legyen $A_n = K_n \times R^\infty$ egy k_n dimenziós kompakt K_n halmazzal. Ekkor $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k_n}) \in K_n$, mert $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k_n})$ a határértéke az $(\bar{x}_1^{N_j}, \dots, \bar{x}_{k_n}^{N_j})$ sorozatnak, ha $j \to \infty$, továbbá e sorozatnak esetleg véges sok tag kivételével minden eleme benne van a K_n halmazban, és a K_n halmaz kompakt. Innen viszont következik, hogy $\bar{x} \in A_n$, és ezt kellett bizonyítani.

Megjegyzés. A fenti tétel könnyen levezethető a topológia néhány klasszikus eredményéből is. A Tyihonov tételt érdemes alkalmazni, amely szerint kompakt topológikus terek direkt szorzata is kompakt. Jelen esetben ez az eredmény közvetlenül nem alkalmazható, mert a számegyenes nem kompakt. Viszont a topológia egy másik fontos eredménye szerint a számegyenesnek létezik úgynevezett egy-pontos kompaktifikációja. Ennek segítségével a tétel levezethető a Tyihonov tételből, és a kompakt halmazok tulajdonságaiból. A részletek kidolgozását elhagyom.

A Kolmogorov tétel bizonyítása. Definiáljuk minden n pozitív egész számra és $B \in \mathcal{B}^{(n)}$ Borel-mérhető halmazra az n-dimenziós Euklideszi tér Borel σ-algebrájában a $C(n,B) = \{(X(t_1), \dots, X(t_n))\colon (X(t_1), \dots, X(t_n) \in B\} \in \mathcal{B}_{\{t_1,\dots,t_n\}}$ halmazt, ahol $\mathcal{B}_{\{t_1,\dots,t_n\}}$ jelöli az $R_{\{t_1,\dots,t_n\}}$ Euklideszi téren bevezetett Borel σ-algebrát. Jelölje $\mathcal{B}_0^T$ az összes ilyen halmazból álló halmazrendszert, és definiáljuk minden $C(n,B) \in \mathcal{B}_0^T$ halmaz mértékét a $\mu(C(n,B)) = \mu_{\{t_1,\dots,t_n\}}(\{(X(t_1), \dots, X(t_n))\colon (X(t_1), \dots, X(t_n) \in B\})$ képlet segítségével. Különböző (n, B) párok definiálhatják ugyanazt a $C(n,B)$ halmazt, hiszen például $C(n,B) = C(n+k, B \times R^k)$ tetszőleges $k \ge 1$ számra, de a

$\mu_{\{t_1,\dots,t_n\}}$ mértékek konzisztenciájából következik, hogy egy $C(n,B) \in \mathcal{B}_0^T$ halmaznak előbb bevezetett $\mu(C(n,B))$ mértékét megadó képlet nem függ a $C(n,B)$ halmaz reprezentációjától.

Azt állítom, hogy $\mathcal{B}_0^T$ algebra, és μ additív halmazfüggvény ezen az algebrán. Valóban, ha adott két $C(n_1,B_1) \in \mathcal{B}_T^0$ és $C(n_1,B_1) \in \mathcal{B}_T^0$ halmaz, akkor ezen halmazok megfelelő reprezentációjával feltehetjük, hogy $n_1 = n_2 = n$ (az $n = \max(n_1,n_2)$ választással). Innen adódik, hogy teljesülnek a $C(n,B_1) \cup C(n,B_2) = C(n,B_1 \cup B_2) \in \mathcal{B}_T^0$ és $C(n,B_1) \cap C(n,B_2) = C(n,B_1 \cap B_2) \in \mathcal{B}_T^0$ relációk, és

$$\mu(C(n,B_1) \cup C(n,B_2)) = \mu(C(n,B_1 \cup B_2)) = \mu(C(n,B_1)) + \mu(C(n,B_2)),$$

ha $C(n,B_1) \in \mathcal{B}_0^T$ és $C(n,B_2) \in \mathcal{B}_0^T$ diszjunkt halmazok. Az, hogy $R_T \setminus C(n,B) = C(n,R^n \setminus B) \in \mathcal{B}_0^T$, ha $C(n,B) \in \mathcal{B}_0^T$ nyílvánvaló.

Be akarjuk látni, hogy μ nemcsak additív, hanem σ-additív is a $\mathcal{B}_0^T$ algebrán. Ehhez elég megmutatni, hogy egymásba skatulyázott $C_n = C(k(n), B_{k(n)})$, $C_n \in \mathcal{B}_0^T$, $n = 1,2,\dots$, $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset$, halmazok olyan sorozatára, amelyre $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset$ teljesül a $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(C_n) = 0$ reláció. Ezen állítás bizonyítása érdekében rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ számot, és válasszunk mindegyik C_n halmazhoz olyan $A'_n = C(k(n), K_{k(n)})$ halmazt, amelyre $K_{k(n)}$ kompakt halmaz az $R^{k(n)}$ Euklideszi térben, $K_{k(n)} \subset B_{k(n)}$, és $\mu_{\{t_1,\dots,t_{k(n)}\}}(K_{k(n)}) \ge \mu_{\{t_1,\dots,t_{k(n)}\}}(B_{k(n)}) - 2^{-n}\varepsilon$. Ilyen A'_n halmazok léteznek az *Euklideszi terekben mérhető halmazok approximálásáról szóló tétel* alapján. Legyen $A_n = \bigcap\limits_{j=1}^{n} A'_j$. Ezek olyan egymásba skatulyázott kompakt tartójú hengerhalmazok az R_T 'végtelen dimenziós Euklideszi tér'-ben, amelyek metszete üres. Ezért az egymásba skatulyázott kompakt alapú hengerhalmazok metszetének tulajdonságairól szóló tétel alapján létezik olyan n_0 index, amelyre $A_{n_0} = \emptyset$. Innen következik, hogy $\mu(C_{n_0}) = \mu(C_{n_0} \setminus A_{n_0}) \le \sum\limits_{j=1}^{n_0} \mu(C_j \setminus A'_j) = \sum\limits_{j=1}^{n_0} [\mu(C_j) - \mu(A'_j)] \le \varepsilon$. Ezért $\mu(C_n) < \varepsilon$, ha $n \ge n_0 = n_0(\varepsilon)$. Mivel ez az állítás minden $\varepsilon > 0$ számra érvényes, ezért $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(C_n) = 0$. Innen következik, hogy a fent definiált μ halmazfüggvény valószínűségi mérték a $\mathcal{B}_0^T$ algebrán.

A Carathéodory-féle kiterjesztési tétel szerint a μ valószínűségi mértéket ki lehet terjeszteni a $\mathcal{B}_0^T$ által generált σ-algebrára, amely megegyezik a Kolmogorov tételben definiált $\mathcal{B}^T$ σ-algebrával. Meg kell még mutatni, hogy

$$\mu(C(t_{j_1},\dots,t_{j_n},B_n)) = \mu_{\{t_{j_1},\dots,t_{j_n}\}}(\{(X(t_{j_1}),\dots,X(t_{j_n}))\colon (X(t_{j_1}),\dots,X(t_{j_n})) \in B_n\})$$

a Kolmogorov tételben bevezetett $\mathcal{C}_0^T$ halmazrendszer minden elemére.

Ezen állítás bizonyítása érdekében válasszunk olyan nagy N egész számot, amelyre $\{t_{j_1},\dots,t_{j_n}\} \subset \{t_1,\dots,t_N\}$, és definiáljuk a

$$\begin{aligned}\bar{B}_N &= \bar{B}_N(B_n)\\ &= \{(x_1,\dots,x_N)\colon (x_{j_1},\dots,x_{j_n}) \in B_n, \ \text{ és } x_l \in R^1 \text{ ha } l \in \{1,\dots,N\} \setminus \{j_1,\dots,j_n\}\}\end{aligned}$$

és $C(N, \bar{B}_N) = C(t_1, \dots, t_N, \bar{B}_N)$ halmazokat. Ekkor egyrészt,

$$\begin{aligned}&\mu_{\{t_{j_1},\dots,t_{j_n}\}}(\{(X(t_{j_1}),\dots,X(t_{j_n}))\colon (X(t_{j_1}),\dots,X(t_{j_n}))\in B_n\})\\ &\quad=\mu_{\{t_1,\dots,t_N\}}(\{(X(t_1),\dots,X(t_N))\colon (X(t_1),\dots,X(t_N))\in \bar{B}_N\})\end{aligned}$$

a tekintett mértékek konzisztenciája alapján. Másrészt,

$$\begin{aligned}&\mu_{\{t_1,\dots,t_N\}}(\{(X(t_1),\dots,X(t_N))\colon (X(t_1),\dots,X(t_N))\in \bar{B}_N\})\\ &\quad=\mu(C(N,\bar{B}_N))=\mu(C(t_1,\dots,t_N,\bar{B}_N))\end{aligned}$$

a μ mérték definiciója alapján, és

$$\mu(C(t_1,\dots,t_N,\bar{B}_N))=\mu(C(t_{j_1},\dots,t_{j_n},B_n)),$$

mert $C(t_1,\dots,t_N,\bar{B}_N) = C(t_{j_1},\dots,t_{j_n},B_n)$. Innen következik a bizonyítani kívánt azonosság.

Végül megjegyzem, hogy az a tény, hogy a μ mértéket az $(R_T, \mathcal{B}_T)$ téren egyértelműen meghatározzák a $\mu_{\{t_{j_1},\cdots,t_{j_n}\}}$ mértékek következik az előbb bizonyított azonosságból és a Carathéodory tétel egyértelműségi részéből.

Mivel véges dimenziós Euklideszi terekben valószínűségi mértékeket nem közvetlenül adunk meg, hanem eloszlásfüggvények segítségével, ezért érdemes a Kolmogorov-féle alaptétel olyan változatát bizonyítani, amelyben a keresett valószínűségi változók rendszerének nem a véges dimenziós eloszlásait, hanem véges dimenziós eloszlásfüggvényeit adjuk meg. Egy ilyen eredmény bizonyítása a már bizonyított Kolmogorov tétel segítségével egyszerű, mivel minden véges dimenziós $F(x_1,\dots,x_n)$ eloszlásához tudunk (egyértelműen) olyan μ_F mértéket definiálni az R^n téren, amelyre $\mu_F(\{(u_1,\dots,u_n)\colon u_1 < x_1,\dots,u_n < x_n\}) = F(x_1,\dots,x_n)$. Ez az állítás a Tétel B1 eredménye. Megfordítva minden μ mérték az R^n n-dimenziós Euklideszi tér $\mathcal{B}$ Borel σ-algebráján előállítható ilyen módon az $F(x_1,\dots,x_n) = \mu(\{(u_1,\dots,u_n)\colon u_1 < x_1,\dots,u_n < x_n\})$ eloszlásfüggvény segítségével. Ahhoz, hogy a kívánt eredményt megfogalmazzam előbb be kell vezetnem eloszlásfüggvények konzisztenciájának a definicióját.

Eloszlásfüggvények konzisztenciájának a definiciója. *Legyen adva egy T végtelen (nem feltétlenül megszámlálható) halmaz, és legyen hozzárendelve minden véges $t_1, \dots,$ t_n, $t_j \in T$, $1 \le j \le n$, véges T halmazbeli értékeket felvevő sorozathoz egy*

$$F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n)$$

eloszlásfüggvény. Ezek az eloszlásfüggvények konzisztensek, ha

a) $F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n) = F_{t_{\pi_n(1)},\dots,t_{\pi_n(n)}}(x_{\pi_n(1)},\dots,x_{\pi_n(n)})$ *az* $\{1,\dots,n\}$ *halmaz tetszőleges* $(\pi_n(1),\dots,\pi_n(n))$ *permutációjára.*

b) Ha $t_1,\dots,t_n,t_{n+1},\dots,t_{n+m}$ egy $t_1,\dots,t_n$ sorozat folytatása, $t_j\in T$, $1\le j\le n+m$, akkor $F_{t_1,\dots,t_{n+m}}(x_1,\dots,x_n,\underbrace{\infty,\dots,\infty}_{m \text{ multiplicitással}})=F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n)$, ahol

$$
\begin{aligned}
&F_{t_1,\dots,t_{n+m}}(x_1,\dots,x_n,\underbrace{\infty,\dots,\infty}_{m \text{ multiplicitással}})\\
&\qquad=\lim_{\substack{x_{n+j}\to\infty\\ 1\le j\le m}} F_{t_1,\dots,t_{n+m}}(x_1,\dots,x_n,x_{n+1},\dots,x_{n+m}).
\end{aligned}
$$

Eloszlásfüggvények és valószínűségi mértékek konzisztenciáját hasonlóan definiáltuk. A legjelentősebb különbség a két definició között az, hogy az eloszlásfüggvények konzisztenciájának a definiciójában az eloszlásokat $t_1,\dots,t_n$ sorozatokkal, míg valószínűségek konzisztenciájának a definiciójában a valószínűségi mértékeket $\{t_1,\dots,t_n\}$ halmazokkal indexeltük. Ha ugyanannak a halmaznak az elemeit más sorrendben soroljuk fel, és mindegyik sorozathoz hozzárendelünk egy eloszlásfüggvényt, akkor ezt konzisztens módon kell tenni. Ezt a követelményt fogalmazza meg az eloszlásfüggvények konzisztenciáját megadó definició a) feltétele. Igaz a következő egyszerű lemma.

Eloszlásfüggvények és valószínűségi mértékek konzisztenciájának kapcsolatáról szóló lemma. *Legyen adva egy T megszámlálhatóan végtelen halmaz és azon a T halmazbeli értékeket felvevő véges sorozatokkal indexelt $F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n)$ eloszlásfüggvények egy konzisztens rendszere. Jelölje R_T a T halmazon értelmezett valós függvények terét, és definiáljuk az R_S Euklideszi teret a hozzátartozó $\mathcal{B}_S$ σ-algebrával minden véges $S\subset T$ halmazra úgy, mint ahogy azt az* Euklideszi terek megadása véges halmazokon értelmezett függvények tereként *definicióban tettük. Rendeljük hozzá mindegyik $F_{t_1,\dots,t_n}$ eloszlásfüggvényhez azt a $\mu_{\{t_1,\dots,t_n\}}$ mértéket az $R_{\{t_1,\dots,t_n\}}$ Euklideszi tér $\mathcal{B}_{\{t_1,\dots,t_n\}}$ σ-algebráján, amelyre $\mu_{\{t_1,\dots,t_n\}}(\{(u_1,\dots,u_n)\colon\ u_1<x_1,\dots,u_n<x_n\})=F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n)$ minden $x_1,\dots,x_n$ értékre. A $\mu_{\{t_1,\dots,t_n\}}$ mértékek konzisztensek.*

Bizonyítás. Az eloszlások konzisztenciájáról szóló definició a) feltétele szerint

$$\mu_{\{t_1,\dots,t_n\}}(\{(u_1,\dots,u_n)\colon\ u_1<x_1,\dots,u_n<x_n\})$$

alakú mennyiségeket egyértelműen definiáltuk. Innen következik, hogy az $F_{t_1,\dots,t_n}$ eloszlásfüggvények egyértelműen meghatározzák a

$$\mu_{\{t_1,\dots,t_n\}}(\{(u_1,\dots,u_n)\colon\ a_n\le u_1<b_1,\dots,a_n\le u_n<b_n\})$$

alakú valószínűségeket, illetve véges sok diszjunkt téglatest uniójának a $\mu_{\{t_1,\dots,t_n\}}$ valószínűségét is. Mivel az ilyen halmazok algebrát alkotnak, a Carathéodory tétel alapján a diszjunkt téglatestek véges unióinak a mértékei a $\mu_{\{t_1,\dots,t_n\}}$ mértékeket egyértelműen meghatározzák. Hasonlóan látható, hogy a b) feltétel e mértékek konzisztenciáját is biztosítja.

Ezután meg tudjuk fogalmazni és be tudjuk bizonyítani a Kolmogorov-féle alaptételnek azt az (eredeti) változatát, ahol véges dimenziós eloszlások helyett eloszlásfüggvényekkel dolgozunk.

A Kolmogorov-féle alaptétel eredeti változata. *Legyen adva egy $T = \{t_1, t_2, \dots\}$ megszámlálhatóan végtelen halmaz, és minden véges $t_{j_1}, \dots, t_{j_n}$ T-beli értékeket felvevő sorozathoz legyen hozzárendelve egy $F_{t_{j_1},\dots,t_{j_n}}(x_1, \dots, x_n)$ eloszlásfüggvény. Legyenek ezek az eloszlásfüggvények konzisztensek. Jelölje R_T a T halmazon definiált valós értékű függvények halmazát, és definiáljuk a $\mathcal{B}_T$ σ-algebrát az R_T téren a következő módon. A $\mathcal{B}_T$ σ-algebra elemei az*

$$\{(X(t_1), X(t_2), \dots)\colon\ (X(t_1), X(t_2), \dots) \in B\}, \quad B \in \mathcal{B}^\infty,$$

alakú halmazok, ahol $\mathcal{B}^\infty$ a végtelen sorozatok R^∞ terén korábban definiált $\mathcal{B}^\infty$ σ-algebra. Ekkor létezik pontosan egy olyan μ valószínűségi mérték az $(R_T, \mathcal{B}_T)$ téren, amelyre

$$\mu(\{(X(t_1), X(t_2), \dots)\colon\ X(t_{j_1}) < x_1, \dots, X(t_{j_n}) < x_n\}) = F_{t_{j_1},\dots,t_{j_n}}(x_1, \dots, x_n)$$

minden $n = 1, 2, \dots,$ pozitív egész számra, $t_{j_1}, \dots, t_{j_n}$ T halmazbeli elemekre és $x_1, \dots,$ x_n valós számokra.

Következmény: *Teljesüljenek a Kolmogorov-féle alaptétel eredeti változatának a feltételei. Tekintsük az $(\Omega, \mathcal{A}, P) = (R_T, \mathcal{B}_T, \mu)$ valószínűségi mezőt a tételben szereplő μ valószínűségi mértékkel, és definiáljuk a ξ_t valószínűségi változókat az $(R_T, \mathcal{B}_T, \mu)$ valószínűségi mezőn minden $t \in T$ indexre a $\xi_t(\omega) = X(t)$ képlettel az $\omega = (X(t), t \in T)$ elemi eseményen. Ekkor a ξ_t valószínűségi változókra igaz, hogy a $(\xi_{t_{j_1}}, \dots, \xi_{t_{j_n}})$ véletlen vektor eloszlása az $F_{t_{j_1},\dots,t_{j_n}}(x_1, \dots, x_n)$ eloszlásfüggvény minden $t_{j_1}, \dots, t_{j_n}$ T halmazbeli véges sorozatra.*

A Kolmogorov-féle alaptétel eredeti változatának a bizonyítása. Vezessük be minden $\{t_1, \dots, t_n\} \subset T$ halmazra azt a $\mu_{\{t_1,\dots,t_n\}}$ mértéket az $R_{\{t_1,\dots,t_n\}}$ Euklideszi tér $\mathcal{B}_{\{t_1,\dots,t_n\}}$ σ-algebráján, amelyre $\mu_{\{t_1,\dots,t_n\}}(\{(u_1, \dots, u_n)\colon\ u_1 < x_1, \dots, u_n < x_n\}) = F_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n)$ minden $x_1, \dots, x_n$ értékre. Ezek a $\mu_{\{t_1,\dots,t_n\}}$ mértékek konzisztensek, ezért alkalmazhatjuk rájuk a Kolmogorov tételt. Tekintsük a Kolmogorov tételben szereplő μ mértéket. Nem nehéz belátni, hogy ez teljesíti a Kolmogorov tételben előírt tulajdonságokat. A μ mérték egyértelműsége könnyen következik a Carathéodory-féle kiterjesztési tételből.

A következmény könnyen levezethető a Kolmogorov-féle alaptétel eredeti változatából.

Példa. Legyen adva $F_j(x)$, $j = 1, 2, \dots,$ eloszlásfüggvények végtelen sorozata. Ekkor a Kolmogorov-féle alaptétel eredeti változatából egyszerűen következik, hogy létezik valószínűségi mező és azon független valószínűségi változók olyan $\xi_1, \xi_2, \dots$ sorozata, amelyre a ξ_j valószínűségi változó eloszlása $F_j(x)$ minden $j = 1, 2, \dots$ indexre. Valóban, nem nehéz ellenőrízni, hogy az $F_{j_1,\dots,j_n}(x_1,\dots,x_n)=\prod\limits_{l=1}^{n}F_{j_l}(x_j)$ függvények többváltozós eloszlásfüggvények, (azaz teljesítik a Tétel B1 feltételeit), és ezek az eloszlásfüggvények konzisztensek. (Jelen esetben a $T=\{1,2,\dots\}$ halmazt választunk indexhalmaznak.) Ezután a Kolmogorov-féle alaptétel eredeti változatának következménye biztosítja, hogy létezik a kívánt tulajdonságú valószínűségi változók sorozata. Hasonlóan látható, hogy ha adva van többváltozós $F_j(\cdot)$, $j=1,2,\dots$, eloszlásfüggvények végtelen sorozata, akkor létezik független vektor értékű ξ_j, $j=1,2,\dots$ valószínűségi változók olyan sorozata, amelyre ξ_j F_j eloszlású.

Legyen adva egy T (nem feltétlenül megszámlálhatóan) végtelen indexhalmaz, és legyen minden véges $t_1,\dots,t_n$ halmazbeli sorozathoz hozzárendelve egy $F_{t_1,\dots,t_n}$ eloszlásfüggvény úgy, hogy ezek az eloszlásfüggvények konzisztensek. Bizonyos vizsgálatokban hasznos tudni, hogy minden ilyen esetben létezik egy valószínűségi mező és azon olyan ξ_t, $t\in T$, valószínűségi változók, amelyek véges dimenziós eloszlásfüggvényei ezek az $F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n)$ függvények. Ezt az állítást nem nehéz visszavezetni a Kolmogorov-féle alaptétel eredeti változatára az alábbi egyszerű lemma segítségével. Ezen lemma tulajdonképpen annak a ténynek a következménye, hogy megszámlálható sok megszámlálható számosságú halmaz uniója szintén megszámlálható számosságú.

Lemma végtelen halmazokon definiált függvények terén definiált σ-algebrákról. *Legyen T egy (nem feltétlenül megszámlálhatóan) végtelen halmaz, és jelölje R_T az összes T halmazon definiált valós szám értékű függvényből álló halmazt. Jelölje $\mathcal{U}$ a T halmaz összes megszámlálható részhalmazából álló halmazrendszert, és minden $U=\{t_{u(1)},t_{u(2)},\dots\}\in\mathcal{U}$ halmazra definiáljuk a következő $\mathcal{B}_U$ σ-algebrát az R_T halmaz részhalmazain. A $\mathcal{B}_U$ σ-algebra elemei az*

$$\{(X(t),\,t\in T)\colon\ (X(t_{u(1)}),X(t_{u(2)}),\dots)\in B\}$$

alakú halmazok, ahol $\{t_{u(1)},t_{u(2)},\dots\}=U$, $B\in\mathcal{B}^\infty$, és $\mathcal{B}^\infty$ a végtelen x_1, $x_2,\dots$ valós számokból álló sorozatokat tartalmazó R^∞ térben korábban definiált $\mathcal{B}^\infty$ σ-algebra. Definiáljuk az R_T részhalmazaiból álló

$$\mathcal{B}_T=\bigcup_{U\in\mathcal{U}}\mathcal{B}_U$$

halmazrendszert. A $\mathcal{B}_T$ halmazrendszer σ-algebra az R_T téren.

A lemma bizonyítása. Nem nehéz ellenőrizni, hogy a $\mathcal{B}_U$, $U\in\mathcal{U}$, halmazrendszerek valóban σ-algebrák. Tekintsünk egy $B_j\in\mathcal{B}_T$, $j=1,2,\dots$, megszámlálható halmazsorozatot. Ekkor léteznek olyan $U_j\in\mathcal{U}$, $j=1,2,\dots$, halmazok, amelyekre $B_j\in\mathcal{B}_{U_j}$. Legyen $U^*=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}U_j$. Ekkor $U^*\in\mathcal{U}$, és $B_j\in\mathcal{B}_{U^*}$ minden $j=1,2,\dots$ számra. Ezért $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}B_j\in\mathcal{B}_{U^*}\subset\mathcal{B}_T$, $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty}B_j\in\mathcal{B}_{U^*}\subset\mathcal{B}_T$, és $R^T\setminus B_j\in\mathcal{B}_T$, mivel $\mathcal{B}_{U^*}$ σ-algebra. A lemmát bebizonyítottuk.

Ezután be tudjuk bizonyítani a Kolmogov-féle alaptétel minket érdeklő általános alakját.

A Kolmogorov-féle alaptétel általános alakja. *Legyen adva egy T (nem feltétlenül megszámlálhatóan) végtelen halmaz, és minden véges $t_1, \dots, t_n$ T-beli értékeket felvevő sorozathoz legyen hozzárendelve egy $F_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n)$ eloszlásfüggvény. Legyenek ezek az eloszlásfüggvények konzisztensek. Jelölje R_T a T halmazon definiált valós értékű függvények halmazát, és definiáljuk a $\mathcal{B}_T$ σ-algebrát az R_T téren úgy, ahogy azt az előző lemmában tettük. Ekkor létezik pontosan egy olyan μ valószínűségi mérték az $(R_T, \mathcal{B}_T)$ téren, amelyre*

$$\mu(\{(X(t),\, t \in T)\colon\ X(t_1) < x_1, \dots, X(t_n) < x_n\}) = F_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n) \qquad (2)$$

minden $n = 1, 2, \dots,$ pozitív egész számra, $t_1, \dots, t_n$ T halmazbeli értékeket felvevő véges sorozatra és $x_1, \dots, x_n$ valós számokra.

A fenti tételből következik, hogy a Kolmogorov-féle alaptétel eredeti változatának következményeként megfogalmazott eredmény érvényes marad akkor is, ha T tetszőleges végtelen, nem feltétlenül megszámlálható halmaz.

A Kolmogorov-féle alaptétel általános alakjának bizonyítása. A bizonyításban a végtelen halmazokon definiált függvények terén definiált σ-algebrákról szóló lemma jelölését fogom használni. A Kolmogorov-féle alaptétel eredeti változata alapján minden $U = \{t_{u(1)}, t_{u(2)}, \dots\} \in \mathcal{U}$ halmazra létezik olyan μ_U mérték a $\mathcal{B}_U$ σ-algebrán, amelyre

$$\mu_U(\{(X(t),\, t \in T)\colon\ X(t_{u(j_1)}) < x_1, \dots, X(t_{u(j_n)}) < x_n\}) = F_{t_{u(j_1)},\dots,t_{u(j_n)}}(x_1, \dots, x_n)$$

minden $t_{u(j_1)}, \dots, t_{u(j_n)}$ U-halmazbeli véges sorozatra és $x_1, \dots, x_n$ számokra. Nem nehéz ellenőrízni mértékek algebráról az algebra által generált σ-algebrára való kiterjesztésének egyértelműsége alapján, hogy amennyiben $B \in \mathcal{B}_{U_1}$ és $B \in \mathcal{B}_{U_2}$ két különböző $U_1 \in \mathcal{U}$ és $U_2 \in \mathcal{U}$ halmazra, akkor $\mu_{U_1}(B) = \mu_{U_2}(B)$. (E tulajdonság ellenőrzését redukálhatjuk arra az esetre, amikor $U_1 \subset U_2$.) Ez lehetővé teszi, hogy a $\mu(B) = \mu_U(B)$, ha $B \in \mathcal{B}_U$, $U \in \mathcal{U}$, képlet segítségével definiáljunk egy μ halmazfüggvényt a $\mathcal{B}_T$ σ-algebrán. Felhasználva, hogy megszámlálható sok megszámlálható számosságú halmaz uniója megszámlálható, könnyen láthatjuk, hogy μ σ-additív halmazfüggvény. Ugyanis, ha $B_j \in \mathcal{B}_T$, $j = 1, 2, \dots,$ diszjunkt halmazok, akkor mindegyik B_j halmaz eleme a $\mathcal{B}_{U_j}$ σ-algebrának valamely $U_j \in \mathcal{U}$ halmazra. Legyen $U^* = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} U_j$. Ekkor $U^* \in \mathcal{U}$, $U_j \in \mathcal{B}_{U^*}$ minden U_j, $j = 1, 2, \dots$ halmazra. Ezért a μ_{U^*} mérték σ-additivításából következik, hogy $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = \mu\left(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j\right)$.

A μ mérték definiciójából következik, hogy teljesíti a (2) tulajdonságot. Az adott tulajdonságú μ mérték egyértelműsége egyszerűen következik abból, hogy mértékek kiterjesztése algebráról az algebra által generált σ-algebrára egyértelmű. A tételt bebizonyítottuk.

A Kolmogorov-féle alaptétel általános alakja fontos eredmény a sztochasztikus folyamatok elméletében. Bár ez nem témája a jelen előadássorozatnak, mégis tanulságos röviden ismertetni néhány problémát e témakörben, és megvizsgálni, hogy milyen segítséget nyújtanak ezek vizsgálatában a most bizonyított eredmények. Ennek érdekében először bevezetem a következő fogalmakat.

Sztochasztikus folyamat és sztochasztikus folyamat trajektóriájának a definiciója. *Legyen adva egy T (paraméter)tartomány. Egy T paraméterű sztochasztikus folyamaton a T halmaz elemeivel indexelt $X_t(\omega) = X(t, \omega)$, $t \in T$, valószínűségi változók rendszerét értjük egy $\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. A sztochasztikus folyamat trajektóriáin a T paramétertartományon definiált $X(\cdot, \omega)$ függvényeket értjük rögzített $\omega \in \Omega$ elemi eseményekre.*

A sztochasztikus folyamatok elméletében a leggyakrabban megjelenő feladatokban a T paramétertartomány a számegyenes, a pozitív számok halmaza, egy intervallum vagy a (pozitív) egész számok halmaza. A T paraméterhalmaz $t \in T$ elemeit ilyen esetekben általában időpontként szokták interpretálni.

Egy $X(t, \omega)$ sztochasztikus folyamatot általában úgy szoktak definiálni, hogy megadják véges dimenziós eloszlásait, azaz az $(X(t_1, \omega), \dots, X(t_n, \omega))$ véletlen vektor eloszlásfüggvényét minden véges $t_1, \dots, t_n \in T$ sorozatra. A Kolmogorov-féle alaptétel általános alakja szerint, ha ezek az eloszlásfüggvények konzisztensek, akkor ilyen módon mindig egy létező sztochasztikus folyamatot definiálunk.

Valójában a probléma nehezebb. Ugyanis, amikor sztochasztikus folyamatokat vizsgálnak, akkor fel szokták tételezni azt is, hogy annak trajektóriái szépek. Így például, ha a T paramétertartomány a számegyenes vagy egy intervallum, akkor gyakran felteszik, hogy a sztochasztikus folyamat trajektóriái folytonosak. Felmerül a kérdés: Mikor van jogunk ezt feltenni?

A Kolmogorov-féle alaptétel nem nyújt segítséget e kérdés vizsgálatában. Valóban, legyen adva egy $X(t, \omega)$, $0 \le t \le 1$, sztochasztikus folyamat a $[0, 1]$ intervallumon. Vegyük észre, hogy a Kolmogorov-féle alaptétel csak annyit állít, hogy a sztochasztikus folyamat véges dimenziós eloszlásai meghatározzák az

$$\{\omega\colon\ (X(t_1, \omega), X(t_2, \omega), \dots) \in B\}$$

alakú halmazok valószínűségét, ahol $t_1, t_2, \dots$ számsorozat a $[0, 1]$ intervallumon, és B mérhető halmaz az $(R^\infty, \mathcal{B}^\infty)$ téren. Szemléletesen ez azt jelenti, hogy olyan események valószínűségéről beszélhetünk, amelyek az $X(t, \omega)$ sztochasztikus folyamat megszámlálhatóan végtelen sok t_j koordinátájától függnek. Ahhoz viszont, hogy egy függvényről eldönthessük, hogy folytonos-e, minden pontban ismernünk kell az értékét. Tehát a Kolmogorov-féle alaptételben nem definiáltuk annak az eseménynek a valószínűségét, hogy egy sztochasztikus folyamat trajektóriái folytonosak. Annak eldöntése, hogy mikor van ennek az eseménynek valószínűsége, és az mikor egyenlő eggyel külön vizsgálatot igényel. Ez azonban nem témája a jelen előadássorozatnak.

Viszont egy hasonló problémával ebben az előadássorozatban is találkozunk. Be fogom vezetni a Poisson folyamatokat. Ezt úgy fogom tenni, hogy megadom a Poisson folyamatok véges dimenziós eloszlásait. De ezenkívül azt is meg fogom követelni, hogy a Poisson folyamat trajektóriái bizonyos egymást követő (véletlen) intervallumokon konstans (egész) értéket vegyenek fel, és szomszédos intervallumok között 1-et ugorjanak. Az, hogy létezik Poisson folyamat (ilyen trajektóriákkal) szintén nem következik a Kolmogorov-féle alaptételből. A Poisson folyamatok létezését speciális konstrukció segítségével fogom belátni.

Kiegészítés.

Ismertetem a mértékelmélet egyik klasszikus eredményét mértékterek végtelen szorzatáról és tárgyalom ennek kapcsolatát a Kolmogorov-féle alaptétellel.

Tétel mértékterek végtelen szorzatáról. *Legyen adva végtelen sok* $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mu_n)$, $n = 1, 2, \dots$, *valószínűségi mező. Létezik ezeknek*

$$(\Omega^\infty, \mathcal{A}^\infty, \mu^\infty) = \left(\prod_{n=1}^\infty \Omega_n, \prod_{n=1}^\infty \mathcal{A}_n, \prod_{n=1}^\infty \mu_n\right)$$

végtelen direkt szorzata. Részletesebben kifejtve ez a direkt szorzat olyan valószínűségi mező, amelyben $\Omega^\infty = \prod\limits_{n=1}^\infty \Omega_n$ *a végtelen* $(\omega_1, \omega_2, \dots)$ *sorozatokból álló tér,* $\mathcal{A}^\infty$ *az* $A_1 \times \cdots A_{n-1} \times A_n \times \Omega_{n+1} \times \cdots$, $A_j \in \mathcal{A}_j$, $1 \le j \le n$, *alakú hengerhalmazok által generált* σ*-algebra. A* μ_∞ *mértéket úgy definiáljuk, hogy*

$$\mu^\infty (A_1 \times \cdots \times A_{n-1} \times A_n \times \Omega_{n+1} \times \cdots) = \mu(A_1) \dots \mu(A_{n-1}) \mu_n(A_n)$$

minden $n = 1, 2, \dots$ *számra és* $A_j \in \mathcal{A}_j$, $1 \le j \le n$, *halmazra. Ez a halmazfüggvény egyértelműen kiterjeszthető* σ*-additív halmazfüggvénnyé az* $\mathcal{A}_\infty$ σ*-algebrára, és így definiáljuk a keresett* μ^∞ *mértéket.*

E tételből következik, hogy ha léteznek $(\Omega_j, \mathcal{A}_j, P_j)$ valószínűségi mezők és azokon ξ_j valószínűségi változók, amelyek értékeiket valamely (általános) $(Y_j, \mathcal{Y}_j)$ mérhető terekben veszik fel, $j = 1, 2, \dots$, akkor létezik egy $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{P})$ valószínűségi mező (az $(\Omega_j, \mathcal{A}_j, P_j)$ valószínűségi mezők direkt szorzata), és azon független $\tilde{\xi}_j$, $j = 1, 2, \dots$, valószínűségi változók sorozata úgy, hogy a ξ_j és $\tilde{\xi}_j$ valószínűségi változók eloszlása megegyezik.

Hogy viszonylik ez az állítás a Kolmogorov-féle alaptételhez? Láttuk, hogy a Kolmogorov-féle alaptételnek is van egy hasonló következménye. Egy lényeges különbség azonban van az itt tárgyalt és a Kolmogorov-féle alaptétel következményeként kapott állítás között. A Kolmogorov-féle alaptételben valós szám értékű, míg itt értékét tetszőleges mérhető térben felvevő valószínűségi változókat tekintettünk. Valójában a mértékterek végtelen szorzatáról szóló tétel következményeként kapott eredmény nem vezethető le a Kolmogorov-féle alaptételből.

A Kolmogorov-féle alaptétel bizonyítása felhasználja a kompakt tartójú hengerhalmazok bizonyos tulajdonságait, így topológiai jellegű érveket is tartalmaz. Kihasználja azt, hogy a valószínűségi változók valós értékűek, pontosabban azt, hogy egy olyan térben veszik fel az értékeiket, amely szép topológiai tulajdonságokkal rendelkezik. A mértékterek végtelen szorzatáról szóló tételben semmilyen feltételt nem kell feltenni a mértékterek topológiai tulajdonságairól. Bár számunkra ennek nincs jelentősége, bizonyos kutatásokban vizsgálják, hogy mely mértékelméleti állítások érvényességéhez kell feltenni, hogy a tekintett mérhető tér bizonyos szép topológiai tulajdonságokkal rendelkezik, és mely mértékelméleti állítások igazak minden topológiai megkötés nélkül.