A DECEMBER 28-I VIZSGA FELADATAI

1.) Legyen ξ és η két független valószínűségi változó $\frac{1}{2}e^{-|x|}$, $-\infty < x < \infty$, sűrűségfüggvénnyel. Számítsa ki a $\xi + \eta$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét.

2.) Egy urnában 20 piros és 30 fehér golyó van. Kihúzunk egymás után 11 golyót visszatevés nélkül. Számítsa ki a két egymást követő fehér—fehér golyó húzások számának a várható értékét és szórásnégyzetét.

3.) Legyen adva két ξ és η valószínűségi változó, valamint egy $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ σ-algebra egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn úgy, hogy η $\mathcal{F}$-mérhető valószínűségi változó, ξ pedig független az $\mathcal{F}$ σ-algebrától. Számítsa ki az $E(\xi^2\eta^3 + \xi\eta^4|\mathcal{F})$ feltételes várható értéket.

4.) Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$, $n \ge 2$, független, normális eloszlású valószínűségi változók, $E\xi_j = m$ várható értékkel és $\sigma^2 = E\xi_j^2 - (E\xi_j)^2$, $1 \le j \le n$, szórásnégyzettel. Mutassa meg, hogy e valószínűségi változók

$$\bar{S}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_j \text{ átlaga és } V_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(\xi_j - \bar{S}_n)^2 \text{ empirikus szórásnégyzete}$$

két egymástól független valószínűségi változó. Továbbá, $E\bar{S}_n = m$, és $EV_n^2 = \sigma^2$.

5.) Hogyan szól a centrális határeloszlástétel általános alakja szériasorozatokra?

6.) Legyenek (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2), $\dots$, (ξ_n, η_n) kétváltozós véletlen vektorok egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Mikor mondjuk, hogy e véletlen vektorok függetlenek?