DOLGOZAT FELADATOK

1. Legyen ξ és η két független valószínűségi változó, amelyek közül ξ λ paraméterű és η μ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó, azaz a ξ valószínűségi változó $f(\cdot)$ sűrűségfüggvénye $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, ha $x \ge 0$, $f(x) = 0$, ha $x < 0$, az η valószínűségi változó $g(\cdot)$ sűrűségfüggvénye $g(x) = \mu e^{-\mu x}$, ha $x > 0$, $g(x) = 0$, ha $x < 0$, továbbá $\lambda > 0$, $\mu > 0$ és $\lambda \ne \mu$. Számítsuk ki a $\xi + \eta$ összeg sűrűségfüggvényét.
2. Legyen a (ξ, η) kétdimenziós véletlen vektor eloszlása egyenletes a $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 0)$ csúcspontok által meghatározott derékszögű háromszögben, azaz legyen sűrűségfüggvénye az $f(x, y) = 1$ az $x \ge 0$, $y \ge 0$, $2y + x \le 2$ egyenlőtlenséget teljesítő (x, y) pontokban, és $f(x, y) = 0$ egyébként. Számoljuk ki a ξ és η valószínűségi változók $\mathrm{Cov}\,(\xi, \eta)$ kovarianciáját.
3. Egy urnában 20 piros és 30 fehér golyó van. Kihúzunk visszatevéssel 101 golyót. Jelölje ξ azon húzások számát, amikor a kihúzott golyó színe megegyezik az előzőleg kihúzott golyó színével. Számoljuk ki ξ várható értékét és szórásnégyzetét.
4. Legyen ξ normális eloszlású valószínűségi változó -1 várható értékkel és 4 szórásnégyzettel, azaz legyen a sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-(x+1)^2/8}$. Számoljuk ki az $Ee^{t\xi}$ várható értéket tetszőleges t valós számra.
5. Az a feltételezésünk, hogy egy nálunk levő pénzdarab legalább $\frac{4}{5}$ valószínűséggel esik a fej, és legfeljebb $\frac{1}{5}$ valószínűséggel az írás oldalra. E feltevés ellenőrzése érdekében feldobjuk a pénzdarabot 10 000 alkalommal, és kijelölünk egy k számot úgy, hogy amennyiben legalább k darab fejdobás történt akkor elfogadjuk ezt a feltevést, ha pedig kevesebb fejdobás történt, akkor elutasítjuk. Hogyan válasszuk ezt a k számot, ha azt akarjuk, hogy feltevésünk helyessége esetén legalább 0.9 valószínűséggel döntsünk úgy, hogy igaz ez a feltevés?

6.) Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Mikor mondjuk, hogy ezek a valószínűségi változók függetlenek?

MEGOLDÁSOK.

1. Tudjuk, hogy a tekintett két független valószínűségi változó összegének a sűrűségfüggvényét az $f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-y)\,du$ konvolució segítségével számíthatjuk ki. Mivel $f(x) = 0$, $g(x) = 0$, ha $x < 0$, ezért ebben az esetben a konvolucióban szereplő integrandus $f(u)g(x-u) = 0$, ha $u < 0$ vagy $x - u < 0$, azaz $u \ge x$. Innen

$$f * g(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda u} \mu e^{-\mu(x-u)}\,du = \lambda\mu e^{-\mu x} \int_0^x e^{-(\lambda-\mu)u}\,du, \quad \text{ha } x \ge 0,$$

és $f * g(x) = 0$, ha $x < 0$. Ezért

$$f * g(x) = \frac{\lambda\mu e^{-\mu x}}{\mu - \lambda} \left[e^{-(\lambda-\mu)u} \right]_0^x = \lambda\mu \frac{e^{-\lambda x} - e^{-\mu x}}{\mu - \lambda} \quad \text{ha } x \ge 0 \text{ és } \lambda \ne \mu.$$

2.) $\mathrm{Cov}(\xi,\eta) = E\xi\eta - E\xi E\eta$, $E\xi\eta = \int xyf(x,y)\,dx\,dy$, $E\xi = \int xf(x,y)\,dx\,dy$ és $E\eta = \int yf(x,y)\,dx\,dy$.

$$\begin{aligned}
E\xi\eta &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\infty}^{\infty} xyf(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 x\left(\int_0^1 f(x,y)y\,dy\right)dx \\
&= \int_0^2 x\left(\int_0^{1-\frac{x}{2}} y\,dy\right)dx = \int_0^2 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-\frac{x}{2}} dx = \int_0^2 x\frac{\left(1-\frac{x}{2}\right)^2}{2}\,dx \\
&= \int_0^2 \left(\frac{x^2}{8} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right)dx = \frac{1}{2} - \frac{8}{6} + 2 = \frac{1}{6},
\end{aligned}$$

$$E\xi = \int_0^2\left(\int_0^{1-\frac{x}{2}} x\,dy\right)dx = \int_0^2\left(x - \frac{x^2}{2}\right)dx = 2 - \frac{8}{6} = \frac{2}{3},$$

$$\begin{aligned}
E\eta &= \int_0^2\left(\int_0^{1-\frac{x}{2}} y\,dy\right)dx = \int_0^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-\frac{x}{2}} dx \\
&= \int_0^2 \frac{1 - x + \frac{x^2}{4}}{2}\,dx = \frac{1}{3} - 1 + 1 = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Innen, $\mathrm{Cov}(\xi,\eta) = \frac{1}{6} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = -\frac{1}{18}$.

3. Vezessük be a ξ_i, $2 \le i \le 101$, valószínűségi változókat úgy, hogy $\xi_i = 1$, ha az i-ik és $i-1$-ik húzásban azonos színű golyót húzunk, $\xi_i = 0$, ha az i-ik húzásban különböző színű golyókat húzunk. Legyen $\xi = \sum_{i=2}^{101}\xi_i$. Ekkor az $E\xi$ és $\mathrm{Var}\,\xi$ mennyiségeket kell kiszámolnunk.

$E\xi = \sum_{i=2}^{101} E\xi_i = 100E\xi_2$, mert a ξ_i valószínűségi változók azonos eloszlásúak. Ezért, $E\xi_2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{13}{25}$, és $E\xi = 100E\xi_2 = 52$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\,\xi &= \sum_{i=2}^{101}\mathrm{Var}\,\xi_i + \sum_{2\le i,j\le 101,\, i\ne j}\mathrm{Cov}(\xi_i,\xi_j) = 100\mathrm{Var}\,\xi_2 + 2\sum_{i=2}^{100}\mathrm{Cov}(\xi_i,\xi_{i+1}) \\
&= 100\mathrm{Var}\,\xi_2 + 2\cdot 99\cdot\mathrm{Cov}(\xi_2,\xi_3),
\end{aligned}$$

mert $\mathrm{Cov}(\xi_i,\xi_j) = 0$, ha $|i-j| \ge 2$. Továbbá, $\mathrm{Var}\,\xi_2 = E\xi_2^2 - (E\xi_2)^2 = \frac{13}{25} - \left(\frac{13}{25}\right)^2 = \frac{156}{625}$, és $\mathrm{Cov}(\xi_2,\xi_3) = E\xi_2\xi_3 - E\xi_2 E\xi_3$, $E\xi_2\xi_3 = \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{35}{125}$, mert $\xi_2\xi_3$ csak nulla és 1 értéket vesz fel, és akkor vesz fel 1 értéket, ha az első három húzás mindegyike vagy piros vagy fehér.

Innen $\mathrm{Cov}(\xi_2,\xi_3) = \frac{35}{125} - \left(\frac{13}{25}\right)^2 = \frac{6}{625}$, és $\mathrm{Var}\,\xi = 100\cdot\frac{156}{625} + 2\cdot 9\cdot 6625 = \frac{16788}{625} = 26,8608$.

4. A ξ valószínűségi változót felírhatjuk $\xi = 2\eta - 1$ alakban, ahol η standard normális valószínűségi változó. Ezért $Ee^{t\xi} = Ee^{t(2\eta-1)} = e^{-t}Ee^{(2t)\eta}$. A gyakorlaton kiszámoltuk, hogy $Ee^{t\eta} = e^{t^2/2}$ tetszőleges valós t számra. (Lásd a feladatsor 1. feladatát.) Ezt a számolást itt nem ismétlem meg. Ezt az eredményt felhasználva kapjuk, hogy $Ee^{t\xi} = e^{-t}e^{(2t)^2/2} = e^{2t^2-t}$.

5. Vezessük be a ξ_j, $1 \le j \le 10\ 000$ valószínűségi változókat, amelyekre $\xi_j = 1$, ha a j-ik dobás fej, és $\xi_j = 0$, ha a j-ik dobás írás. Legyen $\xi = \sum\limits_{j=1}^{10\ 000} \xi_j$. Ekkor olyan k számot keresünk, amelyre feltevésünk teljesülése esetén $P(\xi > k) \ge 0.9$. Számoljuk ki ezt a k-tól függő valószínűséget a feltevésünk teljesülése esetén legkellemetlenebb esetben; akkor, ha a fejdobás valószínűsége $\frac{4}{5}$. Számoljuk ki ennek érdekében az $E\xi$ várható értéket és $\operatorname{Var}\xi$ szórásnégyzetet. $E\xi = 10\ 000 E\xi_1 = 10\ 000 \cdot \frac{4}{5} = 8000$. $\operatorname{Var}\xi = 10\ 000 \operatorname{Var}\xi_1 = 10\ 000 \cdot \left(\frac{4}{5} - \left(\frac{4}{5}\right)^2\right) = 1600 = 40^2$. Innen a centrális határeloszlástétel alapján

$$P(\xi > k) = P\left(\frac{\xi - 8000}{40} > \frac{k - 8000}{40}\right) \sim 1 - \Phi\left(\frac{k - 8000}{40}\right),$$

ahol $\Phi(\cdot)$ a standard normális eloszlásfüggvény. Ezért nekünk az $1 - \Phi\left(\frac{k-8000}{40}\right) = 0.9$, azaz $\Phi\left(\frac{k-8000}{40}\right) = 0.1$ vagy $\Phi\left(\frac{8000-k}{40}\right) = 0.9$ egyenletet kell megoldanunk. A normális eloszlástáblázat szerint innen, $\frac{8000-k}{40} = 1.29$, azaz $8000 - k \sim 51.6$, $k \sim 7948.4$. Legyen $k = 7949$.

6. A $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók akkor és csak akkor függetlenek, ha tetszőleges valós $x_1, \dots, x_n$ számokra

$$P(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n) = P(\xi_1 < x_1) \cdots P(\xi_n < x_n).$$

Ehelyett lehet azt a formálisan erősebb, de valójában ekvivalens kikötést tenni, hogy tetszőleges (Borel mérhető) $B_1, \dots\ B_n$ halmazokra

$$P(\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_n \in B_n) = P(\xi_1 \in B_1) \cdots P(\xi_n \in B_n).$$

Viszont nem fogadtam el teljes értékűnek olyan definiciót, amely csak diszkrét eloszlású valószínűségi változókra érvényes.