A Valószínűségszámítás II. előadássorozat harmadik témája.

ELOSZLÁSFÜGGVÉNYEK KONVERGENCIÁJA ÉS EZZEL KAPCSOLATOS ISMERETEK

A valószínűségszámítás legfontosabb eredménye a centrális határeloszlástétel. Annak érdekében, hogy ezt jól megértsük, először bizonyos az eloszlásban való konvergenciával kapcsolatos ismereteket kell elsajátítanunk. E problémakör vizsgálatában különösen hasznosnak bizonyult a Fourier sorok és a Fourier transzformáció, illetve a velük kapcsolatos legfontosabb eredmények ismerete. Mivel nemcsak a független, valós értékű valószínűségi változók normalizált összegeiről szóló centrális határeloszlástételt kívánjuk vizsgálni, hanem annak több-változós megfelelőjét is, ezért nemcsak az egy, hanem a többváltozós eloszlásfüggvények konvergenciáját is tárgyalni fogom. Először ismertetem eloszlásfüggvények konvergenciájának a definicióját.

Eloszlásfüggvények konvergenciájának definiciója. *Legyen $F_n(x_1,\dots,x_k)$, $n=0,1,2,\dots$, k-dimenziós, $k\ge 1$, eloszlásfüggvények sorozata. Azt mondjuk, hogy az F_n eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak az F_0 eloszlásfüggvényhez $n\to\infty$ esetén, ha*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x_1,\dots,x_k)=F_0(x_1,\dots,x_k)$$

az $F_0(x_1,\dots,x_k)$ eloszlásfüggvény minden folytonossági pontjában. Az eloszlásban való konvergenciát gyenge konvergenciának is nevezik az irodalomban.

Ha adva van F_n eloszlású $\xi_n=(\xi_n^{(1)},\dots,\xi_n^{(k)})$, $n=1,2,\dots$, véletlen vektorok sorozata, és az F_n eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak egy F_0 eloszlásfüggvényhez, akkor gyakran mondjuk, hogy a ξ_n véletlen vektorok eloszlásban konvergálnak az F_0 eloszlásfüggvényhez. Ha egy F_0 eloszlású $\xi_0=(\xi_0^{(1)},\dots,\xi_0^{(k)})$ véletlen vektor is adva van, akkor azt is mondhatjuk, hogy a ξ_n véletlen vektorok eloszlásban konvergálnak a ξ_0 véletlen vektorhoz.

Meg kell értenünk az eloszlásban való konvergencia pontosabb jelentését. Külön magyarázatra szorul, hogy ebben a definicióban miért csak az $F_0(x_1,\dots,x_k)$ eloszlásfüggvény folytonossági pontjaiban követeltük meg az $F_n(x_1,\dots,x_k)$ függvények konvergenciáját. Ennek megértése érdekében először megjegyzem, hogy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető a k-dimenziós Euklideszi téren definiált $F(x_1,\dots,x_k)$ eloszlásfüggvények és a k-dimenziós tér Borel halmazainak $\mathcal{B}^k$ σ-algebráján definiált μ valószínűségi mértékek között a következő módon: Feleltessük meg az F eloszlásfüggvénynek azt a létező és egyértelműen meghatározott μ_F (úgynevezett Stieltjes) valószínűségi mértéket, amelyre

$$\mu_F(\{(u_1,\dots,u_k)\colon\, u_1<x_1,\dots,u_k<x_k\})=F(x_1,\dots,x_k)$$

minden x_1, … ,x_k szám-k-asra. Bár az F_n eloszlásfüggvények konvergenciáját definiáltuk egy F_0 eloszlásfüggvényhez, látni fogjuk, hogy helyesebb lett volna az F_n eloszlásfüggvények által meghatározott μ_{F_n} Stieltjes mértékek konvergenciájáról beszélni a μ_{F_0} Stieltjes mértékhez. Tanulságos lehet a következő egyszerű példa.

Példa: Legyen $x_0 = 0$, és x_n, $n = 1, 2, \dots$, olyan számsorozat, amelyre $x_n < 0$, $n = 1, 2, \dots$, és $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Legyen μ_{F_n}, $n = 0, 1, 2, \dots$, az a (számegyenesen definiált) valószínűségi mérték, amely az x_n pontba van koncentrálva, azaz $\mu_{F_n}(\{x_n\}) = 1$, részletesebben $\mu_{F_n}(A) = 1$, ha $x_n \in A$, és $\mu_{F_n}(A) = 0$, ha $x_n \notin A$. A μ_{F_n} mérték azon F_n eloszlásfüggvény által meghatározott Stieltjes mérték, amelyre $F_n(x) = 0$, ha $x \le x_n$, $F_n(x) = 1$, ha $x > x_n$. Vegyük észre, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F_0(x)$ minden $x \ne 0$ számra. De az $x = 0$ pontban, azaz az F_0 függvény szakadási pontjában ez a konvergencia nem teljesül, mert $F_n(0) = 1$, ha $n \ge 1$, és $F_0(0) = 0$.

A fenti példában olyan esetet tekintettünk, amelyben az F_n eloszlások sorozata eloszlásban konvergál az F_0 eloszláshoz, ha $n \to \infty$. De annak érdekében, hogy ezen eloszlások sorozata teljesítse ezt a tekintett példában természetes tulajdonságot az eloszlásfüggvények konvergenciáját úgy kellett definiálni, hogy a határeloszlás függvény szakadási pontjában nem követeltük meg az eloszlásfüggvények konvergenciáját. További példákat és eredményeket is lehet mutatni, amelyek jelzik, hogy a fent megadott definició az eloszlásfüggvények konvergenciájának szerencsés definiciója. Ezzel a kérdéssel itt nem foglalkozom. Ehelyett egy olyan eredményt ismertetek, amely megadja az eloszlásfüggvények egy ekvivalens, és számunkra hasznos jellemzését.

Tétel eloszlások konvergenciájának jellemzéséről. *Legyen $F_n(x_1, \dots, x_k)$, $n = 1, 2, \dots$, k-változós eloszlásfüggvények sorozata. Ez a sorozat akkor és csak akkor konvergál eloszlásban egy k-változós $F_0(x_1, \dots, x_k)$ eloszlásfüggvényhez, ha minden a k-dimenziós térben folytonos és korlátos $f(x_1, \dots, x_k)$ f üggvényre*

$$\int f(x_1, \dots, x_k)\, dF_n(x_1, \dots, x_k) \to \int f(x_1, \dots, x_k)\, dF_0(x_1, \dots, x_k), \quad \text{ha } n \to \infty. \tag{1}$$

A Tétel bizonyítása: Először azt mutatom meg, hogy az eloszlásban való konvergenciából következik az integrálok (1) formulában felírt konvergenciája.

Mivel az F_0 eloszlásfüggvényre $F_0(x_1, \dots, x_k) \to 1$, ha $x_j \to \infty$ minden $j = 1, \dots, k$-ra, és $F_0(x_1, \dots, x_k) \to 0$, ha $x_j \to -\infty$ valamelyik $1 \le j \le k$-ra, ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra létezik olyan $\mathbf{K}$ téglatest, amelyre $\mu_{F_0}(\mathbf{K}) > 1 - \varepsilon$. (Adva egy F eloszlásfüggvény a továbbiakban μ_F-fel fogjuk jelölni az F eloszlás által indukált Stieltjes mértéket.) Továbbá, mivel $F_n \to F_0$, ha $n \to \infty$, ezért elérhető a $\mathbf{K}$ halmazt esetleg nagyobbra választva, hogy a $\mu_{F_n}(\mathbf{K}) > 1 - \varepsilon$ reláció is teljesüljön minden F_n, $n = 1, 2, \dots$, eloszlásfüggvényre. Azt is feltehetjük, hogy a $\mathbf{K}$ halmaz határa null mértékű, ezért a K téglatest mindegyik csúcspontja folytonossági pontja az F_0 eloszlásfüggvénynek. Itt azt kell kihasználni, hogy az F_0 eloszlás vetülete a j-ik koordinátára olyan 1 dimenziós eloszlás, amelyiknek csak megszámlálható sok atomja van minden $j = 1, \dots, k$-ra. (Ezt a kérdést részletesebben tárgyalom a kiegészítésben.)

Az f függvény korlátossága miatt $\left| \int_{R^k \setminus \mathbf{K}} f(x_1, \dots, x_k)\, dF_0(x_1, \dots, x_k) \right| < \text{const.}\, \varepsilon$, és $\left| \int_{R^k \setminus \mathbf{K}} f(x_1, \dots, x_k)\, dF_n(x_1, \dots, x_k) \right| < \text{const.}\, \varepsilon$ minden $n = 1, 2, \dots$-ra. Továbbá, az f folytonos függvény *egyenletesen folytonos* a $\mathbf{K}$ téglatesten. Ezért létezik olyan $\delta > 0$

szám, amelyre $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$, ha $|x-y|\le\delta$, és $x,y\in K$. A $\mathbf{K}$ téglatest felbontható véges sok, közös belső ponttal nem rendelkező, legfeljebb δ átmérőjű Δ_j, $j=1,\dots,p(\mathbf{K})$ téglatest uniójára, amelyeknek a határai 0 mértékűek az F_0 által indukált μ_{F_0} mérték szerint. Így $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_{F_n}(\Delta_j)=\mu_{F_0}(\Delta_j)$ minden $j=1,\dots,p(\mathbf{K})$-ra, és az f függvény egyenletes folytonossága miatt a $\mathbf{K}$ halmazon

$$\limsup\left|\int_{\mathbf{K}} f\,dF_n-\int_{\mathbf{K}} f\,dF_0\right|<\varepsilon.$$

A fenti egyenlőtlenségekből következik, hogy $\limsup\left|\int f\,dF_n-\int f\,dF_0\right|<\text{const.}\,\varepsilon$, ahol const. független az ε-tól. Mivel ez igaz minden $\varepsilon>0$-ra, innen következik a kívánt állítás.

Ezután megmutatom, hogy az (1) formulában szereplő integrálok konvergenciájából következik az eloszlásban való konvergencia.

Legyen $x=(x_1,\dots,x_k)$ az F_0 eloszlásfüggvény folytonossági pontja. Ekkor minden $\varepsilon>0$-hoz létezik olyan $\delta>0$ szám, hogy az $y=(y_1,\dots,y_k)=(x_1-\delta,\dots,x_k-\delta)$ és $z=(z_1,\dots,z_k)=(x_1+\delta,\dots,x_k+\delta)$ pontokra $F_0(y)>F_0(x)-\varepsilon$ és $F_0(z)<F_0(x)+\varepsilon$. Léteznek továbbá olyan $f_1(u)$ és $f_2(u)$ folytonos függvények az R^k téren, amelyek teljesítik a következő tulajdonságokat: $0\le f_i(u)\le 1$ minden $u\in R^k$-ra, $i=1,2$. Továbbá $f_1(u)=1$, $u=(u_1,\dots,u_k)$-ra, ha $u_j\le y_j$, minden $j=1,\dots,k$, és $f_1(u)=0$, ha $u_j\ge x_j$ valamely $1\le j\le k$-re. Az $f_2(\cdot)$ függvény pedig a következő relációkat teljesíti: $f_2(u)=1$, ha $u_j\le x_j$ minden $j=1,\dots,k$-ra, és $f_2(u)=0$, ha $u_j\ge z_j$ valamely $1\le j\le k$-ra. Ekkor

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} F_n(x)&\ge\lim_{n\to\infty}\int f_1(u)\,dF_n(u)=\int f_1(u)\,dF_0(u)\ge F_0(x)-\varepsilon\\
\limsup_{n\to\infty} F_n(x)&\le\lim_{n\to\infty}\int f_2(u)\,dF_n(u)=\int f_2(u)\,dF_0(u)\le F_0(x)+\varepsilon.
\end{aligned}$$

Mivel ezek az egyenlőtlenségek minden $\varepsilon>0$-ra igazak, innen következik az állítás. A tételt bebizonyítottuk.

Eloszlásfüggvények konvergenciáját be tudjuk bizonyítani az (1) formulában megfogalmazott tulajdonság ellenőrzésének a segítségével. Felmerül a kérdés, nem lehet-e ezt a bizonyítandó tulajdonságot egyszerűsíteni, és megmutatni azt, hogy elegendő az (1) formulát csak olyan speciális (folytonos és korlátos) függvényekre ellenőrizni, amelyekre ez könnyebben megtehető. Kiderült, hogy a határeloszlástételek vizsgálatát végre lehet hajtani akkor is, ha csak az úgynevezett $f_{t_1,\dots,t_k}(x_1,\dots,x_k)=e^{i(t_1x_1+\cdots+t_kx_k)}$ trigonometrikus függvények integrálját vizsgáljuk az $F_n(x_1,\dots,x_k)$ eloszlásfüggvények szerint, ahol $i=\sqrt{-1}$, és $t_1,\dots,t_k$ valós számok, a tekintett függvények paraméterei. Emlékezzünk arra, hogy $e^{iu}=\cos u+i\sin u$. Innen származik a trigonometrikus függvény elnevezés. Ahhoz, hogy a határeloszlástételek tanulmányozását visszavezessük trigonometrikus függvények integráljának a vizsgálatára, illetve ezen integrálok viselkedését jobban megértsük szükségünk van a Fourier analízis néhány alapvető eredményének az ismeretére.

Mutatok egy példát arra, hogyan lehet egy számunkra hasznos, és korántsem egyszerű eredményt viszonylag könnyen bebizonyítani Fourier sorok segítségével. Az úgynevezett Stirling formulát fogom bebizonyítani, amely jó aszimptotikát ad az $n!$ kifejezésre nagy n számokra. Azt is megtárgyalom, hogy a bizonyítás hátterében a határeloszlástételek vizsgálatában hasznos gondolatok rejtőznek.

Egy

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{ijt}, \quad -\pi \le t \le \pi, \tag{2}$$

konvergens végtelen sort, ahol az a_j együtthatók valós vagy komplex számok, Fourier sornak nevezünk. Vegyük észre, hogy az e^{ijt} függvények, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, periódikusak 2π szerint, ezért a belőlük készített sor is periódikus 2π szerint. Ez teszi természetessé a $-\pi \le t \le \pi$, megkötést a (2) formulában. Egy alapos tárgyalás során tisztázni kell azt is, hogy mit értünk a (2) formulában felírt sor konvergenciáján. Mivel nem számok, hanem függvények végtelen összegéről van szó, ez a definició nem egyértelmű, több egymással nem ekvivalens és értelmes konvergenciafogalom definiálható. Fourier sorok vizsgálatában a leghasznosabb konvergenciafogalomnak az úgynevezett L_2 konvergencia bizonyult. Eszerint a (2) formulában felírt (végtelen) összeg akkor konvergál egy $f(t)$ függvényhez, ha teljesül az

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(t) - \sum_{j=-n}^{n} a_j e^{ijt} \right)^2 dt \to 0 \quad \text{ha } n \to \infty$$

reláció. Az ilyen irányú vizsgálatok az analízisben nagyon fontosak. De számunkra ez nem lesz fontos, ezért az ilyen irányú kérdések vizsgálatával nem fogunk foglalkozni. Viszont a mi számunkra is fontos a trigonometrikus függvények következő ortogonalitásnak nevezett tulajdonsága.

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\overline{e^{imt}}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{int}e^{-imt}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t}\, dt = 0 \quad \text{ha } n \ne m,$$

és

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\overline{e^{int}}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} dt = 2\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots.$$

E formulák felhasználásával, felhasználva a tagonkénti integrálás tulajdonságait egyszerűen kifejezhetjük a (2) formulában szereplő a_n úgynevezett Fourier együtthatókat a Fourier sor $f(t)$ összegének a segítségével. Nevezetesen,

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t)\, dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots. \tag{3}$$

Ez a formula hasznosnak bizonyult a Stirling formula alább ismertetett bizonyításában.

Stirling formula:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

azaz az első n egész szám szorzata, $n!$ teljesíti az alábbi relációt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!} = 1.$$

A Stirling formula bizonyítása: Először azt mutatom meg, hogy

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{2\pi}{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{n(e^{it}-1-it)}\,dt}. \tag{4}$$

Tekintsünk egy ξ Poisson eloszlású valószínűségi változót $\lambda = n$ paraméterrel, azaz legyen $P(\xi = k) = \frac{n^k}{k!}e^{-n}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Számítsuk ki a $P_n(t) = Ee^{it\xi}$ várható értéket minden t valós számra. Ez a következő $P_n(t)$ Fourier sor kiszámítását jelenti:

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\xi = k)e^{itk} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!}e^{-n+ikt} = e^{-n}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ne^{it})^k}{k!} = e^{-n+ne^{it}}.$$

Innen, illetve egy Fourier sor együtthatóinak a (3) formulában megadott kifejezéséből a Fourier sor segítségével $k = n$ választással kapjuk, hogy

$$P(\xi = n) = \frac{n^n}{n!}e^{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}P_n(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int-n+ne^{it}}\,dt.$$

Ez a képlet ekvivalens a (4) formulával.

A (4) formula alapján a Stirling formula bizonyításához elég megmutatni azt, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{n(e^{it}-1-it)}\,dt = 1,$$

amit úgyis írhatunk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{n(e^{it}-1-it)}\,dt}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-nt^2/2}\,dt} = 1,$$

mivel, mint a normális sűrűségfüggvény vizsgálatában láttuk, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt = \sqrt{2\pi}$, ahonnan $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-nt^2/2}\,dt = \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$. (Ez az azonosság kellett annak igazolásához, hogy a normális eloszlás sűrűségfüggvénye valóban sűrűségfüggvény.)

Viszont tekintve az e^{it} függvény Taylor sorát azt kapjuk, hogy

$$n(e^{it} - 1 - it) = -n\left(\frac{t^2}{2} + \alpha(t)t^3\right) = -\frac{nt^2}{2} + \beta(t)n^{-1/8},$$

alkalmas $|\alpha(t)| \le$ const. és $|\beta(t)| \le$ const. együtthatókkal, ha $|t| \le n^{-3/8}$. Innen $e^{n(e^{it}-1-it)} = e^{-nt^2/2}e^{\beta(t)n^{-1/8}} = e^{-nt^2/2}\left(1+\gamma(t)n^{-1/8}\right)$, $\gamma(t) \le \text{const.}$, ha $t \le n^{-3/8}$, és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\displaystyle\int_{-n^{-3/8}}^{n^{-3/8}} e^{n(e^{it}-1-it)}\,dt}{\displaystyle\int_{-n^{-3/8}}^{n^{-3/8}} e^{-nt^2/2}\,dt} = 1.$$

Továbbá nem nehéz belátni, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\displaystyle\int_{-n^{-3/8}}^{n^{-3/8}} e^{-nt^2/2}\,dt}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-nt^2/2}\,dt} = \lim_{n\to\infty} \frac{\displaystyle\int_{-n^{1/8}}^{n^{1/8}} e^{-t^2/2}\,dt}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt} = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{2\displaystyle\int_{n^{1/8}}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt}{\sqrt{2\pi}} = 1,$$

ezért elég megmutatni, hogy az $\displaystyle\int_{-\pi}^{-n^{-3/8}} e^{n(e^{it}-1-it)}\,dt$ és $\displaystyle\int_{n^{-3/8}}^{\pi} e^{n(e^{it}-1-it)}\,dt$ integrálok elég kicsik, pontosabban ezek az integrálok $\sqrt{n}$-nel megszorozva is nullához tartanak. (Ez a feltétel azért jelenik meg ebben a formában, mert $\sqrt{n}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-nt^2/2}\,dt = \sqrt{2\pi}$. Ennek bizonyításához jegyezzük meg, hogy $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$ tetszőleges z komplex számra, ahol $\operatorname{Re} z$ a z szám valós részét jelöli. Innen

$$|e^{n(e^{it}-1-it)}| = e^{n(\cos t-1)} \le e^{-\text{const.}\, n^{1/4}},$$

ha $n^{3/8} \le |t| \le \pi$, ahonnan következik a kívánt becslés.

Megjegyzem, hogy a fenti bizonyítás hátterében a következő észrevétel van. Ha tekintünk n független 1 paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változót, akkor ezek összege n paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó. Annak valószínűségét akarjuk becsülni, hogy n független Poisson eloszlású valószínűségi változó összege egy előírt értéket vesz fel. A centrális határeloszlásérték sugall ennek a valószínűségnek az aszimptotikájára egy értéket, és tulajdonképpen ennek helyességét igazoltuk. A bizonyítás azon alapult, hogy az $Ee^{it\xi}$, $-\pi \le t \le \pi$, várható értéket kifejező Fourier sort ki tudtuk számolni, illetve az így kapott kifejezésre jó aszimptotikus formulát tudtunk adni. Megjegyzem, hogy mind a centrális, mind a lokális centrális határeloszlástétel a várható értékhez közeli értékek esetén ad jó becslést független valószínűségi változók eloszlás, illetve sűrűségfüggvényére. Egy n paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó várható értéke n, és a Stirling formula bizonyításában itt számítottuk ki egy ilyen valószínűségi változó sűrűségfüggvényét.

Az előbb felhasznált eredmény bizonyításában egy általánosabb probléma megoldására kidolgozott módszert alkalmaztunk egy speciális esetben. Legyen adva független, egész értékeket fölvevő $\xi_1,\dots,\xi_n$ valószínűségi változók sorozata. Jelölje $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j$

ezen valószínűségi változók összegét, és próbáljunk jó becslést adni a $P(S_n = k)$ alakú valószínűségekre. Ennek érdekében vezessük be a a ξ_j valószínűségi változók eloszlása által meghatározott $U_j(t) = Ee^{it\xi_j} = \sum\limits_k e^{itk} P(\xi_j = k)$ Fourier sorokat. Vegyük továbbá észre, hogy mivel független valószínűségi változók szorzatának a várható értéke egyenlő a szorzatban szereplő valószínűségi változók várható értékének a szorzatával, (ez az azonosság érvényes mind valós mind komplex értékű valószínűségi változókra) ezért az S_n valószínűségi változóhoz tartozó Ee^{itS_n} kifejezés kiszámolható a következő módon.

$$\begin{aligned}\sum_k P(S_n = k)e^{itk} &= Ee^{itS_n} = Ee^{it(\xi_1+\cdots+\xi_n)} = E(e^{it\xi_1}e^{it\xi_2}\cdots e^{it\xi_n}) \\ &= Ee^{it\xi_1}Ee^{it\xi_2}\cdots Ee^{it\xi_n} = \prod_{j=1}^n U_j(t).\end{aligned} \tag{5}$$

Ezért, ha az (5) képlet jobboldalán szereplő kifejezésre jó becslést tudunk adni, akkor a (3) inverziós formula segítségével jó becslést kapunk a $P(S_n = k)$ valószínűségekre is. (Itt a k paraméter játssza az n paraméter és az (5) formula jobboldalán levő szorzat az $f(t)$ függvény szerepét a (3) formulában.) Továbbá nagyon általános feltételek mellett az (5) formula jobboldalán szereplő produktumot jól meg tudjuk becsülni nulla körüli alkalmas Taylor sorfejtés segítségével. Ahhoz a kérdéshez, hogy hogyan lehet az (5) formula jobboldalán szereplő kifejezést jól megbecsülni, és ennek érdekében milyen feltételeket kell tenni, később visszatérek.

A Stirling formulát e módszer segítségével bizonyítottuk be. Azt a speciális esetet vizsgáltuk, amikor Poisson eloszlású valószínűségi változókat tekintünk. E módszer kidolgozásával az általános esetre csak később fogok foglalkozni. Ehelyett most azt a kérdést tekintem, hogy hogyan tudjuk ezt a módszert adaptálni annak a problémának a vizsgálatára, amikor független valószínűségi változók összegének az eloszlása érdekel minket. Tehát a $P(S_n = x)$ valószínűség helyett a $P(S_n < x)$ valószínűségre kívánunk jó becslést adni. E kérdés vizsgálatának az érdekében bevezetem a Fourier sorok 'folytonos paraméterű' megfelelőit, a számegyenesen vagy az R^k k-dimenziós Euklideszi téren definiált függvények és mértékek Fourier transzformáltját.

Függvények és mértékek Fourier transzformáltjának a definiciója. *Legyen $f(x_1, \dots, x_k)$ k-változós integrálható függvény, azaz tegyük fel, hogy*

$$\int_{R^k} |f(x_1, \dots, x_k)|\, dx_1 \dots dx_k < \infty.$$

Az $f(\cdot)$ függvény Fourier transzformáltja az

$$\tilde{f}(t_1, \dots, t_k) = \int_{R^k} e^{i(t_1x_1+\cdots+t_kx_k)} f(x_1, \dots, x_k)\, dx_1 \dots dx_k$$

függvény, ahol $-\infty < t_j < \infty$, $1 \le j \le k$.

Legyen μ egy véges mérték az R^k k-dimenziós Euklideszi téren. E μ mérték Fourier transzformáltja a

$$\varphi(t) = \varphi(t_1, \dots, t_k) = \int e^{i(t,x)} \mu(\,dx) = \int e^{i(t_1x_1+\cdots+t_kx_k)} \mu(\,dx_1, \dots, \,dx_k)$$

függvény, ahol $t = (t_1, \dots, t_k)$ a k-dimenziós tér tetszőleges pontja, és a következő jelölést használtuk. Ha $t = (t_1, \dots, t_k)$ és $x = (x_1, \dots, x_k)$ két k-dimenziós vektor, akkor $(t, x) = t_1x_1 + \cdots + t_kx_k$ a t és x vektor skaláris szorzata.

Ha $F(x) = F(x_1, \dots, x_k)$ egy k változós eloszlás függvény, akkor tekintsük az F eloszlás szerint indukált μ_F Stieltjes mértéket. Ennek a μ_F Stieltes mértéknek a $\varphi(t) = \varphi(t_1, \dots, t_k)$ Fourier transzformáltját az $F(x)$ eloszlásfüggvény karakterisztikus függvényének nevezzük. Ha adva van egy $F(x_1, \dots, x_k)$ eloszlású $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ véletlen vektor, akkor ennek karakterisztikus függvényét is definiáljuk, és ez az $F(x_1, \dots, x_k)$ eloszlás karakterisztikus függvényével egyenlő.

Célunk az, hogy eloszlások aszimptotikus viselkedését jól leírjuk ezek Fourier transzformáltjának, azaz karakterisztikus függvényének a segítségével. Azt szeretnénk megmutatni, hogy eloszlásfüggvények karakterisztikus függvényeinek a konvergenciájából következik az eloszlásfüggvények konvergenciája is. Fourier sorok együtthatóit a (2) relációban megfogalmazott viszonylag egyszerű inverziós képlet segítségével tudtuk vizsgálni. Fourier transzformáltak esetében azonban nincs olyan egyszerű inverziós formula, amelynek felhasználásával ki tudunk számolni egy mértéket a Fourier transzformáltja segítségével. Ezért ebben az esetben egy körülményesebb eljárást alkalmazunk. Szükségünk van egy olyan eredményre, amely azt fejezi ki, hogy a trigonometrikus függvények, pontosabban azok lineáris kombinációi, a folytonos függvények elég gazdag családját alkotják. Ilyen állítást fejez ki Weierstrass második approximációs tétele.

Weierstrass második approximációs tétele. *Tetszőleges folytonos és 2π szerint periodikus $f(x)$ függvényre és $\varepsilon > 0$ valós számra létezik olyan $P_n(x) = \sum\limits_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}$ trigonometrikus polinom, amelyre*

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon.$$

(A P_n polinom foka és a benne szereplő a_k együtthatók függnek mind az $f(\cdot)$ folytonos függvénytől és az $\varepsilon > 0$ számtól. Ha az $f(\cdot)$ függvény valós értékű, akkor az a_k együtthatókat választhatjuk úgy, hogy $a_{-k} = \bar{a}_k$ minden $k = 0, 1, \dots, n$ indexre, ahol $\bar{z}$ a z szám konjugáltja. Ekkor a $P_n(t)$ trigonometrikus polinom is valós értékű.)

Igaz ennek az állításnak a következő többdimenziós változata is. Ha adott egy $f(x_1, \dots, x_k)$ folytonos függvény a k-dimenziós euklideszi térben, amely minden koordinátájában 2π szerint periodikus, azaz $f(x_1 + 2j_1\pi, \dots, x_k + 2j_k\pi) = f(x_1, \dots, x_k)$ minden egész $j_1, \dots j_k$ számra, és egy $\varepsilon > 0$ valós szám, akkor létezik olyan k változós

$$P_n(x_1, \dots, x_k) = \sum_{(j_1,\dots,j_k)\colon\, |j_1|+\cdots+|j_k|\le n} a_{j_1,\dots,j_k} e^{i(j_1x_1+\cdots+j_kx_k)}$$

trigonometrikus polinom, ahol $j_1, \dots, j_k$ *egész számok, amelyre*

$$|f(x_1, \dots, x_k) - P_n(x_1, \dots, x_k)| < \varepsilon \quad \textit{minden valós } x_1, \dots, x_k \textit{ számra.}$$

Megjegyzés: A továbbiakban egy

$$P_n(x_1, \dots, x_k) = \sum_{(j_1, \dots, j_k):\ |j_1| + \dots + |j_k| \le n} a_{j_1, \dots, j_k} e^{i(j_1 x_1/K_1 + \dots + j_k x_k/K_k)}$$

alakú kifejezést, ahol $K_1, \dots, K_k$ tetszőleges pozitív valós számok trigonometrikus polinomnak fogunk nevezni. Weierstrass második approximációs tételéből következik (alkalmas átskálázással), hogy a folytonos, minden koordinátájában periódikus $f(x_1, \dots, x_k)$ függvények, (azaz az olyan $f(x_1, \dots, x_k)$ függvények, amelyekre $f(x_1 + \frac{K_1 j_1}{2\pi}, \dots, x_k + \frac{K_k j_k}{2\pi}) = f(x_1, \dots, x_k)$ alkalmas $K_1 > 0, \dots\ K_k > 0$ valós és tetszőleges $j_1, \dots, j_k$ egész számokkal) tetszőleges pontossággal közelíthetőek trigonometrikus polinomokkal a szuprémum normában.)

Ahhoz, hogy belássuk, hogy eloszlások karakteresztikus függvényeinek konvergenciájából következik maguknak az eloszlásfüggvényeknek a konvergenciája először meg kell mutatnunk, hogy egy eloszlást meghatároz a karakterisztikus függvénye. Ezt mondja ki a következő tétel.

Tétel valószínűségi mértékek és karakterisztikus függvényük kapcsolatáról. *Egy valószínűségi mértéket egyértelműen meghatároz a karakterisztikus függvénye.*

A tétel bizonyítása azon alapul, hogy Weierstrass második approximációs tétele alapján folytonos függvényeket jól lehet approximálni trigonometrikus polinomokkal, így egy valószínűségi mérték szerinti integráljuk is jól közelíthető alkalmas trigonometrikus polinomok e mérték szerinti integráljával, azaz a mérték karakterisztikus függvényének különböző helyeken felvett értékeinek lineáris kombinációival. De a Weierstrass-féle approximációs tétel csak periódikus függvények jó approximációját biztosítja. E nehézség leküzdésének az érdekében először a következő (egyszerű) lemmát látjuk be.

Lemma valószínűségi mértékek viselkedéséről a végtelen környezetében. *Legyen* μ *valószínűségi mérték a* k*-dimenziós euklideszi tér Borel mérhető részhalmazain és* $\varepsilon > 0$ *valós szám. Létezik olyan* $K = K(\mu, \varepsilon)$ *szám, amelyre a*

$$\mathbf{K}^k(K) = \underbrace{[-K, K] \times \dots \times [-K, K]}_{k\text{-szoros szorzat}}$$

k*-dimenziós kocka teljesíti a* $\mu(\mathbf{K}(K)^k) > 1 - \varepsilon$ *egyenlőtlenséget.*

A lemma bizonyítása. Tekintsük azokat a $\mathbf{K}(K)^k = \underbrace{[-K, K] \times \dots \times [-K, K]}_{k\text{-szoros szorzat}}$ azt a k-dimenziós kockákat az R^k térben, amelyeknek mindegyik oldala a $[-K, K]$ intervallum.

Mivel $\bigcup\limits_{K=1}^{\infty} \mathbf{K}(K)^k = R^k$ és $\mathbf{K}(K)^k$, $K = 1, 2, \dots$, monoton növekvő halmazsorozat, ezért $\lim\limits_{K\to\infty} \mu(\mathbf{K}(K)^k) = \mu(R^k) = 1$, azaz $\mu(\mathbf{K}(K)^k) \ge 1 - \varepsilon$, ha $K \ge K(\varepsilon)$.

A tétel bizonyítása. Azt kell bebizonyítani, hogy ha μ_1 és μ_2 két olyan valószínűségi mérték az R^k Euklideszi téren, amelyek Fourier transzformáltjai megegyeznek, akkor $\mu_1 = \mu_2$. Ennek érdekében megmutatom alkalmas az R^k Euklideszi téren definiált $\mathcal{F}$ függvényosztályokra, hogy $\int f\,d\mu_1 = \int f\,d\mu_2$, ha $f \in \mathcal{F}$. Sikerült ezt a relációt olyan $\mathcal{F}$ függvényosztályra is belátni, amelyre ez a tulajdonság implikálja, hogy $\mu_1 = \mu_2$.

Az $\int f\,d\mu_1 = \int f\,d\mu_2$, ha $f \in \mathcal{F}$ nyílvánvalóan következik a tétel feltételeiből, ha $\mathcal{F}$ az R^k téren definiált valamely $K = (K_1, \dots, K_k)$ vektor szerint periodikus trigonometrikus polinomokból áll. Weierstrass második approximációs tétele alapján ez az azonosság érvényben marad akkor is, ha $\mathcal{F}$ a minden változójában periódikus, folytonos függvényekből áll. Ugyanis tetszőleges $f_K(\cdot)$ K periódusú folytonos függvényhez és $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan

$$g_\varepsilon(x_1, \dots, x_k) = g_{\varepsilon, f_K}(x_1, \cdots, x_k) = \sum c^{\varepsilon}_{j_1,\dots,j_k} e^{i2\pi(j_1x_1+\cdots+j_kx_k)/K}$$

trigonometrikus polinom, amelyre $\sup\limits_{x\in R^k} |f_K(x) - g_\varepsilon(x)| \le \varepsilon$, és ezért

$$\left| \int f_K(x)\,d\mu_j(x) - \int g_\varepsilon(x)\,d\mu_j(x) \right| \le \varepsilon, \quad j = 1, 2.$$

Ugyancsak igaz marad az $\int f\,d\mu_1 = \int f\,d\mu_2$, ha $f \in \mathcal{F}$ azonosság akkor, ha $\mathcal{F}$ az összes kompakt tartójú folytonos függvények osztálya. Ugyanis, ha $f(\cdot)$ kompakt tartójú folytonos függvény, akkor minden elég nagy $K > 0$ számra a $[-K, K] \times \cdots \times [-K, K]$ kocka tartalmazza az $f(\cdot)$ függvény tartóját, és definiálhatjuk az $f(\cdot)$ függvény $2K$ periódusú $f_K(\cdot)$ periodikus kiterjesztését az

$$f_K(x_1 + 2Kl_1, \cdots, x_k + 2Kl_k) = f(x_1, \cdots, x_k), \quad -K \le x_j < K,$$

$l_j = 0, \pm1, \pm2, \dots$, $j = 1, \dots, k$, képlet segítségével. Továbbá igaz az $\int f(x)\,d\mu_j(x) = \lim\limits_{K\to\infty} \int f_K(x)\,d\mu_j(x)$, $j = 1, 2$, reláció az előző lemma szerint, és a kívánt azonosság teljesül periódikus függvényekre.

A bizonyítás következő lépése annak megmutatása, hogy az $\int f\,d\mu_1 = \int f\,d\mu_2$, ha $f \in \mathcal{F}$ azonosság akkor is érvényes, ha $\mathcal{F}$ az olyan $\mathbf{P} = [K_1, L_1) \times \cdots \times [K_k, L_k)$ téglatestek indikátorfüggvényeiből áll, amelyek $x_j = K_j$ és $x_j = L_j$, $1 \le j \le k$, határsíkjainak a mértéke nulla mind a μ_1 mind a μ_2 mérték szerint.

Ezt az állítást vissza lehet vezetni alkalmas limeszeljárás segítségével a kompakt tartójú függvények esetére. Azt a tényt érdemes felhasználni, hogy minden $\varepsilon > 0$ számra és $\mathbf{P}$ téglatestre létezik olyan $f_{\varepsilon,\mathbf{P}}(\cdot)$ folytonos és kompakt tartójú függvény, amelyre $0 \le f_{\varepsilon,\mathbf{P}}(x) \le 1$ minden $x \in R^k$ pontra, $f_{\varepsilon,\mathbf{P}}(x) = 1$, ha $x \in \mathbf{P}$ és $f_{\varepsilon,\mathbf{P}}(x) = 0$, ha $\rho(x, \mathbf{P}) > \varepsilon$. A továbbiakban $\rho(\cdot, \cdot)$ jelöli a szokásos euklideszi távolságot az R^k

téren. Ilyen $f_{\varepsilon,\mathbf{P}}(x) = 1$ halmazokat tekintve minden $\varepsilon > 0$ számra, véve e függvények integrálját a μ_1 és μ_2 mérték szerint $\varepsilon > 0$ határátmenettel megkapjuk a kívánt állítást.

A következő módon lehet például a kívánt tulajdonságú $f_{\varepsilon,\mathbf{P}}$ függvényt konstruálni. Legyen $f_{\varepsilon,\mathbf{P}}(x) = 1 - g_{\varepsilon,\mathbf{P}}(x)$, és $g_{\varepsilon,\mathbf{P}}(x) = \min\left(1, \frac{1}{\varepsilon}\rho(x,\mathbf{P})\right)$, ahol $\rho(\cdot,\cdot)$ a szokásos metrika az Euklideszi téren.

A bizonyítás befejezéséhez elég megmutatni, hogy a $\mu_1(P) = \mu_2(P)$ azonosság teljesüléséből minden olyan P_1 és P_2 téglatestre, amelynek határsíkjai nulla mértékűek mind a μ_1 mind a μ_2 mérték szerint következik, hogy $\mu_1 = \mu_2$. Ezt például úgy lehet megindokolni, hogy a bebizonyított azonosság érvényben marad ilyen téglatestek diszjunkt unióira is, illetve az általuk generált σ-algebrára is. Viszont ez a σ-algebra megegyezik a Borel σ-algebrával az egész téren.

Rátérek annak az eredménynek az ismertetésére, amely pontosan leírja eloszlásfüggvények és eloszlásfüggvények karakterisztikus függvényeinek konvergenciája közötti kapcsolatot. Ezt az eredményt, — fontossága miatt, — *eloszlások konvergenciájáról szóló alaptétel*-nek fogom nevezni. Megtárgyalom e tétel feltételeinek a tartalmát. De a tétel részletes bizonyítását csak a kiegészítésben ismertetem. Az előadás fő részében megelégszem ezen eredmény egy olyan gyengített változatának a bizonyításával, amely elegendő lesz céljainkra.

Eloszlások konvergenciájáról szóló Alaptétel. *Legyen $F_n(x_1,\dots,x_k)$ eloszlásfüggvények egy sorozata az R^k k-dimenziós euklideszi téren $\varphi_n(t_1,\dots,t_k)$ karakterisztikus függvényekkel, $n = 1,2,\dots$. Ha a $\varphi_0(t_1,\dots,t_k) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t_1,\dots,t_k)$ határérték létezik minden $(t_1,\dots,t_k)$ pontban, és a $\varphi_0(t_1,\dots,t_k)$ limeszfüggvény folytonos az origóban, akkor létezik olyan $F_0(x_1,\dots,x_k)$ eloszlásfüggvény a k-dimenziós térben, amelynek a $\varphi_0(t_1,\dots,t_k)$ függvény a karakterisztikus függvénye. Sőt, a φ_0 függvény folytonosságáról tett feltétel némileg gyengíthető. Elég feltenni azt, hogy a $\varphi_0(t_1,\dots,t_k)$ függvény megszorítása mindegyik koordinátatengelyre folytonos az origóban. A fenti feltételek teljesülése esetén az $F_n(x_1,\dots,x_k)$ eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak ahhoz az $F_0(x_1,\dots,x_k)$ eloszlásfüggvényhez, amelynek $\varphi_0(t_1,\dots,t_k)$ a karakterisztikus függvénye.*

Megfordítva, ha $F_n(x_1,\dots,x_k)$, $n = 1,2,\dots$, eloszlásfüggvényeknek egy az R^k k-dimenziós euklideszi téren definiált sorozata, amely egy $F_0(x_1,\dots,x_k)$ eloszlásfüggvényhez konvergál eloszlásban, $\varphi_n(t_1,\dots,t_k)$, $n = 1,2,\dots$, jelöli az $F_n(x_1,\dots,x_k)$, $\varphi_0(t_1,\dots,t_k)$ pedig az $F_0(x_1,\dots,x_k)$ karakterisztikus függvényét, akkor $\varphi_0(t_1,\dots,t_k) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t_1,\dots,t_k)$ minden $(t_1,\dots,t_k) \in R^k$ pontban. Továbbá, ez a konvergencia egyenletes az R^k tér minden kompakt részhalmazán. Ezért a $\varphi_0(t_1,\dots,t_k)$ függvény folytonos.

E tétel szerint ahhoz, hogy valamely F_n eloszlásfüggvények eloszlásban konvergáljanak az kell, hogy ezen eloszlásfüggvények karakterisztikus függvényei konvergáljanak, és ezenkívül a határfüggvény legyen az origóban folytonos. Az, hogy a karakterisztikus függvények konvergenciája az eloszlásban való konvergencia szükséges feltétele következik az *eloszlások konvergenciájának jellemzéséről* szóló tételből, illetve abból, hogy az $e^{i(t,x)}$ többváltozós trigonometrikus függvények folytonosak és korlátosak. A következő példa célja az, hogy segítsen megérteni annak a plusz feltételnek a szerepét, mely szerint a karakterisztikus függvények határértéke folytonos az origóban.

Példa: Legyen $F_n(x)$ az egyenletes eloszlás eloszlásfüggvénye a $[-n,n]$ intervallumban, $n=1,2,\dots$, azaz legyen $F_n(x)$ sűrűségfüggvénye az $f_n(x)=\frac{1}{2n}$, ha $-n\le x\le n$, és $f_n(x)=0$, ha $|x|>n$ függvény. Az $F_n(x)$ eloszlás karakterisztikus függvénye a $\varphi_n(t)=\int_{-n}^n e^{itx}\frac{1}{2n}\,dx=\frac{e^{int}-e^{-int}}{2nt}=\frac{\sin nt}{nt}$, ha $t\ne0$, és $\varphi_n(0)=1$ függvény. Innen $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(t)=0$, ha $t\ne0$, és $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(0)=1$. Ez azt jelenti, hogy az $F_n(\cdot)$ eloszlásfüggvények karakterisztikus függvényei minden pontban konvergálnak, és a határfüggvény folytonos az origót kivéve minden pontban. Maguk az F_n eloszlásfüggvények nem konvergálnak egy eloszláshoz. Szemléletesen szólva azt mondhatjuk, hogy ezek az eloszlások 'kifolynak a végtelenbe'.

A karakterisztikus függvények limeszének a folytonossága az origóban az ilyen 'az eloszlások kifolyásának a végtelenbe' hatások kiküszöbölését biztosítja. Az alábbi tételben ilyen tartalmú állítást bizonyítok be. Ezen eredmény megfogalmazása előtt bevezetem be a következő definiciót.

Eloszlások feszességének a definiciója. *Azt mondjuk, hogy az $F_n(x_1,\dots,x_k)$ eloszlásfüggvények (illetve az általuk meghatározott μ_{F_n} Stieltjes mértékek) sorozata feszes, ha tetszőleges $\varepsilon>0$ számra létezik olyan $K=K(\varepsilon)$ szám, hogy a $\mathbf{K}(K)^k=\underbrace{[-K,K]\times\cdots\times[-K,K]}_{k\text{-szoros szorzat}}$ k-dimenziós kockára $\mu_{F_n}(\mathbf{K}(K)^k)\ge1-\varepsilon$* minden $n=1,2,\dots$ *indexre.*

Tétel eloszlások feszességének biztosításáról a karakterisztikus függvény tulajdonságai alapján. *Legyen adva eloszlásfüggvények $F_n(x)$, sorozata $\varphi_n(t)$ karakterisztikus függvényekkel a számegyenesen, $n=1,2,\dots$. Ha teljesül a*

$$\lim_{\delta\to0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}\mathrm{Re}\,(1-\varphi_n(t))\,dt=0 \tag{6}$$

reláció, ahol $\mathrm{Re}\,z$ *a z komplex szám valós részét jelöli, akkor az $F_n(x)$ eloszlásfüggvények sorozata feszes.*

Következmény. *Ha az $F_n(x)$ eloszlásfüggvények $\varphi_n(t)$ karakterisztikus függvényei egy a nulla pontban folytonos $\varphi_0(t)$ függvényhez konvergálnak az origó egy kis környezetében, akkor feszesek. Ez az állítás többváltozós eloszlásfüggvények sorozatára is érvényes. Sőt, ebben az esetben elég azt feltenni, hogy a határfüggvény megszorítása bármely koordinátatengelyre folytonos az origóban.*

A következmény bizonyítása. Mivel $\varphi_0(0)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(0)=1$, ezért a $\varphi_0(t)$ függvény folytonosságából az origóban következik, hogy minden $\varepsilon>0$ számhoz létezik olyan $\delta_0=\delta_0(\varepsilon)$ szám, amelyre $0\le\mathrm{Re}\,(1-\varphi_0(t))\le\varepsilon$, ha $|t|<\delta_0$. Továbbá $0\le\mathrm{Re}\,(1-\varphi_n(t))\le2$ minden n és t számra, és $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{Re}\,(1-\varphi_n(t))=\mathrm{Re}\,(1-\varphi_0(t))$ az origó egy kis környezetében. Ezért a Lebesgue tétel alapján létezik a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\delta}\left|\int_{-\delta}^{\delta} \mathrm{Re}\,(1-\varphi_n(t))\,dt\right| = \frac{1}{2\delta}\left|\int_{-\delta}^{\delta} \mathrm{Re}\,(1-\varphi_0(t)\,dt\right| \le \varepsilon$$

határérték minden $\delta < \delta_0$ számra. Ez azt jelenti, hogy teljesül a (6) feltétel, és a fenti tétel alapján az $F_n(x)$ függvények feszesek ebben az esetben.

Hasonlóan látható, hogy ha a k-változós $F_n(x_1,\dots,x_k)$ eloszlásfüggvények teljesítik a Következményben megfogalmazott feltételeket, akkor feszesek. Ugyanis az előző érvelésből következik, hogy ebben az esetben $\mu_{F_n}(\{(x_1,\dots,x_k)\colon |x_j|<K\}) \le \frac{\varepsilon}{k}$ tetszőleges $1\le j\le k$ koordinátára alkalmas $K=K(\varepsilon)$ számmal minden $n=1,2,\dots$ indexre, és innen következik a μ_{F_n} mértékek feszessége.

Megjegyzés. Be lehet látni, hogy a (6) formulában megfogalmazott feltétel szükséges és elégséges feltétele annak, hogy az F_n eloszlásfüggvények feszesek legyenek. Erre a tényre azonban nem lesz szükségünk.

A tétel bizonyítása. Írjuk fel a következő azonosságot:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} \mathrm{Re}\,[1-\varphi_n(t)]\,dt &= \int_{-\delta}^{\delta}\frac{1}{2\delta}\int_{-\infty}^{\infty}[1-\cos tx]\;dF_n(x)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}[1-\cos tx]\,dt\,dF_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{t}{2\delta}-\frac{\sin tx}{2\delta x}\right]_{t=-\delta}^{t=\delta} dF_n(x) \qquad (7)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{\sin\delta x}{\delta x}\right)dF_n(x) = \int_{-K}^{K}\left(1-\frac{\sin\delta x}{\delta x}\right)dF_n(x) \\ &\quad + \int_{|x|>K}\left(1-\frac{\sin\delta x}{\delta x}\right)dF_n(x) = I_{1,n}^{\delta}(K)+I_{2,n}^{\delta}(K).\end{aligned}$$

Mivel $\left(1-\frac{\sin\delta x}{\delta x}\right)\ge 0$ minden x-re és δ-ra, ezért a (7) formula baloldala felső becslést ad az $I_{2,n}^{\delta}(K)$ kifejezésre tetszőleges $\delta>0$ $n\ge 1$ és $K>0$ számokra. Ezért a (6) formula alapján tetszőleges $\varepsilon>0$ számhoz létezik olyan $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ szám és $n_0=n_0(\delta)$ küszöbindex, amelyekre $\frac{\varepsilon}{2}\ge \displaystyle\int_{|x|>K}\left(1-\frac{\sin\delta x}{\delta x}\right)dF_n(x)$. Legyen $K=\frac{2}{\delta}$. Akkor minden $|x|\ge K$-ra $1-\frac{\sin\delta x}{\delta x}\ge\frac{1}{2}$. Ezért az előző becslésből következik, hogy $\frac{\varepsilon}{2}\ge \displaystyle\int_{|x|>K}\left(1-\frac{\sin\delta x}{\delta x}\right)dF_n(x)\ge\frac{1}{2}[(1-F_n(K))+F_n(-K)]$, azaz $\varepsilon\ge[(1-F_n(K))+F_n(-K)]$ ezzel a K számmal, ha $n\ge n_0$. A $K>0$ szám esetleges megnövelésével elérhetjük, hogy a fenti egyenlőtlenség minden $n\ge 1$ számra érvényes legyen. Tehát az F_n, $n=1,2,\dots,$ eloszlásfüggvények feszesek.

Megfogalmazom és bebizonyítom az *Eloszlások konvergenciájáról szóló Alaptétel* egy számunkra hasznos egyszerűsített változatát.

Eloszlások konvergenciájáról szóló Alaptétel egyszerűsített változata. *Az R^k Euklideszi téren definiált $F_n(x_1,\dots,x_k)$ eloszlásfüggvények akkor és csak akkor konvergálnak egy $F_0(x_1,\dots,x_k)$ eloszlásfüggvényhez $n\to\infty$ esetén, ha az $F_n(x_1,\dots,x_k)$ eloszlásfüggvények $\varphi_n(t_1,\dots,t_k)$ karakterisztikus függvényei az $F_0(x_1,\dots,x_k)$ eloszlásfüggvény $\varphi_0(t_1,\dots,t_k)$ karakterisztikus függvényéhez konvergálnak minden $(t_1,\dots,t_k)\in R^k$ pontban.*

A fenti tétel lehetővé teszi eloszlásfüggvények konvegenciájának a bizonyítását akkor, ha megvan a jelölt a határeloszlásra. Az alaptétel a jelölt megtalalálásában, illetve annak a kérdésnek az eldöntésében is segít, hogy érdemes-e ilyen jelöltet keresni.

A most megfogalmazott tétel bizonyítása érdekében először bebizonyítok egy lemmát a karakterisztikus függvény folytonosságáról.

Lemma a karakterisztikus függvények folytonosságáról. *Egy $F(x_1,\dots,x_k)$ eloszlásfüggvény $\varphi(t_1,\dots,t_k)$ karakterisztikus függvénye folytonos, sőt egyenletesen folytonos függvény az R^k téren.*

A lemma bizonyítása. Tekintsünk egy tetszőleges $(t_1,\dots,t_k)$ és egy kis abszolut értékű $(h_1,\dots,h_k)$ vektort az R^k téren, és írjuk fel a következő egyenlőtlenséget.

$$
\begin{aligned}
&|\varphi(t_1+h_1,\dots,t_k+h_k)-\varphi(t_1,\dots,t_k)| \\
&\qquad\le \int \left| e^{i((t_1+h_1)x_1+\cdots+(t_k+h_k)x_k)} - e^{i(t_1x_1+\cdots+t_kx_k)}\right| F(\,dx_1,\dots,\,dx_k) \\
&\qquad\le \int \left| e^{i(h_1x_1+\cdots+h_kx_k)} - 1\right| F(\,dx_1,\dots,\,dx_k).
\end{aligned} \tag{8}
$$

Rögzítsünk egy kis $\varepsilon>0$ számot, és válasszunk egy olyan nagy $K=K(\varepsilon)>0$ számot, amelyre az F eloszlásfüggvény által meghatározott μ_F Stieltjes mértékre

$$
\mu_F(\{(x_1,\dots,x_k)\colon\, |x_j|>K \text{ valamely } 1\le j\le k \text{ indexre}\})\le\frac{\varepsilon}{4}.
$$

Ilyen K szám létezik a *valószínűségi mértékek a végtelen környezetében való viselkedéséről* szóló lemma alapján. Ezután válasszunk olyan $\delta=\delta(\varepsilon,K)$ számot, amelyre

$$
\left|e^{i(h_1x_1+\cdots+h_kx_k)}-1\right|\le\frac{\varepsilon}{2},\quad \text{ha } |h_j|\le\delta \text{ és } |x_j|\le K \text{ minden } 1\le j\le k \text{ indexre.}
$$

Vegyük észre, hogy $\left|e^{i(h_1x_1+\cdots+h_kx_k)}-1\right|\le 2$ minden $(x_1,\dots,x_k)$ és $(h_1,\dots,h_k)$ vektorra. A (8) egyenlőtlenséget alkalmazva, és az egyenlőtlenség jobboldalán szereplő integrált felbontva a $\mathbf{K}=\{(x_1,\dots,x_k)\colon\, |x_j|\le K, \text{minden } 1\le j\le k \text{ indexre}\}$ tartományon és a tartomány komplementerén vett integrálok összegére azt kapjuk az előbb választott K és δ számokkal, hogy

$$
\begin{aligned}
&|\varphi(t_1+h_1,\dots,t_k+h_k)-\varphi(t_1,\dots,t_k)| \\
&\qquad\le \int_{\mathbf{K}} \left| e^{i(h_1x_1+\cdots+h_kx_k)} - 1\right| F(\,dx_1,\dots,\,dx_k)+\frac{\varepsilon}{2}\le\varepsilon,
\end{aligned}
$$

ha $|h_j| \le \delta$ minden $1 \le j \le k$ indexre. Innen következik a lemma állítása.

Az eloszlások konvergenciájáról szóló Alaptétel egyszerűsített változatának bizonyítása. Az *eloszlások konvergenciájának jellemzéséről* szóló tételből közvetlenül látszik, hogy eloszlásfüggvények konvergenciájából következik a karakterisztikus függvények konvergenciája. Az ellenkező írányú állítás bizonyításának érdekében lássuk be először azt, hogy eloszlások karakterisztikus függvényeinek konvergenciájából egy egy eloszlásfüggvény karakterisztikus függvényéhez következik, hogy a tekintett eloszlásfüggvények feszesek.

Valóban, mivel a határfüggvény, lévén karakterisztikus függvény, folytonos az origóban ebben az esetben, ezért a *az eloszlások feszességének biztosításáról a karakterisztikus függvény tulajdonságai alapján* tétel következményéből következik a tekintett eloszlások feszessége.

Ezt a tényt felhasználva hasonlóan bizonyítjuk be azt, hogy az eloszlásfüggvények konvergenciája következik a karakterisztikus függvények konvergenciájából, mint az analóg állítást arról, hogy egy eloszlást meghatároz annak karakterisztikus függvénye. Az egyetlen lényeges különbség a két bizonyítás között az, hogy jelen esetben az eloszlások feszessége veszi át a *valószínűségi mértékek viselkedéséről a végtelen környezetében* lemma szerepét.

Azt akarjuk bebizonyítani, hogy tetszőleges folytonos és korlátos $f(x_1,\dots,x_k)$ függvényre az R^k térben

$$\lim_{n\to\infty}\int f(x_1,\dots,x_k)F_n(\,dx_1,\dots,\,dx_k)=\int f(x_1,\dots,x_k)F_0(\,dx_1,\dots,\,dx_k). \qquad (9)$$

Viszont az eloszlások feszessége és az f folytonos függvény korlátossága miatt minden $\varepsilon>0$ számhoz létezik olyan $K>0$ szám és f_K folytonos függvény az R^k téren, amelyre az f_K függvény tartója a $\mathbf{K}=\mathbf{K}(K)=[-K,K]\times\cdots\times[-K,K]$ téglatestben van, és

$$\left|\int f(x_1,\dots,x_k)F_n(\,dx_1,\dots,\,dx_k)-\int f_K(x_1,\dots,x_k)F_n(\,dx_1,\dots,\,dx_k)\right|<\varepsilon \qquad (10)$$

minden $n=1,2,\dots$ indexre. Egy ilyen konstrukciót úgy kaphatunk, hogy veszünk (kihasználva az F_n eloszlások feszességét) egy olyan $\mathbf{K}(\frac K2)$ téglatestet, amelyre teljesül a $\mu_{F_n}\left(R^k\setminus\mathbf{K}(\frac K2)\right)\le\frac{\varepsilon}{2M}$, egyenlőtlenség minden $n=0,1,2,\dots$ indexre, ahol $M=\sup\limits_{x_1,\dots,x_k)}|f(x_1,\dots,x_k)|$, és vesszük azt a függvényt, amely megegyezik az $f(\cdot)$ függvénnyel a $\mathbf{K}(\frac K2)$ téglatesten, azon kívül pedig eltűnik. Ezután ezt a függvényt ‘kisimítjuk’ a téglatesten kívül, azért hogy folytonos legyen. (Ilyen ‘simításra’ egyszerű, standard módszerek vannak az analízisben. Legegyszerűbben úgy kapunk ilyen $f_K(\cdot)$ függvényt, hogy az $f(x_1,\dots,x_k)$ függvényt megszorozzuk egy olyan $h(x_1,\dots,x_k)$ folytonos függvénnyel, amelyre $0\le h(x_1,\dots,x_k)\le 1$ minden $(x_1,\dots,x_k)\in R^k$ pontban, $h(x_1,\dots,x_k)=1$, ha $(x_1,\dots,x_k)\in\mathbf{K}(\frac K2)$, és

$$h(x_1,\dots,x_k)=0,\quad \text{ha } \rho\left((x_1,\dots,x_k),\mathbf{K}\left(\frac K2\right)\right)\ge 1.$$

Ilyen $h(\cdot)$ függvényt nem nehéz konstruálni.)

Ezután vehetjük az f_K függvény minden koordinátájában $2K$ periódusú $\bar f_K$ periódikus kiterjesztését hasonlóan ahhoz, ahogy annak bizonyításában tettük, hogy a karakterisztikus függvény meghatározza az eloszlást. Ezután a $\bar f_K$ folytonos periódikus függvényt közelíthetjük olyan $2K$ periódusú $P(x_1,\dots,x_k)$ trigonometrikus polinommal Weierstrass második approximációs tétele alapján, amelyre $\sup|\bar f_K(x_1,\dots,x)-P(x_1,\dots,x_k)|\le\varepsilon$. Ekkor a (10) egyenlőtlenség érvényben marad 2ε felső becsléssel az ε felső becslés helyett, ha az f_K függvényt a $\bar f_K$ függvénnyel helyettesítjük. Továbbá, érvényes az

$$\left|\int f(x_1,\dots,x_k)F_n(\,dx_1,\dots,\,dx_k)-\int P(x_1,\dots,x_k)F_n(\,dx_1,\dots,\,dx_k)\right|<3\varepsilon$$

egyenlőtlenség az így konstruált $P(\cdot)$ trigonometrikus polinommal minden $n=1,2,\dots$ indexre. Mivel ez az egyenlőtlenség minden $\varepsilon>0$-ra igaz (alkalmas trigonometrikus $P(\cdot)$ polinommal), és a karakterisztikus függvények konvergenciájából következik a

$$\lim_{n\to\infty}\int P(x_1,\dots,x_k)F_n(\,dx_1,\dots,\,dx_k)=\int P(x_1,\dots,x_k)F_0(\,dx_1,\dots,\,dx_k)$$

reláció minden trigonometrikus polinomra, innen $\varepsilon\to0$ határátmenettel megkapjuk a (9) relációt, és így a tétel állítását.

A fenti eredmények alapján eloszlásfüggvények aszimptotikus viselkedéséről szóló határeloszlástételek bizonyítását visszavezethetjük az eloszlásfüggvények karakterisztikus függvényeinek vizsgálatára. Ahhoz azonban, hogy jó, tartalmas eredményeket kapjunk szükségünk van arra, hogy az eloszlásfüggvények tulajdonságairól szóló feltételekről megértsük, hogy azok mit jelentenek a karakterisztikus függvényekre, azaz az eloszlásfüggvények Fourier transzformáltjaira. Meglehetősen jó 'szótárat' lehet készíteni, amely leírja, hogy egy függvény bizonyos tulajdonságai hogyan tükröződnek a függvény Fourier transzformáltjainak a tulajdonságaiban, és vice versa. Ezen előadásban nem foglalkozom e 'szótár' kidolgozásával. Megelégszem a határeloszlástételek vizsgálatában legfontosabb ilyen irányú eredmény bizonyításával. Ez arról szól, hogy egy valószínűségi változó momentumait hogyan lehet kifejezni a valószínűségi változó karakterisztikus függvényének a segítségével.

Tétel valószínűségi változók momentumainak kifejezéséről karakterisztikus függvényük segítségével. *Legyen ξ olyan valószínűségi változó, amelyre $E|\xi|^k<\infty$ valamilyen k pozitív egész számra. Jelölje $F(x)$ a ξ valószínűségi változó eloszlás, és $\varphi(t)$ annak karakterisztikus függvényét. Ekkor a $\varphi(t)$ karakterisztikus függvény deriváltjai megadhatóak a $\frac{d^j}{dt^j}\varphi(t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}i^ju^je^{itu}F(\,du)$ képlettel minden $0\le j\le k$ és $-\infty<t<\infty$ számra. Speciálisan, $\left.\dfrac{d^j\varphi(t)}{dt^j}\right|_{t=0}=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}i^ju^jF(\,du)=i^jE\xi^j$ minden $0\le j\le k$ számra.*

A tétel bizonyítása. Teljesüljön az $E|\xi|^k = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k F(\,dx) < \infty$ feltétel valamely pozitív egész k számra. Azt fogjuk belátni, hogy ha valamilyen $0 \le j < k$ számra $\frac{d^j}{dt^j}\varphi(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} i^j u^j e^{itu} F(\,du)$ minden $-\infty < t < \infty$ számra, akkor

$$\frac{d^{j+1}}{dt^{j+1}}\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} i^{j+1}u^{j+1}e^{itu}F(\,du)$$

minden $-\infty < t < \infty$ számra. Innen indukcióval következik a tétel fő állítása, mivel az indukciós feltevés érvényes $j = 0$ esetén. A momentumokat a karakterisztikus függvény segítségével megadó formula megkapható, ha alkalmazuk ezt az eredményt $t = 0$ választással.

Viszont

$$\frac{d^{j+1}}{dt^{j+1}}\varphi(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{d^j}{dt^j}\varphi(t+h) - \frac{d^j}{dt^j}\varphi(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i^j u^j e^{i(t+h)u} - i^j u^j e^{itu}}{h} F(\,du),$$

és az integrandus teljesíti az

$$\lim_{h\to 0} \frac{i^j u^j e^{i(t+h)u} - i^j u^j e^{itu}}{h} = i^j u^{j+1} e^{itu} \lim_{h\to 0} \frac{e^{ihu}-1}{hu} = i^{j+1}u^{j+1}e^{itu}$$

relációt. Azt kell megmutatnunk, hogy jogunk van a limeszelésben az integrálás és limeszképzés sorrendjét felcserélni. Ehhez a Lebesgue dominált konvergenciatétele alapján elég azt megmutatni, hogy létezik olyan $K(u)$ függvény, amelyre

$$\left| \frac{i^j u^j e^{i(t+h)u} - i^j u^j e^{itu}}{h} \right| \le K(u) \qquad \text{minden } |h| \le \frac{1}{2} \text{ számra,}$$

és $\int_{-\infty}^{\infty} K(u)F(\,du) < \infty$. Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned} \left| \frac{i^j u^j e^{i(t+h)u} i^j u^j - e^{itu}}{h} \right| &= |u|^{j+1} \left| \frac{e^{ihu}-1}{hu} \right| \\ &\le |u|^{j+1} \left(\sup_v \left| \frac{1-\cos v}{v} \right| + \sup_v \left| \frac{\sin v}{v} \right| \right) \le 3|u|^{j+1}, \end{aligned}$$

mert $\left|\frac{\sin v}{v}\right| \le 1$, és $\left|\frac{1-\cos v}{v}\right| \le 2$. Ezért választhatjuk a kívánt $K(u)$ függvényt, mint $K(u) = 3|u|^{j+1}$, és nyílván $\int_{-\infty}^{\infty} K(u)F(\,du) < \infty$, ha $j \le k$.

Kiegészítés A: Eloszlásfüggvények tulajdonságairól.

Az előadásban felhasználtuk az eloszlásfüggvények következő tulajdonságát.

Tétel többváltozós eloszlásfüggvények tulajdonságairól. *Legyen $F(x_1,\dots,x_k)$ k-változós eloszlásfüggvény, és jelölje μ_F az $F(x_1,\dots,x_k)$ eloszlásfüggvény által meghatározott Stieltjes mértéket. Vezessük be minden $1\le j\le k$ indexre a μ_F mérték μ_j vetületetét az R^k tér j-ik koordinátára, azaz a következő $\mu_j=\mu_{F,j}$ valószínűségi mértéket a számegyenes $\mathcal{B}$ Borel σ-algebráján.*

$$\mu_j(B)=\mu_F(\{(u_1,\dots,u_j,\dots,u_k)\colon\, u_j\in B\}\quad \textit{minden } B\in\mathcal{B} \textit{ halmazra.}$$

A μ_j mértéknek csak megszámlálhatóan sok atomja van, azaz legfeljebb megszámlálhatóan sok olyan $x\in R^1$ pont van, amelyre $\mu_j(\{x\})>0$. Ha $(x_1,\dots,x_k)\in R^k$ olyan pont, amelyre $\mu_j(\{x_j\})=0$ minden $1\le j\le k$ indexre, akkor az F eloszlásfüggvény folytonos ebben az $(x_1,\dots,x_k)$ pontban.

A tétel bizonyítása: Mivel μ_j valószínűségi mérték, ezért tetszőleges n pozitív egész számra azon x pontokból álló A_n halmaz, mely pontokra $\mu_j(\{x\})\ge\frac1n$, véges. (Az A_n halmaz legfeljebb n pontból áll.) Mivel a μ_j mérték atomjainak halmaza megegyezik az A_n halmazok uniójával, ezért μ_j-nek legfeljebb megszámlálható sok atomja van.

Ha az $(x_1,\dots,x_k)\in R^k$ olyan pont, amelyre x_j nem atomja a μ_j mértéknek semelyik $1\le j\le k$ indexre, akkor a μ_j mértékek folytonossági tulajdonsága alapján minden $\varepsilon>0$ számra létezik olyan $\delta>0$ szám, amelyre $\mu_j(\{u\colon\, x_j-\delta\le u\le x_j+\delta\})\le\frac{\varepsilon}{k}$ mindegyik $1\le j\le k$ indexre. Innen következik, hogy

$$F(x_1+\delta,\dots,x_k+\delta)-F(x_1-\delta,\dots,x_k-\delta)\le\sum_{j=1}^k\mu_j(\{u_j\colon\, x_j-\delta\le u_j\le x_j+\delta\})\le\varepsilon,$$

és az F eloszlásfüggvény monotonitási tulajdonságai alapján

$$|F(x_1+v_1,\dots,x+v_k)-F(x_1,\dots,x_k)|\le F(x_1+\delta,\dots,x+\delta)-F(x_1-\delta,\dots,x_k-\delta)\le\varepsilon,$$

ha $|v_j|\le\delta$, $1\le j\le k$. Innen következik az F függvény folytonossága az $(x_1,\dots,x_k)$ pontban.

Kiegészítés B. Az eloszlások konvergenciájáról szóló Alaptétel bizonyítása.

E tétel bizonyítása előtt bebizonyítok egy önmagában is érdekes eredményt eloszlások relatív kompaktságának és feszességének kapcsolatáról. Ennek érdekében először bevezetem a következő definiciót.

Eloszlások relatív kompaktságának a definiciója. *Legyen adva $F_n(x_1,\dots,x_k)$, $n=1,2,\dots$, eloszlásfüggvények sorozata a k-dimenziós euklideszi térben, és jelölje μ_{F_n} az F_n eloszlásfüggvény által meghatározott Stieltjes mértéket az R^k térben. Azt mondjuk, hogy az F_n eloszlásfüggvények illetve μ_{F_n} valószínűségi mértékek sorozata relatív kompakt, ha az F_n (vagy μ_{F_n}), sorozat tetszőleges F_{n_k} (illetve $\mu_{F_{n_k}}$), $k=1,2,\dots$, részsorozatának létezik $F_{n_{k_j}}$ (illetve $\mu_{F_{n_{k_j}}}$), $j=1,2,\dots$, eloszlásban konvergens részsorozata.*

Tétel eloszlások relatív kompaktságának és feszességének kapcsolatáról. *Legyen μ_n, $n=1,2,\dots$, valószínűségi mértékek feszes sorozata az az R^k k-dimenziós euklideszi téren. Ez a valószínűségi mértékekből álló sorozat relatív kompakt.*

Megjegyzés. Igaz a tétel megfordítása is, amely szerint valószínűségi mértékek sorozatának relatív kompaktságából következik e sorozat feszessége is. Ennek az állításnak a bizonyítása lényegesen egyszerűbb. De mivel erre az eredményre nem lesz szükségünk, ezt nem bizonyítom.

A tétel bizonyítása. Azt kell belátnunk, hogy a μ_n sorozat tetszőleges részsorozatának létezik eloszlásban konvergens részorozata. Az egyszerűbb jelölés érdekében a részsorozat újraindexelésével jelöljük ezt a részsorozatot is μ_n-nel. Azt kell belátnunk, hogy ennek az új (szintén feszes) μ_n mértéksorozatnak létezik eloszlásban konvergens részsorozata.

Jelölje $F_n(x)=F_n(x_1,\dots,x_k)$ a μ_n mérték által meghatározott $F_n(x_1,\dots,x_k)=\mu_n(\{(u_1,\dots,u_k)\colon u_j<x_j,\ j=1,\dots,k\})$ eloszlásfüggvényt. Legyen

$$x^{(p)}=\left(x_1^{(p)},\dots,x_k^{(p)}\right),\quad p=1,2,\dots,$$

a racionális koordinátájú $x^{(p)}\in R^k$ pontok (megszámlálható) halmaza valamilyen indexeléssel felsorolva. Először belátjuk az úgynevezett átlós módszer segítségével, hogy egy alkalmas n_j, $j=1,2,\dots$, számsorozatra a

$$\lim_{j\to\infty}F_{n_j}\left(x_1^{(p)},\dots,x_k^{(p)}\right)=\tilde F\left(x_1^{(p)},\dots,x_k^{(p)}\right)\tag{11}$$

határérték létezik minden $p=1,2,\dots$ számra.

Valóban, mivel $0\le F_n(x)\le 1$ létezik az egész számoknak olyan $\bar n_j=(n_{j,1})$ részsorozata, amelyre létezik a $\lim\limits_{j\to\infty}F_{n_{j,1}}(x^{(1)})=\tilde F(x^{(1)})$ határérték. Ennek létezik olyan $n_{j,2}$ részsorozata, melyre létezik a $\lim\limits_{j\to\infty}F_{n_{j,2}}(x^{(2)})=\tilde F(x^{(2)})$ határérték. Ezt az eljárást folytatva kapunk egymásba skatulyázott $n_{j,p}$, $j=1,2,\dots$, sorozatot minden $p=1,2,\dots$ indexre, amelyekre $\{n_{p+1,j},\ j=1,2,\dots\}\subset\{n_{p,j},\ j=1,2,\dots\}$, $p=1,2,\dots$, és minden $p=1,2,\dots$ számra létezik a $\lim\limits_{j\to\infty}F_{n_{j,p}}(x^{(p)})=\tilde F(x^{(p)})$ határérték. Ekkor az $n_j=n_{j,j}$ sorozat teljesíti a (11) relációt.

Vezessük be az

$$F(x_1,\dots,x_k)=\sup_{\left\{n_j\colon x_s^{(n_j)}<x_s,\ s=1,\dots,k\right\}}\tilde F\left(x_1^{(n_j)},\dots,x_1^{(n_j)}\right) \tag{12}$$

függvényt. Azt állítom, hogy $F(x_1,\dots,x_k)$ eloszlásfüggvény, és az $F_{n_j}(x_1,\dots,x_k)$ eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak ehhez az $F(x_1,\dots,x_k)$ eloszlásfüggvényhez, ha az n_j számsorozat teljesíti a (11) relációt. Ha ezt az állítást belátjuk, akkor befejeztük a Tétel bizonyítását.

Annak érdekében, hogy megmutassuk azt, hogy $F(x_1,\dots,x_k)$ eloszlásfüggvény felhasználjuk az eloszlásfüggvények következő „belső” azaz csak az F függvény tulajdonságaitól függő jellemzését. Az $F(x_1,\dots,x_k)$ függvény akkor és csak akkor eloszlásfüggvény, ha teljesíti a következő négy tulajdonságot.

(i) $F(x_1,\dots,x_k)$ minden változójának balról folytonos függvénye.

(ii) $\lim\limits_{\substack{x_j\to\infty\\ \text{minden } j=1,\dots,k \text{ számra}}} F(x_1,\dots,x_k)=1.$

(iii) $\lim\limits_{\substack{x_j\to-\infty\\ \text{valamely } 1\le j\le k \text{ számrra}}} F(x_1,\dots,x_k)=0.$

Végül definiáljuk egy az R^k téren definiált F függvényre és egy $\mathbf{K}=[a_1,b_1)\times\cdots\times[a_k,b_k)$ téglatestre a

$$\mu(\mathbf{K})=\mu_F(\mathbf{K})=\sum_{\substack{x_j=\,a_j \text{ vagy } b_j\\ j=1,\dots,k}}(-1)^{\chi(x_1,\dots,x_k)}F(x_1,\dots,x_k)$$

mennyiséget, ahol $\chi(x_1,\dots,x_k)$ jelöli az a_j-k számát az $x_1,\dots,x_k$ sorozatban. Ekkor

(iv) $\mu_F(\mathbf{K})\ge 0$ minden $\mathbf{K}$ téglatestre.

Mivel a racionális koordinátájú pontokban definiált $\tilde F(x_1,\dots,x_k)$ függvény minden koordinátájának monoton függvénye, ezért a (12) formulában definiált $F(\cdot)$ függvény teljesíti az (i) tulajdonságot. Továbbá ebből a monotonításból az is következik, hogy a (12) formulában a sup helyett limeszt írhatunk, ahol olyan $\left(x_1^{(p)},\dots,x_k^{(p)}\right)$, $p=1,2,\dots$, sorozatot tekintünk a limeszben, amelyre $x_j^{(p)}<x_j$ minden $1\le j\le k$ és $p=1,2,\dots$ indexre. Továbbá $\lim\limits_{p\to\infty}x_j^{(p)}=x_j$ minden $j=1,\dots,k$ számra. Tekintsünk olyan $\mathbf{K}(p)$ racionális koordinátájú téglatesteseteket, amelyekben minden pont összes koordinátája szigorúan monoton növekvő módon tart a $\mathbf{K}$ téglatest megfelelő

pontjának a koordinátához. Ekkor $\mu_{\tilde F}(\mathbf{K}(p)) \ge 0$, mivel $\tilde F$ eloszlásfüggvények limesze. Ezért $\mu_F(\mathbf{K}) = \lim\limits_{p\to\infty} \mu_{\tilde F}(\mathbf{K}(p)) \ge 0$, azaz az F függvény teljesíti a (iv) tulajdonságot. Vegyük észre, hogy a (ii) és (iii) tulajdonság érvényes akkor, ha az F_n függvényeket a $\tilde F$ függvénnyel helyettesítjük, és a limeszt csak racionális koordinátájú pontokban tekintjük. (A bizonyásnak ebben a pontjában használjuk ki, hogy a μ_n mértékek feszesek.) Innen és a (12) formulából következik, hogy az F függvény a (ii) és (iii) tulajdonságokat is teljesíti.

Annak érdekében, hogy megmutassuk azt, hogy az F_{n_k} eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak az F eloszlásfüggvényhez tekintsük az F függvény valamely $x = (x_1,\dots,x_k)$ folytonossági pontját, majd minden rögzített $\varepsilon > 0$ számhoz válasszunk olyan $\delta = \delta(\varepsilon)$ számot, amelyre $F(x)-\varepsilon \le F(x-\delta) \le F(x) \le F(x+\delta) \le F(x)+\varepsilon$, ahol $x \pm \delta = (x_1 \pm \delta,\dots,x_k \pm \delta)$. Válasszunk ezután két olyan racionális koordinátájú $r = (r_1,\dots,r_k) \in R^k$ és $\bar r = (\bar r_1,\dots,\bar r_k) \in R^k$ pontot, amelyekre $x_j-\delta < r_j < x_j < \bar r_j < x_j+\delta$ minden $j = 1,\dots,k$ indexre. Ekkor a $\tilde F(\cdot)$ függvény monotonitási tulajdonságai és az F függvény definiciója alapján

$$F(x)-\varepsilon \le F(x-\delta) < \tilde F(r) \le F(x) \le \tilde F(\bar r) \le F(x+\delta) \le F(x)+\varepsilon$$

Innen, a $\tilde F$ függvény definiciója és az F_{n_j} függvények monotonitási tulajdonságai miatt

$$\begin{aligned} F(x)-\varepsilon &\le \lim_{j\to\infty} F_{n_j}(r) \le \liminf_{j\to\infty} F_{n_j}(x) \\ &\le \limsup_{j\to\infty} F_{n_j}(x) \le \lim_{j\to\infty} F_{n_j}(\bar r) \le F(x)+\varepsilon, \end{aligned}$$

ezért

$$-\varepsilon \le \liminf_{j\to\infty} F_{n_j}(x) - F(x) \le \limsup_{j\to\infty} F_{n_j(x)} - F(x) \le \varepsilon.$$

Mivel ez a reláció minden $\varepsilon > 0$-ra igaz, innen következik, hogy $\lim\limits_{j\to\infty} F_{n_j}(x) = F(x)$. A tétel bizonyítását befejeztük.

Az eloszlások konvergenciájáról szóló Alaptétel bizonyítása. Lássuk először azt be, hogy ha az $F_n(x_1,\dots,x_k)$ eloszlásfüggvények $\varphi_n(t_1,\dots,t_k)$ karakterisztikus függvényei konvergálnak egy $\varphi_0(t_1,\dots,t_k)$ függvényhez a tételben megfogalmazott folytonossági tulajdonsággal, akkor $\varphi_0(t_1,\dots,t_k)$ egy $F_0(x_1,\dots,x_k)$ eloszlásfüggvény karakterisztikus függvénye, és az $F_n(\cdot)$ eloszlásfüggvények az $F_0(\cdot)$ eloszlásfüggvényhez konvergálnak.

Ebben az esetben a *Tétel eloszlások feszességének biztosításáról a karakterisztikus függvény tulajdonságai alapján* eredményéből, illetve annak következményéből kapjuk, hogy az $F_n(\cdot)$ eloszlásfüggvények feszesek. Így az *eloszlások relatív kompaktságának és feszességének kapcsolatáról* szóló tétel alapján ezek az eloszlások relatív kompakták. Továbbá ezen eloszlássorozat minden konvergens részsorozata ugyanahhoz az $F_0(\cdot)$ eloszlásfüggvényhez konvergál, és ennek az $F_0(\cdot)$ eloszlásfüggvénynek a $\varphi_0(\cdot)$ függvény a karakterisztikus függvénye. Ugyanis az $F_n(\cdot)$ eloszlásfüggvénysorozatnak egy konvergens részsorozatának a karakterisztikus függvényei konvergálnak a határeloszlás karakterisztikus függvényéhez, és ez a $\varphi_0(\cdot)$ függvény. Viszont a $\varphi_0(\cdot)$ karakterisztikus függvény egyértelműen meghatározza az $F_0(\cdot)$ eloszlásfüggvényt.

A már bizonyított állításokból következik, hogy az $F_n(\cdot)$ eloszlásfüggvények konvergálnak az $F_0(\cdot)$ eloszlásfüggvényhez. Ugyanis, ha ez nem lenne igaz, akkor létezne az $F_0(\cdot)$ eloszlásfüggvénynek olyan $(x_1,\dots,x_k)$ folytonossági pontja, egy olyan $\varepsilon>0$ szám és pozitív egész számok olyan növekvő n_k, $k=1,2,\dots$, sorozata amelyekre teljesül az $|F_{n_k}(x_1,\dots,x_k)-F_0(x_1,\dots,x_k)|>\varepsilon$ egyenlőtlenség minden $k=1,2,\dots$ indexre. Ez viszont ellentmond annak, hogy az $F_{n_k}(\cdot)$ eloszlásfüggvénysorozatnak van az $F_0(\cdot)$ eloszlásfüggvényhez konvergáló részsorozata.

A tétel másik felének belátása érdekében vegyük észre, hogy ha $F_n(x_1,\dots,x_k)$ eloszlásfüggvények sorozata egy $F_0(x_1,\dots,x_k)$ eloszlásfüggvényhez konvergál eloszlásban, akkor az *eloszlások konvergenciájának jellemzéséről* szóló tételből következik, hogy ezen eloszlásfüggvények $\varphi_n(t_1,\dots,t_k)$ karakterisztikus függvényei konvergálnak az F_0 eloszlás $\varphi_0(t_1,\dots,t_k)$ karakterisztikus függvényéhez minden $(t_1,\dots,t_k)$ pontban. Az alaptétel bizonyításának befejezéséhez azt kell még megmutatni, hogy ez a konvergencia minden kompakt halmazon egyenletes.

Ezen állítás bizonyításának az érdekében vegyük észre, hogy mivel az F_n eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak, ezért feszesek. Tehát tetszőleges $\varepsilon>0$-hoz létezik olyan $K=K(\varepsilon)$ szám, amelyre egy F_n eloszlású $\xi_n=(\xi_n^{(1)},\dots,\xi_n^{(k)})$, $n=0,1,2,\dots$, véletlen vektor teljesíti a $P(|\xi_n|>K)<\frac{\varepsilon}{6}$ egyenlőtlenséget minden $n=0,1,2,\dots$ számra. (A bizonyítás további részében $\xi(\omega)$, $t\in R^k$, $x\in R^k$, a k-dimenziós tér pontjait jelöli, és (t,x), $t\in R^k$, $x\in R^k$, jelöli a t és x vektor skalárszorzatát.) Válasszunk egy olyan kis $\delta=\delta(K,\varepsilon)$ számot, amelyre $\left|e^{i(t,x)}-1\right|<\frac{\varepsilon}{6}$, ha $t\in R^k$, $x\in R^k$, $|t|<K$, és $|x|<\delta$. Válasszunk ezután egy olyan véges $\mathbf{T}=\left\{t^{(1)},\dots,t^{(s)}\right\}\subset\mathbf{K}$, $s=s(\mathbf{K},\delta)$, ponthalmazt a $\mathbf{K}\subset R^k$ kompakt halmazban, amelyre igaz, hogy tetszőleges $t\in\mathbf{K}$ ponthoz létezik olyan $t^{(j)}\in\mathbf{T}$ pont, amelyre $\rho(t,t^{(j)})<\delta$. Ekkor

$$\begin{aligned}\left|\varphi_n(t)-\varphi_n(t^{(j)})\right| &= \left|Ee^{i(t,\xi_n)}-e^{i(t^{(j)},\xi_n)}\right| \\ &\le E\left|e^{i(t-t^{(j)},\xi_n)}-1\right| I\left(|\xi_n|\le K\right)+P(|\xi_n|>K)\le\frac{\varepsilon}{3}\end{aligned}$$

minden $n=0,1,2,\dots$ számra egy F_n eloszlású ξ_n vektorral. Továbbá választhatunk olyan $n_0=n_0(\varepsilon)$ küszöbindexet, amelyre teljesül a $\sup\limits_{n\ge n_0}\sup\limits_{t^{(j)}\in\mathbf{T}}\left|\varphi_n(t^{(j)})-\varphi_0(t^{(j)})\right|<\frac{\varepsilon}{3}$ egyenlőtlenség. Az utolsó két egyenlőtlenségből következik, hogy $\sup\limits_{t\in\mathbf{K}}|\varphi_n(t)-\varphi_0(t)|<\varepsilon$, ha $n\ge n_0$, tehát a $\varphi_n(t)\to\varphi_0(t)$ konvergencia egyenletes a $\mathbf{K}$ halmazon.