A FEBRUÁR 1.-I VIZSGA FELADATAI

1.) Legyen ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\lambda = 1$ paraméterrel, azaz legyen ξ sűrűségfüggvénye $f(x) = e^{-x}$, ha $x \ge 0$, és $f(x) = 0$, ha $x < 0$. Számolja ki a $\xi + \xi^2$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét.

2.) Feldobunk egy szabályos pénzdarabot egymástól függgetlenül véletlen sokszor. Legyen a dobások száma Poisson eloszlású $\lambda = 1$ paraméterrel, azaz annak valószínűsége, hogy k dobást végzünk legyen $\frac{1}{k!}e^{-1}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Mutassa meg, hogy a fej és írásdobások száma két egymástól független Poisson eloszlású valószínűségi változó $\lambda = \frac{1}{2}$ paraméterrel.

3.) Legyen egy (ξ, η) véletlen vektor sűrűségfüggvénye $f(x, y) = C\frac{x}{y^4}$, ha $0 \le x \le 1$, és $1 \le y \le 1 + x$, és $f(x, y) = 0$ egyébként. Hogyan kell a C konstanst megválasztani annak érdekében, hogy $f(x, y)$ valóban sűrűségfüggvény legyen? Számolja ki a ξ és η valószínűségi változók $\mathrm{Cov}\,(\xi, \eta)$ kovarianciáját.

4.) Ledobunk a $[0, 4]$ intervallumra egymástól függetlenül 7800 pontot egyenletes eloszlással, azaz a ledobott pontok helyének a sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{4}$, ha $0 \le x \le 4$, és $f(x) = 0$ egyébként. Azon dobások értékeit, amelyek az $[1, 3]$ intervallumba esnek egy jegyzőkönyvbe írjuk változtatás nélkül, azon dobások esetén, amelyek a $[3, 4]$ intervallumba estek 4-et írunk a jegyzőkönyvbe, a $[0, 1]$ intervallumba esett dobások esetén nem írunk a jegyzőkönyvbe semmit. Adjunk a mellékelt normális eloszlástáblázat segítségével jó becslést annak a valószínűségére, hogy a jegyzőkönyvbe írt számok összege 15500 és 15800 közé esik.

5.) Legyen adva k-változós eloszlásfüggvényeknek egy $F_n(x_1, \dots, x_k)$, $n = 1, 2, \dots$, sorozata. Mikor mondjuk, hogy ezek az eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak egy $F_0(x_1, \dots, x_k)$ eloszlásfüggvényhez?

6.) Legyen adva egy ξ változó és egy $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$, σ-algebra egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Definiálja az $E(\xi|\mathcal{F})$ feltételes várható értéket. (Feltesszük, hogy létezik az $E|\xi| < \infty$ várható érték.)