## FELADATOK

1.) Legyen $\xi$ standard normális eloszlású valószínűségi változó, azaz legyen $\xi$ sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$, és legyen $t$ valós szám. Számoljuk ki az $e^{t\xi}$ valószínűségi változó $Ee^{t\xi}$ várható értékét.

*Megoldás:*

$$Ee^{t\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tu}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\,du = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{tu-u^2/2-t^2/2+t^2/2}\,du$$
$$= e^{t^2/2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(t-u)^2/2}\,du = e^{t^2/2}.$$

2.) Legyenek $\xi$ és $\eta$ független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Lássuk be, hogy $\xi^2+\eta^2$ exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\lambda = \frac{1}{2}$ paraméterrel.

*Megoldás:* $P(\xi^2 < x) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}) = 2\Phi(\sqrt{x}) - 1$, ha $x \ge 0$. Írjuk fel $\xi^2$ sűrűségfüggvényét és konvolúció segítségével a kívánt sűrűségfüggvényt. A $\xi^2$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $g(x) = \frac{\varphi(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-x/2}$, ha $x \ge 0$, és $g(x) = 0$, ha $x < 0$, és $\xi^2+\eta^2$ sűrűségfüggvénye

$$f(x) = g * g(x) = \int_0^x \frac{1}{2\pi\sqrt{u(x-u)}}e^{-u/2}e^{-(x-u)/2}\,du$$
$$= e^{-x/2}\int_0^1 \frac{1}{2\pi\sqrt{v(1-v)}}\,dv = \frac{1}{2}e^{-x/2}, \quad \text{ha } x \ge 0,$$

és $f(x) = 0$, ha $x \le 0$.

*Megjegyzés:* Az $x$ paramétertől nem függő $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{v(1-v)}}\,dv$ integrál értékét meghatározza az a tény, hogy a végeredményként kapott függvény sűrűségfüggvény, ezért integrálja a számegyenesen eggyel egyenlő. De ki is tudjuk számolni ezt az integrált. Vagyük észre, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{v(1-v)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-(v-\frac{1}{2})^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-(2v-1)^2}},$$

ezért $u = 2v-1$ helyettesítéssel

$$\int_0^x \frac{1}{2\pi\sqrt{v(1-v)}}\,dv = \int_{-1}^{2x-1}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-u^2}}\,du$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left[\arcsin x\right]_{-1}^{2x-1} = \frac{\arcsin(2x-1)+\frac{\pi}{2}}{2\pi}.$$

Innen következik, hogy a tekintett integrál értéke $x = 1$ esetén $\frac{1}{2}$, mivel $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.

3.) Legyen $\xi$ és $\eta$ két független standard normális eloszlású valószínűségi változó. Számítsuk ki az $\frac{\eta}{\xi}$ hányados eloszlás és sűrűségfüggvényét.

A megoldás kidolgozása előtt tegyünk először egy általános megjegyzést. Ha adva van két valószínűségi változó $\xi$ és $\eta$, amelyek (együttes) sűrűségfüggvénye egy ismert $f(u,v)$ sűrűségfüggvény, akkor az $\frac{\eta}{\xi}$ hányados eloszlásfüggvényét a következő módon számolhatjuk ki: Vezessük be a $g(u,v)=g_x(u,v)$ függvényt, amely a síkon az $\left\{(u,v)\colon \frac{v}{u}<x\right\}$ halmaz indikátorfüggvénye, azaz $g(u,v)=1$, ha $\frac{v}{u}<x$, és $g(u,v)=0$, ha $\frac{v}{u}\ge x$. Ekkor $P\left(\frac{\eta}{\xi}<x\right)=Eg(\xi,\eta)=\int\int g(u,v)f(u,v)\,du\,dv=\int\int_{\{(u,v)\colon\ \frac{v}{u}<x\}} f(u,v)\,du\,dv$. Látni fogjuk, hogy az ebben a feladatban vizsgálandó integrál viszonylag egyszerű, könnyebben kezelhető.

*Megoldás.* A feladatban vizsgálandó hányados eloszlásfüggvénye

$$\begin{aligned}F(x)=P\left(\frac{\eta}{\xi}<x\right)&=\iint_{v<xu}\frac{1}{2\pi}e^{-(u^2+v^2)/2}\,du\,dv\\&=2\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}<\varphi<\arctan x}\int_0^\infty re^{-r^2/2}\,dr\,d\varphi=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arctan x}d\varphi=\frac12+\frac1\pi\arctan x.\end{aligned}$$

Ebben a számolásban a felírt integrált átírtuk $u=r\cos\varphi$, $v=r\sin\varphi$ transzformációval polárkoordinátarendszerben. E számolás során az integrandusban megjelenik az $r$ Jacobian mint szorzó faktor. Ezután azt vegyük észre, hogy a belső $r$ változó szerinti integrál $\int_0^\infty re^{-r^2/2}\,dr=\left[-e^{-r^2/2}\right]_0^\infty=1$.

Kiszámoltuk a keresett valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. E valószínűségi változó sűrűségfüggvénye az eloszlásfüggvény deriváltja, azaz az $f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ függvény.

*Második megoldás.* A $(\xi,\eta)$ vektor sűrűségfüggvénye $\frac{1}{2\pi}e^{-(x^2+y^2)/2}$, ami forgatásinvariáns függvény. Innen következik, hogy annak valószínűsége, hogy a $(\xi,\eta)$ vektor egy origóból kiinduló $\alpha$ szögű szögtartományba esik, $\frac{\alpha}{2\pi}$. Ezért

$$\begin{aligned}P\left(\frac{\eta}{\xi}<x\right)&=P\left((\xi,\eta)\in\left[-\frac{\pi}{2},\arctan x\right)\cup\left[\frac{\pi}{2},\arctan x+\pi\right)\text{ szögtartományban}\right)\\&=\frac{1}{2\pi}2\left(\arctan x+\frac{\pi}{2}\right)=\frac12+\frac1\pi\arctan x.\end{aligned}$$

4.) Legyen $(\xi,\eta)$ két-dimenziós valószínűségi változó $f(x,y)$ sűrűségfüggvénnyel. Lássuk be, hogy a $\frac{\eta}{\xi}$ valószínűségi változónak is létezik sűrűségfüggvénye, és az a $g(t)=\int_{-\infty}^\infty f(x,tx)|x|\,dx$ függvény. Adjunk ennek az eredménynek a segítségével új megoldást az előző feladatra.

*Megoldás:* Jelölje $G(t)$ a $\frac{\eta}{\xi}$ tört $G(t)=P\left(\frac{\eta}{\xi}<t\right)$ eloszlásfüggvényét. Ekkor

$$G(t)=\int_{(x,y)\colon\ \frac{y}{x}<t}f(x,y)\,dx\,dy.$$

Számítsuk ki ezt az integrált az $(\bar{x}, z) = \left(x, \frac{y}{x}\right)$ helyettesítéssel. Ekkor a $G(t)$ függvényt kifejező integrálban az új integrálási tartomány az $\{(\bar{x}, z)\colon -\infty < \bar{x} < \infty,\ -\infty < z < t\}$, $f(x,y) = f(\bar{x}, z\bar{x})$, és az integráltranszformáció kiszámításához meg kell határoznunk a leképezés Jacobi transzformációját. Ez az $\bar{x} = h_1(x,y) = x$, $z = h_2(x,y) = \frac{y}{x}$ jelöléssel

$$J(\bar{x}, z) = \left|\begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x}, & \frac{\partial \bar{x})}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial x}, & \frac{z}{\partial y}, \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1(x,y)}{\partial x}, & \frac{\partial h_1(x,y)}{\partial y}, \\ \frac{\partial h_2(x,y)}{\partial x}, & \frac{\partial h_2(x,y)}{\partial y}, \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -\frac{y}{x^2}, & \frac{1}{x} \end{pmatrix}\right| = \left|\frac{1}{x}\right|,$$

és informálisan $d\bar{x}\,dz = J(x,z)\,dx\,dy$, ahonnan $dx\,dy = \frac{1}{J(x,z)}\,d\bar{x}\,dz = |\bar{x}|\,d\bar{x}\,dz$, ahonnan

$$G(t) = \int_{(x,y)\colon\ \frac{y}{x} < t} f(x,y)\,dx\,dy = \int\int_{(x,z): z<t} f(x,zx)|x|\,dx\,dz = \int_{-\infty}^{t} K(z)\,dz,$$

ahol

$$K(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, xz)|x|\,dx.$$

Innen látható, hogy a keresett sűrűségfüggvény $g(t) = K(t)$, amint állítottuk.
Ha $\xi$ és $\eta$ két független standard normális eloszlású valószínűségi változó, akkor $(\xi, \eta)$ sűrűségfüggvénye $f(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2}$, ezért $\frac{\eta}{\xi}$ sűrűségfüggvénye

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+t^2x^2)/2}|x|\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi(t^2+1)} e^{-(\sqrt{(t^2+1)}x)^2/2} \left|\left(\sqrt{(t^2+1)}x\right)\right|\,d\left(\sqrt{(t^2+1)}x\right), \end{aligned}$$

ahonnan

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{2\pi(t^2+1)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}|x|\,dx = \frac{1}{\pi(t^2+1)} \int_0^{\infty} e^{-x^2/2} x\,dx \\ &= \frac{1}{\pi(t^2+1)} \left[-e^{-x^2/2}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{\pi(t^2+1)}. \end{aligned}$$

5.) Legyen $\xi$ standard normális eloszlású valószínűségi változó, azaz legyen sűrűségfüggvénye $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, $-\infty < x < \infty$. Számítsuk ki a $\xi^2 + \xi^4$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét.

*Megoldás:* Számítsuk ki először $\xi^2 + \xi^4$ $G(x)$ eloszlásfüggvényét. Ha $x < 0$, akkor $G(x) = 0$, mert $\xi^2 + \xi^4 \geq 0$ egy valószínűséggel. Ha $x > 0$, akkor a $P(\xi^2 + \xi^4 < x)$ valószínűségét kell kiszámítanunk. Legyen $u = u(x)$ az $u^2 + u - x = 0$ egyenlet nagyobb gyöke, az $u = \frac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}$. Nem nehéz belátni, hogy $\xi^2(\omega) + \xi^4(\omega) < x$ akkor és csak akkor, ha $0 \leq \xi^2(\omega) < u(x)$, ami azt jelenti, hogy $-\sqrt{u(x)} < \xi < \sqrt{u(x)}$. Innen $\xi^2 + \xi^4$ eloszlásfüggvénye $x > 0$ esetén

$G(x) = \Phi\left(\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}}\right) - \Phi\left(-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}}\right) = 2\Phi\left(\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}}\right) - 1$, ahol $\Phi(x)$ a standard normális eloszlásfüggvény. Innen differenciálással kapjuk, hogy $\xi^2+\xi^4$ sűrűségfüggvénye $\frac{dG(x)}{dx}$, ahonnan ez a sűrűségfüggvény nulla, ha $x<0$, és $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp\left\{\frac{-1+\sqrt{1+4x}}{4}\right\}\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}}$, ha $x>0$.

6.) Legyen $\xi$ és $\eta$ két valószínűségi változó, amelyek együttes eloszlásának (létező) sűrűségfüggvénye $f(u,v)=\frac{2}{3}u+2uv^2+\frac{2}{3}v$ alakú, ha $0\le u,v\le 1$, és $f(u,v)=0$ egyébként. Lássuk be először, hogy $f(u,v)$ valóban sűrűségfüggvény, majd számoljuk ki a $\xi+\eta$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét.

*Megoldás:* Annak érdekében, hogy ellenőrizzük, hogy $f(u,v)$ sűrűségfüggvény azt kell megmutatni, hogy $f(u,v)\ge 0$ (majdnem) minden $(u,v)$ számpárra, és

$$\int\int f(u,v)\,du\,dv = 1.$$

Az nyilvánvaló, hogy $f(u,v)\ge 0$ minden $(u,v)$ számpárra. Másrészt mivel

$$\int_0^1\int_0^1 uv^2\,du\,dv = \int_0^1 u\,du\int_0^1 v^2\,dv = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

$\int_0^1\int_0^1 u\,du\,dv = \frac{1}{2}$ és $\int_0^1\int_0^1 v\,du\,dv = \frac{1}{2}$, ezért $\int\int f(u,v)\,du\,dv = 1$.
A $\xi+\eta$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét az

$$G(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{x-u} f(u,v)\,dv\right)du$$

képlet segítségével számíthatuk ki, hasonlóan $1-G(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{x-u}^{\infty} f(u,v)\,dv\right)du$.
Másrészt, a sűrűségfüggvény $g(x)=\frac{dG(x)}{dx}$ formula segítségével kiszámítható. Ez a mi esetünkben a következőt jelenti, $g(x)=0$, ha $x\le 0$, $g(x)=1$, ha $x\ge 2$, mert $G(x)=0$, ha $x\le 0$, $G(x)=1$, ha $x\ge 2$. Másrészt

$$g(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^1\int_0^{x-u}\left(\frac{2}{3}u+2uv^2+\frac{2}{3}v\right)du\right)dv,$$

ha $0\le x\le 1$, $g(x) = -\frac{d}{dx}\left(\int_0^1\int_{x-u}^1\left(\frac{2}{3}u+2uv^2+\frac{2}{3}v\right)du\right)dv$, ha $1\le x\le 2$. Azért volt érdemes a $0\le x\le 1$ és $1\le x\le 2$ eseteket szétválasztani, mert a konkrét feladatban a $G(x)$ függvényt tudjuk kényelmesen kiszámítani $0\le x\le 1$ és az $1-G(x)$ függvényt az $1\le x\le 2$ intervallumban. Ez a szétbontás azonban nem kötelező.

A fent vázolt módon ki lehet számolni a sűrűségfüggvényt, de valójában ezt a számolást lehet egyszerűsíteni. Ez hasonló ahhoz, ahogy a konvolució formulát vezetik le független valószínűségi változók összegének a sűrűségfüggvényére. Valóban, a $v$ változó $z = u + v$ helyettesítésével felírhatjuk, hogy

$$G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{x-u} f(u,v)\,dv \right) du = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{x} f(u,z-u)\,dz \right) du$$
$$= \int_{-\infty}^{x} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(u,z-u)\,du \right) dz,$$

ahonnan deriválással

$$g(x) = \frac{dG(x)}{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} f(u,x-u)\,du.$$

E képlettel a számolásokat lehet egyszerűsíteni. Azt kapjuk, hogy jelen esetben $g(x) = 0$, ha $x < 0$ vagy $x > 2$, (ebben az esetben a $g(x)$ függvényt kifejező integrálban szereplő integrandus azonosan nulla. Ugyanis $x < 0$ esetében vagy $u < 0$ vagy $x - u < 0$, és $x > 2$ esetben vagy $u > 1$ vagy $x - u > 1$. Ha $0 \le x \le 1$, akkor

$$g(x) = \int_0^{1-x} \left( \frac{2}{3}u + 2u(x-u)^2 + \frac{2}{3}(x-u) \right) du,$$

ha $1 \le x \le 2$, akkor

$$g(x) = \int_{x-1}^{1} \left( \frac{2}{3}u + 2u(x-u)^2 + \frac{2}{3}(x-u) \right) du.$$

6a.) Mutassuk meg, hogy a fenti feladat megoldásában kapott részeredmények tartalmazzák speciálisan azt az eredményt is, hogy két független valószínűségi változó összegének a sűrűségfüggvényét konvolució segítségével lehet kiszámolni.

*Megoldás.* Láttuk, hogy amennyiben egy $(\xi,\eta)$ véletlen vektor sűrűségfüggvénye $f(x,y)$, akkor a $\xi+\eta$ valószínűségi változónak is van sűrűségfüggvénye, és az $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u,x-u)\,du$. Legyen $\xi$ és $\eta$ két független valószínűségi változó $h_1(x)$ és $h_2(x)$ sűrűségfüggvénnyel. Ekkor a $(\xi,\eta)$ vektornak is van sűrűségfüggvénye, és az az $f(x,y) = h_1(x)h_2(y)$ függvény. Így a $\xi+\eta$ összegnek is van sűrűségfüggvénye, és az az idézett eredmény szerint $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u,x-u)\,du = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(u)h_2(x-u)\,du$.

7.) Legyen a $(\xi,\eta)$ vektor egyenletes eloszlású a $(0,0)$, $(1,0)$ és $(0,1)$ pontok által meghatározott háromszögön, azaz legyen sűrűségfüggvénye 2 azon a háromszögön, amelynek ezek a pontok a csúcspontjai, és legyen nulla ezen a háromszögön kívül. Számítsuk ki a $\xi$ és $\eta$ valószínűségi változók kovarianciáját.

*Megoldás:* $\operatorname{Cov}(\xi,\eta) = E\xi\eta - E\xi E\eta$, és $E\xi\eta = \int xyf(x,y)\,dx\,dy$, $E\xi = \int xf(x,y)\,dx\,dy$, $E\eta = \int yf(x,y)\,dx\,dy$, ahol $f(x,y)$ a $(\xi,\eta)$ vektor sűrűségfüggvénye. Ezért

$$E\xi\eta = \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} 2xy\,dy \right) dx = \int_0^1 2x \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 x(1-x)^2\,dx$$
$$= \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{12},$$

$$E\xi=\int_0^1\left(\int_0^{1-x}2x\,dy\right)dx=\int_0^1 2x(1-x)\,dx=\frac{1}{3},$$

és

$$E\eta=\int_0^1\left(\int_0^{1-x}2y\,dy\right)dx=\int_0^1 (1-x)^2\,dx=\frac{1}{3},$$

(Szimmetria meggondolások alapján is belátható, hogy $E\eta=E\xi$.) Innen $\mathrm{Cov}\,(\xi,\eta)=\frac{1}{12}-\frac{1}{9}=-\frac{1}{36}$.

8.) Legyen $\eta_1$ és $\eta_2$ két független normális eloszlású valószínűségi változó $m_1$ illetve $m_2$ várható értékkel, $\sigma_1^2$ és $\sigma_2^2$ szórásnégyzettel. Lássuk be, hogy az $\eta_1+\eta_2$ összeg $m_1+m_2$ várható értékű és $\sigma_1^2+\sigma_2^2$ szórásnégyzetű normális eloszlású valószínűségi változó.

A feladat megoldása előtt érdemes megjegyezni, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-A)^2/B}\,dx=\sqrt{B\pi}.$$

Ezt láthatjuk például az $y=\sqrt{2}\frac{x-A}{\sqrt{B}}$ helyettesítéssel, és abból a tényből, hogy a $\varphi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}$ függvény sűrűségfüggvény. Ez az észrevétel azért hasznos, mert ez lehetővé teszi, hogy amennyiben olyan integrált kell kiszámolni, amelyben az integrandus exponensében egy kvadratikus alak szerepel, akkor az inegrandusban szereplő kifejezést teljes négyzetté alakítva ki tudjuk számolni az integrált. Ez a gondolata a jelen feladat megoldásának is.

*Megoldás:* Az $\eta_1+\eta_2$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$\begin{aligned}
f(x)&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-(u-m_1)^2/2\sigma_1^2}e^{-(x-u-m_2)^2/2\sigma_2^2}\,du\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\biggl\{-u^2\left(\frac{1}{2\sigma_1^2}+\frac{1}{2\sigma_2^2}\right)+u\left(\frac{m_1}{\sigma_1^2}+\frac{x-m_2}{\sigma_2^2}\right)\\
&\qquad\qquad -\frac{m_1^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(x-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\biggr\}\,du\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\biggl\{-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(u-\frac{m_1\sigma_2^2+(x-m_2)\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2\\
&\qquad\qquad +\frac{(m_1\sigma_2^2+(x-m_2)\sigma_1^2)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}-\frac{m_1^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(x-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\biggr\}\,du\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}u^2\right\}du\\
&\qquad\qquad \exp\left\{\frac{(m_1\sigma_2^2+(x-m_2)\sigma_1^2)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}-\frac{m_1^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(x-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\exp\left\{\frac{(m_1\sigma_2^2+(x-m_2)\sigma_1^2)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}-\frac{m_1^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(x-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \exp\left\{-\frac{(x-m_1-m_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right\}.$$

*Megjegyzés.* A feladatot lehet egyszerűsíteni. Elég például arra az esetre koncentrálni a figyelmünket, amikor $m_1 = 0$ és $m_2 = 0$. Valóban, vezessük be az $\bar\eta_1 = \eta_1 - m_1$ és $\bar\eta_2 = \eta_2 - m_2$ valószínűségi változókat. Ekkor $\bar\eta_1$ és $\bar\eta_2$ független normális eloszlású valószínűségi változók 0 várható értékkel, $\sigma_1^2$ és $\sigma_2^2$ szórásnégyzettel. Másrészt $\eta_1+\eta_2 = \bar\eta_1+\bar\eta_2+m_1+m_2$, és ha $\bar\eta_1+\bar\eta_2$ sűrűségfüggvénye $h(x)$, akkor $\eta_1+\eta_2$ sűrűségfüggvénye $h(x-m_1-m_2)$. Miért? Ez azt jelenti, hogy elég $\bar\eta_1+\bar\eta_2$ sűrűségfüggvényét kiszámolni.

9.) Mutassuk meg, a karakterisztikus függvények segítségével, hogy amennyiben $\xi$ és $\eta$ két független, normális eloszlású valószínűségi változó $m_1$ és $m_2$ várható értékkel, $\sigma_1^2$ és $\sigma_2^2$ szórásnégyzettel, akkor $\xi+\eta$ normális eloszlású valószínűségi változó $m_1+m_2$ várható értékkel, és $\sigma_1^2+\sigma_2^2$ szórásnégyzettel.

*Megoldás:* Írjuk fel a $\xi$ valószínűségi változó $\varphi_1(t) = Ee^{it\xi}$ az $\eta$ valószínűségi változó $\varphi_2(t) = Ee^{it\eta}$ és a $\zeta = \xi+\eta$ valószínűségi változó $\varphi_3(t) = Ee^{it(\xi+\eta)}$ karakterisztikus függvényét. Azt kapjuk, hogy $\varphi_1(t) = e^{itm_1-\sigma_1^2t^2/2}$, mert $\xi = \sigma_1\bar\xi + m_1$, ahol $\xi_1$ standard normális eloszlású valószínűségi változó, ahonnan $\varphi_1(t) = Ee^{it(\sigma_1\bar\xi+m_1)} = e^{itm_1}Ee^{i(t\sigma_1)\bar\xi} = e^{itm_1}e^{-(t\sigma_1)^2/2}$. Hasonlóan, $\varphi_2(t) = e^{itm_2-\sigma_2^2t^2/2}$. Ezért $\varphi_3(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t) = e^{it(m_1+m_2)-(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2/2}$, ahonnan következik, hogy $\zeta$ normális eloszlású valószínűségi változó $m_1+m_2$ várható értékkel és $\sigma_1^2+\sigma_2^2$ szórásnégyzettel.

10.) Legyen $\xi$ normális eloszlású valószínűségi változó 2 várható értékkel és 3 szórásnégyzettel. Számoljuk ki minden valós $t$ számra az $Ee^{t\xi}$ várható értéket.

*Megoldás.* A feladatot megoldhatjuk az 1.) feladat megoldásához hasonlóan. A $\xi$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét is fel tudjuk írni, és ezután az 1.) feladathoz hasonló integrál segítségével fel tudjuk írni a keresett várható értéket, és azt az 1) feladathoz hasonlóan ki tudjuk számolni. De egyszerűbben is célhoz érhetünk. A feladatot közvetlenül visszavezethetjük az 1. feladatra. Felírhatjuk ugyanis a $\xi$ valószínűségi változót $\xi = \sqrt{3}\eta + 2$ alakban, ahol $\eta$ standard normális eloszlású valószínűségi változó. Innen következik, hogy $Ee^{t\xi} = Ee^{t(\sqrt{3}\eta+2)} = e^{2t}Ee^{t\sqrt{3}\eta} = e^{2t}Ee^{(\sqrt{3}t)\eta} = e^{2t+3t^2/2}$ az első feladat eredménye alapján.

11.) Két független standard normális eloszlású valószínűségi változó hányadosa, mint láttuk, egy olyan valószínűségi változó, amelynek sűrűségfüggvénye $h(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$, $-\infty < x < \infty$. Az ilyen sűrűségfüggvénnyel rendelkező valószínűségi változókat Cauchy eloszlásúnak nevezik. Létezik-e egy Cauchy eloszlású valószínűségi változónak várható értéke?

*Megoldás.* A válasz az, hogy egy Cauchy eloszlású $\xi$ valószínűségi változónak nem létezik várható értéke. Egy $\xi$ valószínűségi változónak ugyanis akkor és csak akkor létezik várható értéke, ha mind a $\xi^+ = \max(\xi, 0)$ pozitív, mind az $\xi^- = \min(0,\xi)$ negatív részének a várható értéke véges. Ez azonban ebben a példában nem teljesül, mert $E\xi^+ = \int_0^\infty xf(x)\,dx = \infty$ és $E\xi^- = \int_{-\infty}^0 xf(x)\,dx = -\infty$. Az első relációt például úgy lehet látni, hogy észrevesszük, hogy az $xf(x) = \frac{x}{\pi(1+x^2)}$ integrandus primitív függvénye a $g(x) = \frac{1}{2\pi}\log(1+x^2)$, és $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$. De egyszerűbben is láthatjuk ezt, ha észrevesszük, hogy az $xf(x)$ függvény a végtelenben úgy viselkedik, mint a const. $x^{-1}$ függvény alkalmas pozitív konstanssal, ezért a tekintett integrál konvergenciája vagy divergenciája attól függ, hogy az $\int_a^\infty x^{-1}\,dx$ integrál valamely $a>0$ alsó integrálási határral konvergens-e vagy divergens. De tudjuk, hogy az $\int_a^\infty x^{-\alpha}\,dx$ integrál $\alpha>1$-re konvergens és $\alpha\le 1$-re divergens.

12.) Legyen $\xi$ és $\eta$ két független, a $\left[-\frac12,\frac12\right]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változó, azaz legyen $\xi$ és $\eta$ sűrűségfüggvénye $f(x)=1$, ha $-\frac12\le x\le\frac12$, és $f(x)=0$ egyébként. Számoljuk ki $\xi+\eta$ sűrűségfüggvényét.

*Megoldás:* A $\xi+\eta$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye a $g(x)=\int f(y)f(x-y)\,dy$ függvény, ahol $f(x)$ a $\left[-\frac12,\frac12\right]$ intervallumban egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye. Ezért $f(y)f(x-y)=1$, ha $-\frac12\le y\le\frac12$, és $-\frac12\le x-y\le\frac12$, azaz $-\frac12+x\le y\le\frac12+x$, és nulla egyébként. Ez azt jelenti, hogy a $\xi+\eta$ összeg $g(x)$ sűrűségfüggvénye az $x$ pontban megegyezik a $\left[-\frac12,\frac12\right]\cap\left[-\frac12+x,\frac12+x\right]$ intervallum hosszával. Ha $|x|>1$, akkor a fenti metszet üres, ezért ebben az esetben $g(x)=0$. Ha $0\le x\le 1$, akkor ez a metszet a $\left[-\frac12+x,\frac12\right]$ intervallum, és ennek hossza $1-x$, azaz ebben az esetben $g(x)=1-x$. Ha $-1\le x\le 0$, akkor ez a metszet a $\left[-\frac12,\frac12+x\right]$ intervallum amelynek hossza $1+x=1-|x|$, azaz $g(x)=1+x=1-|x|$ ebben az esetben. Ez azt jelenti, hogy $g(x)=1-|x|$, ha $|x|\le 1$, és $g(x)=0$, ha $|x|>1$.

Megadok egy másik geometriai érvelésen alapuló megoldást.

Számítsuk ki először a $\xi+\eta$ valószínűségi változó $G(x)$ eloszlásfüggvényét. Definiáljuk a $K=\left[-\frac12,\frac12\right]\times\left[-\frac12,\frac12\right]$ négyzetet, és jelölje $\lambda$ a Lebesgue mértéket, azaz a területet a síkon. Ekkor a sík tetszőleges $A\subset R^2$ mérhető részhalmazára igaz az, hogy $P((\xi,\eta)\in A)=\lambda(A\cap K)$. Speciálisan, $G(x)=P(\xi+\eta<x)=\lambda(K\cap\{(u,v)\colon\ u+v<x\})$. Ha $x\le -1$, akkor $G(x)=0$, ha $-1\le x\le 0$, akkor $G(x)$ a $\left(-\frac12,-\frac12\right)$, $\left(-\frac12,\frac12+x\right)$ és $\left(\frac12+x,-\frac12\right)$ pontok által meghatározott háromszög területe $\frac12(1+x)^2$. Hasonlóan, ha $x\ge 1$, akkor $G(x)=1$. Ha $0\le x\le 1$, akkor a $G(x)$ eloszlásfüggvény megegyezik annak a poligonnak területével, amelyet úgy kapunk, hogy a $K$ négyzetből kihagyjuk a $\left(\frac12,\frac12\right)$, $\left(\frac12,-\frac12+x\right)$ és $\left(-\frac12+x,\frac12\right)$ pontok által meghatározott háromszöget. Ezért $G(x)=1-\frac12(1-x)^2$ ebben az esetben. A $G(x)$ függvényt deriválva kapjuk, hogy $g(x)=0$, ha $|x|\le 1$, $g(x)=1+x$, ha $-1\le x\le 0$, és $g(x)=1-x$, ha $0\le x\le 1$.

13.) Legyen $\xi$ és $\eta$ két független valószínűségi változó $f(x)$ és $g(x)$ sűrűségfüggvénnyel. Hogyan számoljuk ki $\xi-\eta$ sűrűségfüggvényét?

*Megoldás.* $\xi-\eta=\xi+(-\eta)$. Ha $\eta$ sűrűségfüggvénye $g(x)$ akkor $-\eta$ sűrűségfüggvénye $g^-(x)=g(-x)$. Miért? Innen $\xi-\eta=\xi+(-\eta)$ sűrűségfüggvénye $f*g^-(x)=\int_{-\infty}^\infty f(y)g^-(x-y)\,dy=\int_{-\infty}^\infty f(y)g(y-x)\,dy$.

14.) Legyen $\xi$ és $\eta$ két független egyforma eloszlású valószínűségi változó valamely $[a,a+1]$ illetve $[b,b+1]$ intervallumon. Számítsuk ki a $\xi+\eta$ és $\xi-\eta$ valószínűségi változók sűrűségfüggvényét.

*Megoldás:* A feladatot meg lehet oldani megfelelő konvoluciók kiszámításának a segítségével. De mivel ezt a feladatot már megoldottuk egy speciális esetben a 12. feladatban, ezért egyszerűbb a feladat megoldását visszavezetni erre a speciális esetre. Ennek érdekében vezessünk be két független $\xi_0$ és $\eta_0$ a $[-\frac12,\frac12]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változót. Feltehetjük, hogy $\xi = \xi_0 + a + \frac{1}{2}$ és $\eta = \eta_0 + b + \frac{1}{2}$. Ekkor $\xi + \eta = \xi_0 + \eta_0 + a + b + 1$, $\xi - \eta = \xi_0 - \eta_0 + a - b$. Ezenkívül $\xi_0 + \eta_0$ és $\xi_0 - \eta_0$ sűrűségfüggvénye megegyezik, és ez az említett feladat eredménye szerint $g(x) = 1 - |x|$, ha $-1 \le x \le 1$, $g(x) = 0$, ha $x < -1$ vagy $x > 1$. Innen $x + \eta$ sűrűségfüggvénye $g(x - a - b - 1) = 1 - |x - a - b - 1|$, ha $|x-a-b-1| \le 1$, $g(x-a-b-1) = 0$, ha $|x-a-b-1| > 1$, $\xi-\eta$ sűrűségfüggvénye $g(x-a+b) = 1-|x-a+b|$, ha $|x-a+b| \le 1$, $g(x-a+b) = 0$, ha $|x-a+b| > 1$.

15.) Egy egységnyi oldalú négyzet két átellenes oldalán találomra választunk egy-egy pontot. Mekkora annak a valószínűsége, hogy ezek távolsága $\alpha$-nál kisebb ($1 \le \alpha < \sqrt{2}$)?

*Megoldás:* Jelölje $\xi$ a négyzet egyik, $\eta$ a négyzet átellenes oldalára ledobott pont értékét. A két ledobott pont távolsága (a Pitagorasz-tétel szerint) $\sqrt{(\xi-\eta)^2+1}$, ezért minket a $P(\sqrt{(\xi-\eta)^2+1} < \alpha) = P(|\xi-\eta| < \sqrt{\alpha^2-1})$ valószínűség értéke érdekel. $\xi$ és $\eta$ két független a $[0,1$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó. A feladatot egyrészt megoldhatjuk a geometriai valószínűségek módszerével. Ekkor azt használjuk, ki, hogy a $(\xi,\eta)$ véletlen vektor az egységnégyzet egy véletlen pontja, és a keresett valószínűség az $\{(u,v)\colon\ 0 \le u,v \le 1,\ -\sqrt{\alpha^2-1} < u-v < \sqrt{\alpha^2-1}\}$ halmaz területe, ami $1-(1-\sqrt{\alpha^2-1})^2 = 2\sqrt{\alpha^2-1}-(\alpha^2-1)$.

Másrészt a minket érdeklő valószínűséget kiszámolhatjuk az előző feladat segítségével is. E feladat eredménye szerint ugyanis ismerjük a $\xi-\eta$ valószínűségi változó $g(x)$ sűrűségfüggvényét, ahonnan tetszőleges $0 \le u \le 1$ számra $P(|\xi-\eta| < u) = \int_{-u}^{u} g(x)\,dx = 2\int_0^u (1-x)\,dx = 2u-u^2$ Innen $u = \sqrt{\alpha^2-1}$ választással a keresett valószínűség $2\alpha-\alpha^2 = 2\sqrt{\alpha^2-1}-(\alpha^2-1)$.

16.) A $[0,1]$ intervallumon találomra felveszünk két pontot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a két felvett pont távolsága kisebb, mint a 0 pontnak a hozzá közelebb eső ponttól való távolsága?

*Megoldás:* Ezt a feladatot legegyszerűbben a geometriai valószínűségek módszerével tudjuk megoldani. Egyszerűbb először a feladatban kérdezett esemény komplementerének a valószínűségét kiszámolni. Legyen $\xi$ az első, $\eta$ a második ledobott pont értéke, és vezessük be az $A = \{\omega\colon\ \xi(\omega) > 2\eta(\omega)\}$ és $B = \{\omega\colon\ \eta(\omega) > 2\xi(\omega)\}$ eseményeket. Ekkor a minket érdeklő esemény komplementere az $A \cup B$ esemény. Továbbá, az $A$ és $B$ események diszjunktak, $P(A) = P(B)$, ezért $P(A \cup B) = 2P(A)$. A $(\xi,\eta)$ véletlen vektor egyenletes eloszlású az egységnégyzeten, és az $A$ esemény azt jelenti, hogy ez a pont az $\{(u,v)\colon\ 0 < 2v < u \le 1\}$ halmazba esik. Ennek valószínűsége $\frac{1}{4}$. Ezért $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$, és a keresett valószínűség $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Megjegyzem, hogy az előbb tekintett $P(A)$ eseményt a következőképp számolhatjuk ki általános elvek segítségével. A $(\xi,\eta)$ véletlen vektor sűrűségfüggvényét ismerjük. Ez a $\xi$ és $\eta$ valószínűségi változók függetlensége miatt $g(u,v) = f(u)f(v)$, ahol $f(u) = 1$, ha $0 \le u \le 1$, $f(u) = 0$, ha $u < 0$ vagy $u > 1$ a $\xi$ és $\eta$ valószínűségi változók sűrűségfüggvénye. Innen,

$$P(A) = \int_{\{(x,y)\colon\ x>2y\}} g(x,y)\,dx\,dy = \int_{\{(x,y)\colon\ x>2y\}} f(x)f(y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{\{(x,y)\colon\, 1\ge x>2y>0\}} dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{x/2} dy\right) dx = \int_0^1 \frac{x}{2}\,dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

17.) Ledobunk egymástól függetlenül 24 000 pontot a $[0,2]$ intervallumra egyenletes eloszlással, (azaz annak a valószínűsége, hogy egy ledobott pont értéke $x$-nél kisebb $\frac{x}{2}$-vel egyenlő, ha $0 \le x \le 2$, eggyel egyenlő, ha $x \ge 2$, és nulla, ha $x \le 0$.) Őrizzük meg azokat a ledobott pontokat, amelyek értéke 1-nél kisebb, és hagyjuk el azokat, amelyek értéke nagyobb, mint egy. Mi annak a valószínűsége, hogy a megőrzött pontok értékeinek az összege 5900 és 6075 közé esik? Adjunk erre a valószínűségre jó közelítő becslést egy normális eloszlástáblázat segítségével.

*Megoldás:* Vezessük be a következő $\xi_j$, $1 \le j \le 24\ 000$, valószínűségi változókat: $\xi_j = x$, ha a $j$-ik ledobott pont értéke $x$, és $0 \le x \le 1$, és $\xi_j = 0$, ha a $j$-ik ledobott pont értéke az $(1,2]$ intervallumba esik. Ekkor a megőrzött pontok összege $S = \sum\limits_{j=1}^{24\ 000} \xi_j$, továbbá a $\xi_j$ valószínűségi változók függetlenek és egyforma eloszlásúak. Ezért a centrális határeloszlástétel segítségével jó becslést tudunk adni a minket érdeklő $P(5900 < S < 6075)$ valószínűségre. Ennek érdekében ki kell számolnunk a $\xi_1$ valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.

A $\xi_1$ valószínűségi változó várható értékének és szórásnégyzetének a kiszámolása érdekében vezessük be az $\eta_1$ valószínűségi változót, amelyik megegyezik az első ledobott pont értékével, és a következő $h(x)$ függvényt a $[0,2]$ intervallumon: Legyen $h(x) = x$, ha $0 \le x \le 1$, és $h(x) = 0$, ha $1 \le x \le 2$. Ekkor $\xi_1 = h(\eta_1)$, és $\eta_1$ sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{2}$, ha $0 \le x \le 2$, $f(x) = 0$, ha $x < 0$, és $x > 2$. Innen $E\xi_1 = Eh(\xi_1) = \int h(x)\,dx = \int_0^1 x\frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{4}$, $E\xi_1^2 = Eh(\eta_1)^2 = \int_0^1 x^2\frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{6}$, és $\operatorname{Var}\xi_1 = E\xi_1^2 - (E\xi_1)^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{16} = \frac{5}{48}$. Ezért $ES = 6000$, $\operatorname{Var} S = 2500$. Innen

$$P(5900 < S < 6075) = P\left(-2 < \frac{S - ES}{\sqrt{\operatorname{Var} S}} < 1.5\right)$$
$$\sim \Phi(1.5) - \Phi(-2) = \Phi(1.5) + \Phi(2) - 1.$$

*a feladat módosított megoldása.* A $\xi$ valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét ki tudjuk számolni közvetlenül, az $\eta$ valószínűségi változó bevezetése nélkül is, ha tudjuk, hogyan kell kiszámolni egy valószínűségi változó várható értékét kifejező integrált az általános esetben. (Tehát ki kell tudnunk számolni egy eloszlás által meghatározott Lebesgue–Stieltjes integrált akkor is, ha az eloszlásfüggvénynek nincs sűrűségfüggvénye, és nem is diszkrét eloszlás jelenik meg.) A következő észrevételt érdemes tenni. Ha adva van két $\mu_1$ és $\mu_2$ mérték és egy $f(x)$ függvény a számegyenesen, akkor $f(x)(\mu_1(\,dx) + \mu_2(\,dx)) = f(x)\mu_1(\,dx) + \int f(x)\mu_2(\,dx)$. (Valójában ez az azonosság tetszőleges téren értelmezett függvényre és mértékpárra is érvényes.)

Tekintsük a $\xi$ valószínűségi változó $\mu_F$ eloszlásásának a következő természetes felbontását: $\mu_F = \mu_1 + \mu_2$, ahol $\mu_1$ az a mérték, amelyiknek a sűrűségfüggvénye $\frac{1}{2}$ a $[0,1]$ intervallumban, és nulla egyébként, azaz $\mu_1(A) = \int_{A\cap[0,1]} \frac{1}{2}\,dx$, a $\mu_2$ mérték pedig a 0 pontba van koncentrálva, és a 0 pont $\mu_2$ mértéke $\frac{1}{2}$, azaz $\mu_2(A) = \frac{1}{2}$, ha $0 \in A$, és $\mu_2(A) = 0$, ha $0 \notin A$. Ekkor $E\xi = \int x\mu_1(\,dx) + \int x\mu_2(\,dx) = \int_0^1 \frac{1}{2}x\,dx = \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4}$, és $E\xi^2 = \int x^2\mu_1(\,dx) + \int x^2\mu_2(\,dx) = \int_0^1 \frac{1}{2}x^2\,dx + 0 = \frac{1}{6} + 0 = \frac{1}{6}$, $\operatorname{Var}\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{16} = \frac{5}{48}$.

18.) Egy nagyvárosban népszavazást tartanak egy kérdésről. A város egy folyó két oldalán fekszik, és a folyó két oldalán lakóknál más mind a kérdés támogatottsága, mind a szavazási hajlandóság. A folyó baloldalán 85000 szavazópolgár lakik, az ottlakók $\frac{3}{4}$ valószínűséggel támogatják a javaslatot, és $\frac{4}{5}$ valószínűséggel mennek el szavazni. A folyó jobbpartján 50400 szavazópolgár lakik, az ottlakók $\frac{1}{2}$ valószínűséggel támgatják a javaslatot, és $\frac{2}{3}$ valószínűséggel mennek el szavazni. Az egyes lakosok véleménye és szavazási hajlandósága független egymástól. Mi annak a (közelítő) valószínűsége, hogy a leadott igen szavazatok száma nagyobb, mint a leadott nem szavazatok kétszerese plusz 1080?

*Megoldás.* Vezessük be a következő $\xi_j$, $1 \le j \le 85000$ és $\eta_j$, $1 \le j \le 50400$, valószínűségi változokat. $\xi_j = 1$, ha a folyó $j$-ik baloldali partján lakó szavazópolgár igennel szavaz, $\xi_j = -2$, ha nemmel szavaz, és $\xi_j = 0$, ha nem megy el szavazni, $1 \le j \le 85000$. Hasonlóan, $\eta_j = 1$, ha a folyó $j$-ik jobboldali partján lakó szavazópolgár igennel szavaz, $\eta_j = -2$, ha nemmel szavaz, és $\eta_j = 0$, ha nem megy el szavazni, $1 \le j \le 50400$. Legyen $S = \sum\limits_{j=1}^{85000} \xi_j + \sum\limits_{j=1}^{50400} \eta_j$. Vegyük észre, hogy minket a $P(S > 1080)$ valószínűség nagysága érdekel. (A $\xi_j$ és $\eta_j$ valószínűségi változókat hasonlóan definiáltuk. Azért tettünk közöttük különbséget, mert más az eloszlásuk.) Erre a valószínűségre a független, de nem feltétlenül egyforma eloszlású valószínűségi változók összegére vonatkozó centrális határeloszlástétel segítségével tudunk jó közelítést adni. Ennek érdekében számoljuk ki az $S$ összeg várható értékét és szórásnégyzetét.

Mivel $P(\xi_j = 1) = \frac{3}{5}$, $P(\xi_j = -1) = \frac{1}{5}$, $P(\xi_j = 0) = \frac{1}{5}$, ezért $E\xi_j = \frac{1}{5}$, $E\xi_j^2 = \frac{7}{5}$, $\operatorname{Var}\xi_j = \frac{34}{25}$. Hasonlóan, $P(\eta_j = 1) = \frac{1}{3}$, $P(\eta_j = -1) = \frac{1}{3}$, $P(\eta_j = 0) = \frac{1}{3}$, ezért $E\eta_j = -\frac{1}{3}$, $E\eta_j^2 = \frac{5}{3}$, $\operatorname{Var}\xi_j = \frac{14}{9}$. Ezért $ES = 85000 \times \frac{1}{5} - 50400 \times \frac{1}{3} = 200$, $\operatorname{Var}S = 85000 \times \frac{34}{25} + 50400 \times \frac{14}{9} = (20)^2(17^2 + 14^2) \sim 440^2$.

Innen $P(S > 1080) = P\left(\frac{S-ES}{\operatorname{Var}S} > \frac{1080-ES}{\operatorname{Var}S}\right) \sim= P\left(\frac{S-ES}{\operatorname{Var}S} > \frac{880}{440}\right) \sim 1 - \Phi(2) \sim 0.0228$.

19.) Egy népszavazási kérdést a választáson akkor fogadnak el, ha egyrészt többen szavaztak rá igennel, mint nemmel, másrészt az igen szavazatok száma meghaladja az összes választópolgárok számának a 20%-át. Legyen mondjuk, $n = 5000000$ választópolgár, mindenki egymástól függetlenül 40% valószínűséggel megy el szavazni, és 50% valószínűséggel szavaz igennel. Mi a valószínűsége annak, hogy a népszavazás eredményeként elfogadják a népszavazási kérdést?

*Megoldás.* Vezessük be a következő (kétváltozós) vektorértékű $(\xi_j, \eta_j)$ valószínűségi változókat. $\xi_j = 1$, ha a $j$-ik szavazó igennel szavaz, $\xi_j = -1$, ha nemmel szavaz, és $\xi_j = 0$, ha nemmel szavaz. $\eta_j = 1$, ha a $j$-ik szavazó igennel szavaz, $\eta_j = 0$ egyébként, tehát ha nemmel szavaz vagy ha nem megy el szavazni. Legyen

$S_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_j$, $T_n = \sum_{j=1}^{n} \eta_j$. Ekkor minket annak a valószínűsége érdekel, hogy mind az $S > 0$ mind a $T > 0.2n$ esemény bekövetkezik. Erre a kérdésre a többváltozós centrális határeloszlástétel segítségével tudunk válaszolni, ha azt a $(\xi_j, \eta_j)$ véletlen vektorok összegére alkalmazzuk. Ekkor $E\xi_j = 0$, $E\eta_j = 0.2$, $\operatorname{Var}\xi_j = E\xi_j^2 = 0.4$, $\operatorname{Var}\eta_j = E\eta_j^2 - (E\eta_j)^2 = 0.2 - 0.2^2 = 0.16$, $\operatorname{Cov}(\xi_j, \eta_j) = E\xi_j\eta_j - E\xi_j E\eta_j = E\xi_j\eta_j = P(\xi_j = 1, \eta_j = 1) = 0.2$. Innen $\lim_{n\to\infty} P(S_n > 0, T_n > 0.2n) = \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{\sqrt{n}} S_n > 0, \frac{1}{\sqrt{n}}(T_n - ET_n) > 0\right)$, és ez azon $(X, Y)$ normális eloszlású véletlen vektor által meghatározott $P(X > 0, Y > 0$ valószínűséghez tart, amelyre $EX = EY = 0$, kovariancia mátrixát pedig a $\operatorname{Var} X = 0.4$, $\operatorname{Var} Y = 0.16$, $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0.2$ képletek határozzák meg.

*Megjegyzés:* Az ebben a feladatban kapott valószínűség valamivel nagyobb, mint 0.25, azaz az az érték, ami akkor jelenne meg, ha a határeloszlásban megjelenő normális eloszású véletlen vektor $X$ és $Y$ koordinátái korrelálatlanok, ezért függetlenek lennének. 0.25 annak az (aszimptotikus) valószínűsége, hogy legalább a szavazatok 40%-át leadták, és az igen szavazatok voltak többségben. De pozitív valószínűséggel az is bekövetkezhet, hogy az össz-szavazatok száma valamivel kevesebb, mint a szavazásra jogosultak számának 40%-a, de ezen belül a többségben levő igennel szavazók száma meghaladja a szavazásra jogosultak számának a 20%-át.

20.) Számoljuk ki az előző feladat megoldásában megjelenő határeloszlás sűrűségfüggvényét, azaz egy olyan normális eloszlású $(\xi, \eta)$ véletlen vektor sűrűségfüggvényét, amelyre $E\xi = E\eta = 0$, $\operatorname{Var} X = 0.4$, $\operatorname{Var} Y = 0.16$, $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0.2$.

*Megoldás:* Számoljuk ki a tekintett véletlen vektor kovariancia mátrixának a determinánsát és inverzét. A determináns értéke $\operatorname{Var}\xi \operatorname{Var}\eta - (\operatorname{Cov}(\xi, \eta))^2 = 0.4 \cdot 0.16 - 0.2^2 = 0.024$, az inverz mátrix olyan $D = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ mátrix amelyre $A = \frac{0.16}{0.024} = \frac{160}{24} = \frac{20}{3}$, $C = \frac{0.4}{0.024} = \frac{50}{3}$, $B = -\frac{0.2}{0.024} = -\frac{25}{3}$. Innen a keresett sűrűségfüggvény értéke

$$f(x, y) = \frac{1}{0.4\sqrt{3}\pi} \exp\left\{-\frac{5}{3}(2x^2 + 5y^2 - 5xy)\right\}.$$

Innen az is következik, hogy az előző feladat megoldását megadó valószínűség közelítőleg $\int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y)\, dx\, dy$ a fenti $f(x, y)$ sűrűségfüggvénnyel.

21.) Egy szabályos dobókockát feldobunk tízszer. Számoljuk ki a dobásösszeg harmadik hatványának a várható értékét.

*Megoldás:* Vezessük be a következő valószínűségi változókat: $\xi_j(\omega) = k$, ha a $j$-ik dobás eredménye $k$, $1 \le j \le 10$, $1 \le k \le 6$. Ekkor az $E\left(\sum_{j=1}^{10} \xi_j(\omega)\right)^3$ várható értéket kell kiszámítanunk. Ennek érdekében tekintsük a $\left(\sum_{j=1}^{10} \xi_j(\omega)\right)^3$ kifejezést és értsük meg milyen tagokat kapunk, ha elvégezzük a beszorzásokat. Egyrészt megjelenik 10 darab $\xi_j^3$ alakú kifejezés, és $E\xi_j^3 = E\xi_1^3$ minden ilyen tagra. Ezenkívül megjelenik $3 \cdot 10 \cdot 9$ darab $\xi_j^2 \xi_k$, $j \neq k$, alakú kifejezés, mert a lehetséges $(j, k)$ párokat $10 \cdot 9$ módon választhatjuk ki, és a $k$ (a négyzetre nem emelt tényező) három helyen szerepelhet a szorzatban. (Tehát például a $\xi_1 \xi_2^2$ alakú tagnak 3 lesz az együtthatója a szorzatban.) Továbbá minden ilyen tagra $E\xi_j^2 \xi_k = E\xi_j^2 E\xi_k = E\xi_1^2 E\xi_1$. Továbbá, hasonló meggondolások alapján láthatjk, hogy $10 \cdot 9 \cdot 8$ módon jelenhet meg $\xi_j \xi_k \xi_l$ alakú tag, ahol a $j$, $k$ és $l$ indexek mind különbözőek, és ezekre $E\xi_j \xi_k \xi_l = (E\xi_1)^3$. Valóban, a $\xi_j \xi_k \xi_l$ alakú alakú tagok összeszámlálásánál vegyük észre, hogy $1 \le j < k < l \le 10$ alakú számhármasokat $\binom{10}{3}$ féleképp választhatunk, a $\xi_j$ tényező a szorzatban 3-féleképp jelenhet meg, a szorzat első, második vagy harmadik tagjában, a $\xi_k$ tényező ezután 2-féleképp, a $\xi_l$ tényező pedig egyféleképp választható. Másfajta tag nem jelenik meg a szorzatban. Innen a várható érték additívitását kihasználva azt kapjuk, hogy $E\left(\sum\limits_{j=1}^{10} \xi_j(\omega)\right)^3 = 10E\xi_1^3 + 270E\xi_1 E(\xi_1^2) + 720\,(E\xi_1)^3 = 735 + 14332.5 + 30870 = 45937.5$, mert $E\xi_1 = 3.5$, $E\xi_1^2 = \frac{91}{6}$ és $E\xi_1^3 = 73.5$.

22.) Legyen egy urnában 20 piros és 30 fehér golyó. Húzzunk ki 20 golyót visszatevés nélkül. Számoljuk ki a kihúzott piros golyók számának várható értékét és szórásnégyzetét.

*Megoldás:* Vezessük be a következő $\xi_j$, $1 \le j \le 20$, valószínűségi változókat: $\xi_j(\omega) = 1$, ha a $j$-ik húzás eredménye piros, $\xi_j(\omega) = 0$, ha a $j$-ik húzás eredménye fehér. Ekkor a $\xi = \sum\limits_{j=1}^{20} \xi_j$ összeg várható értékét és szórásnégyzetét kell kiszámolnunk. Továbbá $E\xi_j = E\xi_1 = \frac{2}{5}$, $\operatorname{Var}\xi_j = \operatorname{Var}\xi_1 = \frac{2}{5} - \frac{4}{25} = \frac{6}{25}$, $E\xi_j\xi_k - E\xi_j E\xi_k = E\xi_1\xi_2 - E\xi_1 E\xi_2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{19}{49} - \frac{4}{25} = -\frac{6}{1245}$, ha $j \neq k$. Innen a 20 dobásban kihúzott piros golyók számának várható értéke $20 \cdot \frac{2}{5} = 8$ és szórásnégyzete $20 \cdot \frac{6}{25} - 380 \cdot \frac{6}{1245} = \frac{144}{49}$.

23.) Feldobunk egy szabályos pénzérmét 100-szor egymás után. Tekintsük az egymást követő fej-fej dobássorozatok számát, és számítsuk ki ennek várható értékét és szórásnégyzetét.

*Megoldás:* Vezessük be a következő $\xi_j$, $1 \le j \le 99$, valószínűségi változókat: $\xi_j = 1$, ha a $j$-ik és $j+1$-ik dobások mindegyikének eredménye fej, $\xi_j = 0$ egyébként. Vegyük észre, hogy minket az $S = \sum\limits_{j=1}^{99} \xi_j$ valószínűségi változó várható értéke érdekel. Ezért $ES = E\left(\sum\limits_{j=1}^{99} E\xi_j\right) = \frac{99}{4}$, mivel $E\xi_j = \frac{1}{4}$. (Érdemes megjegyezni, hogy az ebben a feladatban tekintett $\xi_j$ valószínűségi változók nem függetlenek, de a függetlenségre nincs szükség a várható érték additivításához.)

A szórásnégyzet kiszámításában viszont figyelembe kell vennünk azt, hogy nem csupa független valószínűségi változó összegét vizsgáljuk. Használjuk a szórásnégyzet kiszámolásánál a következő formulát.

$$\operatorname{Var} S = \operatorname{Var}\left(\sum_{j=1}^{99} \xi_j\right) = \sum_{j=1}^{99} \operatorname{Var}\xi_j + 2 \sum_{1 \le j < k \le 99} \operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k).$$

Továbbá $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k) = 0$, ha $k \ge j+2$, mert ebben az esetben $\xi_j$ és $\xi_k$ függetlenek, és $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_{j+1}) = \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$ minden $1 \le j \le 98$ számra. Ugyanis $E\xi_j\xi_{j+1} = \frac{1}{8}$, mivel $\xi_j\xi_{j+1} = 1$, ha a $j$-ik, $j+1$-ik és $j+2$-ik dobások mindegyike fej, aminek valószínűsége $\frac{1}{8}$, és $\xi_j\xi_{j+1} = 0$ egyébként. Továbbá $E\xi_j E\xi_{j+1} = \frac{1}{16}$. Ezenkívül $\operatorname{Var}\xi_j = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$. Innen $\operatorname{Var} S = 99 \cdot \frac{3}{16} + 2 \cdot \frac{98}{16} = \frac{493}{16}$.

24.) Egy urnában 10 piros és 20 fehér golyó van. Kihúzunk visszatevés nélkül 10 golyót. A páros sorszámú húzások esetén fehér golyó húzás esetén nyerünk 3 forintot, piros golyó húzás esetén pedig nem nyerünk és nem veszítünk semmit. A páratlan sorszámú húzások esetén piros húzás esetén 2 forintot nyerünk, fehér golyó húzás esetén nem nyerünk és nem veszítünk semmit. Számoljuk ki a nyereményünk várható értékét és szórásnégyzetét.

*Megoldás:* Vezessük be a következő $\xi_j$, $1 \le j \le 10$, valószínűségi változókat: Páros $j$ számokra $\xi_j = 3$, ha a $j$-ik húzás eredménye piros, $\xi_j = 0$, ha a $j$-ik húzás eredménye fehér golyó. Páratlan $j$ számokra $\xi_j = 2$, ha a $j$-ik húzás eredménye piros, $\xi_j = 0$, ha a $j$-ik húzás eredménye fehér golyó. Ekkor az $S = \sum\limits_{j=1}^{10} \xi_j$ összeg várható értékét és szórásnégyzetét kell kiszámolnunk. Ennek érdekében számoljuk ki az $E\xi_j$ várható értékeket, $\operatorname{Var}\xi_j$ szórásnégyzeteket és $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k)$ kovarianciákat. Annak valószínűsége, hogy a $j$-ik húzás eredménye piros $\frac{1}{3}$, annak valószínűsége, hogy $j$-ik húzás eredménye fehér $\frac{2}{3}$. Ezért $E\xi_j = 2$, ha $j$ páros, $E\xi_j = \frac{2}{3}$, ha $j$ páratlan, és $ES = 5\left(2 + \frac{2}{3}\right) = 13\frac{1}{3}$.

A szórásnégyzet kiszámítása érdekében vegyük észre, hogy $E\xi_j^2 = 6$, $\operatorname{Var}\xi_j = 2$, ha $j$ páros, és $E\xi_j^2 = \frac{4}{3}$, $\operatorname{Var}\xi_j = \frac{8}{9}$. Továbbá annak valószínűsége, hogy két $j$ és $k$ indexre $j \ne k$, a $j$-ik és $k$-ik húzás mindegyike fehér $\frac{2\cdot 19}{3\cdot 29} = \frac{38}{87}$, annak, hogy mindkét húzás piros $\frac{9}{3\cdot 29} = \frac{3}{29}$, annak, hogy az egyik húzás fehér, a másik húzás piros $\frac{2\cdot 10}{3\cdot 29} = \frac{20}{57}$. Ezért $E\xi_j\xi_k = 9 \cdot \frac{2\cdot 19}{3\cdot 29} = \frac{114}{29}$, $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k) = \frac{114}{29} - 4 = -\frac{2}{29}$, ha $j$ és $k$ páros, $E\xi_j\xi_k = 4 \cdot \frac{3}{29} = \frac{12}{29}$, $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k) = \frac{12}{29} - \frac{4}{9} = -\frac{8}{263}$, ha $j$ és $k$ páratlan, $E\xi_j\xi_k = 6 \cdot \frac{20}{57} = \frac{40}{29}$, $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k) = \frac{40}{29} - \frac{4}{3} = \frac{4}{87}$, ha $j$ és $k$ közül az egyik páros, a másik páratlan. Olyan $(j,k)$ pár, $1 \le j,k \le 10$, $j \ne k$, amelyre $j$ és $k$ mindegyike páros vagy mindegyike páratlan, összesen 20 van, és olyan $(j,k)$ pár, amelyekre az egyik páros, a másik páratlan $2 \cdot 5 \cdot 5 = 50$ van, ezért

$$\sum_{1\le j,k\le 10,\, j\ne k} \operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k) = 20\left(-\frac{2}{29} - \frac{8}{263}\right) + 50 \cdot \frac{4}{87} = \frac{80}{263}.$$

Innen

$$\begin{aligned}\operatorname{Var} S &= \sum_{j=1}^{10} \operatorname{Var}\xi_j + \sum_{1\le j,k\le 10,\, j\ne k} \operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k) \\ &= 5\left(2 + \frac{8}{9}\right) + \frac{80}{263} = \frac{130}{9} + \frac{80}{263} = \frac{3850}{263}.\end{aligned}$$

25.) Legyen $\xi$ és $\eta$ két független valószínűségi változó, amelyek értékeiket a 0 és $n$ közötti egész számok közül veszik fel egyenletes eloszlással, azaz $P(\xi = j) = P(\eta = j) = \frac{1}{n+1}$, $0 \le j \le n$. Számítsuk ki a $\xi + \eta$ valószínűségi változó eloszlását.

*Megoldás:* Világos, hogy a $\xi+\eta$ valószínűségi változó csak $0\le j\le 2n$ alakú egész számokat vesz fel pozitív valószínűséggel. Annak valószínűsége, hogy $j$ értéket vesz fel a $0\le j\le 2n$ esetben $P(\xi+\eta=j)=\sum\limits_{k=0}^{n}P(\xi=k,\eta=j-k)=\sum\limits_{k=0}^{n}P(\xi=k)P(\eta=j-k)$. Az ebben az összegben szereplő tagok közül csak azokat kell figyelembe venni, amelyek nem nullák, tehát amelyek $k$ paraméterére a $0\le k\le n$ feltétel mellett a $0\le j-k\le n$ azaz a $j-n\le k\le j$ feltétel is teljesül. Érdemes külön tekinteni azt az esetet, amikor $0\le j\le n$ és amikor $n<j\le 2n$. Ha $0\le j\le n$, akkor a $P(\xi+\eta=j)$ valószínűséget kifejező összegben $j+1$ nem zéró tag van (azok a tagok, amelyekre $0\le k\le j$), mindegyiknek az értéke $\frac{1}{(n+1)^2}$. Így a keresett valószínűség $P(\xi+\eta=j)=\frac{j+1}{(n+1)^2}$, ha $0\le j\le n$. Ha $n<j\le 2n$, akkor $2n-j+1$ nem zéró tag van a $P(\xi+\eta=j)$ valószínűséget kifejező összegben, (amikor $j-n\le k\le n$) és ezek értékei $\frac{1}{(n+1)^2}$-tel egyenlők. Ezért $P(\xi+\eta=j)=\frac{2n-j+1}{(n+1)^2}$, ha $n<j\le 2n$.

25a.) Legyen $\xi$ és $\eta$ két független valószínűségi változó, amelyek értékeiket a $\frac{k}{n}$, $0\le k\le n$ alakú számokon veszik fel egyenletes eloszlással, azaz $P(\xi=\frac{j}{n})=P(\eta=\frac{j}{n})=\frac{1}{n+1}$, $0\le j\le n$. Számítsuk ki a $\xi+\eta$ összeg eloszlását. Hasonlítsuk össze az eredményt két független, a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlású $\tilde\xi$ és $\tilde\eta$ valószínűségi változó összegének a sűrűségfüggvényével.

*Megoldás:* A keresett eloszlás $P(\xi+\eta=\frac{j}{n})=\frac{j+1}{(n+1)^2}$, ha $0\le j\le n$, $P(\xi+\eta=\frac{j}{n})=\frac{2n-j+1}{(n+1)^2}$, ha $n<j\le 2n$, és $P(\xi+\eta=x)=0$, ha $x$ nem $x=\frac{j}{n}$, $0\le j\le 2n$ alakú szám. A $\tilde\xi+\tilde\eta$ sűrűségfüggvénye $f(x)=x$, ha $0\le x\le 1$, $f(x)=2-x$, ha $1\le x\le 2$, és $f(x)=0$, ha $x<0$ vagy $x>2$. A két eredményt összehasonlítva láthatjuk, hogy a $\xi+\eta$ összeg eloszlását megadó képlet a független, egyenletes eloszlású valószínűségi változók összegének a sűrűségfüggvényét megadó képlet diszkretizáltjának tekinthető.

26.) Legyenek $\xi_1,\dots,\xi_n$ független, a $\left[-\frac12,\frac12\right]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Mutassuk meg, hogy a $\sum\limits_{j=1}^{n}\xi_j$ és $\sum\limits_{j=1}^{n}\xi_j^2$ összegek normalizáltjainak, azaz a $\sqrt{\frac{12}{n}}\sum\limits_{j=1}^{n}\xi_j$ és $\sqrt{\frac{180}{n}}\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\xi_j^2-\frac{1}{12}\right)$ valószínűségi változóknak az együttes eloszlása a két-dimenziós standard normális eloszláshoz konvergál, ha $n\to\infty$.

*Megoldás:* $E\xi=0$, $E\xi^2=\frac{1}{12}$, $\operatorname{Var}\xi=\frac{1}{12}$, $\operatorname{Var}\xi^2=E\xi^4-(E\xi^2)^2=\frac{1}{80}-\frac{1}{144}=\frac{1}{180}$. Továbbá $\operatorname{Cov}(\xi,\xi^2)=E\xi^3-E\xi E\xi^2=0$. Ezért a $\left(\sqrt{12}\xi_j,\sqrt{180}\left(\xi_j^2-\frac{1}{12}\right)\right)$, $j=1,2,\dots$, véletlen vektorok függetlenek, nulla várható értékkel és az identitás kovariancia mátrix-szal. Innen, és a több-dimenziós centrális határeloszlástételből következik a feladat állítása.

27.) Legyen $(\xi,\eta)$ normális eloszlású vektor $m=(m_1,m_2)=(E\xi,E\eta)$ várható értékkel és

$$\begin{pmatrix}\sigma_{1,1}, & \sigma_{1,2}\\ \sigma_{2,1}, & \sigma_{1,1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E\xi^2-(E\xi)^2, & E\xi\eta-E\xi E\eta\\ E\xi\eta-E\xi E\eta, & E\eta^2-(E\eta)^2\end{pmatrix}$$

kovarianciamátrix-szal. Ekkor létezik a $\xi$ valószínűségi változónak $\xi=a\eta+\zeta$

alakú előállítása alkalmas $a$ konstanssal, és az $\eta$ valószínűségi változótól független $\zeta$ normális eloszlású valószínűségi változóval. Ez azt jelenti, hogy ha $(\xi,\eta)$ két-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó, akkor az első koordináta kifejezhető, mint a második kooordináta konstansszorosának és egy a második koordinátától független normális eloszlású valószínűségi változó összege. A kívánt $a$ konstanst explicit módon megadhatjuk az $a=\frac{\sigma_{1,2}}{\sigma_{2,2}}$ képlet segítségével.

Hogy általánosítható a fenti állítás abban az esetben, ha $\xi$ és $\eta$ vektorváltozók is lehetnek?

*Megoldás:* A $\zeta=\xi-\frac{\sigma_{1,2}}{\sigma_{1,1}}\eta$ valószínűségi változó független az $\eta$ valószínűségi változótól. Ehhez a több-dimenziós normális eloszlás tulajdonságai alapján elég azt ellenőrizni, hogy $\mathrm{Cov}\,(\zeta,\eta)=0$. Innen következik a feladat állítása.

Az az eset, amikor $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_s)$, $\eta=(\eta_1,\dots,\eta_p)$, és $(\xi_1,\dots,\xi_s,\eta_1,\dots,\eta_p)$ egy $s+p$ dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó hasonlóan tárgyalható. Be lehet látni, hogy létezik olyan $A$ mátrix, amelyre $\eta$ és $\xi-\eta A$ függetlenek. Ennek érdekében először azt érdemes megmutatni, hogy létezik olyan $U$ unitér mátrix amelyre $\eta U=(\bar\eta_1,\dots,\bar\eta_p)=\bar\eta$ vektor koordinátái függetlenek. Ez abból látható, hogy ha az $\eta$ véletlen vektor $D$ kovarianciamátrixát $D=U^*\Lambda U$ alakban írjuk fel, ahol $U$ unitér $\Lambda$ pedig diagonális mátrix, akkor az $\bar\eta=\eta U$ véletlen normális eloszlású vektor kovarianciamátrixa $\Lambda$, ahonnan következik, hogy az $\bar\eta$ mátrix koordinátái függetlenek. Legyen $\bar\xi_r=\xi_r-\sum\limits_{k=1}^{p}\frac{E\xi_r\bar\eta_k}{E\bar\eta_k^2}\bar\eta_k$, $r=1,\dots,s$. Ezt mátrixjelöléssel $\bar\xi=\xi-\bar\eta B$ formában írhatjuk. Ekkor $(\xi-\bar\eta B,\bar\eta)$ olyan $p+s$ dimenziós, normális eloszlású valószínűségi változó, amelynek első $s$ és utolsó $p$ koordinátája korrelálatlan, ezért független. Mivel a $\xi-\bar\eta B$ és $\bar\eta$ vektorok függetlenek, ezért $\zeta=\xi-\bar\eta B=\xi-\eta UB$ független az $\eta=\bar\eta U^*$ vektortól.

28.) Adjunk példát olyan véletlen vektorra, amely nem normális eloszlású, noha koordinátái normális eloszlásúak. Konkrétabban, mutassuk meg, hogy a következő konstrukció jó példát ad erre.

Definiáljuk a következő $(\Omega,\mathcal{B},P)$ valószínűségi mezőt: $\Omega=[0,1]$, $\mathcal{B}$ a Borel $\sigma$-algebra $[0,1]$-en, és $P$ a Lebesgue mérték. Definiáljuk a következő $\xi$ és $\eta$ valószínűségi változókat ezen a mezőn: $\xi(x)=\Phi^{-1}(x)$,

$$\eta(x)=\begin{cases}\xi(1-x) & \text{ha } 0\le x<\frac12\\ \xi\left(x-\frac12\right) & \text{ha } \frac12\le x\le 1\end{cases}.$$

Az ebben a példában definiált $\xi$ és $\eta$ valószínűségi változók normális eloszlásúak, de a $(\xi,\eta)$ véletlen vektor nem normális eloszlású.

*Megoldás:* A $\xi$ és $\eta$ valószínűségi változók azonos eloszlásúak. Továbbá,

$$P(\xi>x)=\lambda((\Phi(x),1])=1-\Phi(x)\,.$$

Az, hogy a $(\xi,\eta)$ véletlen vektor nem normális eloszlású következik például a $P(\xi+\eta=0)=\frac12$ azonosságból. Ugyanis, ha $(\xi,\eta)$ normális eloszlású lenne, akkor az lenne a $\xi+\eta$ valószínűségi változó is. Ennek viszont ellentmond a $P(\xi+\eta=0)=\frac{1}{2}$ reláció.

29.) Mutassunk példát korrelálatlan, de nem független valószínűségi változókra.

*Megoldás:* Egy lehetséges példa a következő. Legyen $\xi$ egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ intervallumban, Ekkor a $\xi$ és $\eta=\xi^2$ valószínűségi változók korrelálatlanok, de nem függetlenek. Valóban, $E\xi=0$, $E\eta=E\xi^2=\frac{1}{12}$, $E\xi\eta=E\xi^3=0$, $\operatorname{Cov}(\xi,\eta)=E\xi\eta-E\xi E\eta=0$. Másrészt $\xi$ és $\eta$ nem függetlenek, sőt az $\eta$ valószínűségi változó a $\xi$ valószínűségi változó determinisztikus függvénye. Egy lehetséges formális indoklása annak, hogy $\xi$ és $\eta$ nem független a következő: Legyen $0<a<1$ tetszőleges szám. Ekkor $\{\omega\colon\ \eta<a^2\}=\{\omega\colon\ |\xi|<a\}$. Ezért $P(\xi<a,\eta<a^2)=P(\xi<a)$, tehát $P(\xi<a,\eta<a^2)\neq P(\xi<a)P(\eta<a^2)$.

30.) Legyenek $\xi^{(j)}=(\xi_1^{(j)},\dots,\xi_6^{(j)})$ független, $1\le j\le n$, egyforma eloszlású véletlen vektorok $P(\xi_k^{(j)}=1)=\frac{1}{6}$, minden $1\le k\le 6$, $1\le j\le n$ indexre, és $\xi_{k'}^{(j)}=0$, ha $k'\neq k$, és $\xi_k^{(j)}=1$, minden $1\le k,k'\le 6$ indexre. Legyen $S=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{j=1}^{n}\xi_j$ e véletlen vektorok normalizált összege. Ekkor a $\xi^{(j)}$ és $S$ vektorok kovariancia mátrixa az a $D=(d_{i,k})$, $1\le i,k\le 6$, mátrix, amelyre $d_{i,k}=-\frac{1}{36}$, ha $i\neq k$, $d_{k,k}=\frac{5}{36}$. A $D$ mátrix nem invertálható.

*Megoldás:* A $\xi^{(j)}$ vektor $D$ mátrixának elemei $d_{i,k}=E\xi_i^{(j)}\xi_k^{(j)}-E\xi_i^{(j)}E\xi_k^{(j)}=-E\xi_i^{(j)}E\xi_k^{(j)}=-\frac{1}{36}$,ha $i\neq k$, és $d_{k,k}=E\left(\xi_k^{(j)}\right)^2-(E\xi_k^{(j)})^2=\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{5}{36}$. Az $S$ véletlen vektor kovariancia mátrixa ugyanez a $D$ mátrix. A $D$ mátrix nem invertálható, mert a sorösszegei nullával egyenlőek.

31.) Egy szabályos dobókockát és egy szabályos érmét feldobunk 3300 alkalommal egymástól függetlenül. (Az érme és kockadobások eredményei is függetlenek egymástól.) Ha a kockadobás eredménye páros és az érme a fej oldalra esett, akkor annyi forintot nyerünk, amennyi a kockadobás eredménye. Ha az érme az írás oldalra esett vagy a kockadobás eredménye páratlan szám, akkor nem nyerünk, és nem is vesztünk semmit. Mi a valószínűsége annak, hogy az össznyereményünk 3190 és 3520 forint közé esik? Adjunk erre jó közelítő becslést a centrális határeloszlástétel és egy normális eloszlástáblázat segítségével.

*Megoldás:* Vezessük be a következő $\xi_j$, és $\eta_j$ $1\le j\le 3300$, valószínűségi változókat: $\xi_j=2$, ha a $j$-ik kockadobás eredménye 2, $\xi_j=4$, ha a $j$-ik kockadobás eredménye 4, $\xi_j=6$, ha a $j$-ik kockadobás eredménye 6, $\xi_j=0$, ha a $j$-ik kockadobás eredménye 1, 3 vagy 5. Legyen $\eta_j=1$, ha a $j$-ik érmedobás eredménye fej, és $\eta_j=0$, ha a $j$-ik érmedobás írás. Legyen $\zeta_j=\xi_j\eta_j$. Ekkor a $j$-ik dobásnál a nyereményünk $\zeta_j$ lesz, $1\le j\le 3300$, és a $P\left(3190\le\sum\limits_{j=1}^{3300}\zeta_j\le 3520\right)$ valószínűséget kell jól megbecsülnünk. Ennek érdekében számoljuk ki a független $\zeta_j$ valószínűségi változók várható értékét és szórásnégyzetét. $E\zeta_j=E\xi_j\eta_j=E\xi_jE\eta_j=\frac{1}{6}(2+4+6)\cdot\frac{1}{2}=1$, $E\zeta_j^2=E\xi_j^2E\eta_j^2=\frac{1}{6}(4+16+36)\cdot\frac{1}{2}=\frac{14}{3}$, $\operatorname{Var}\zeta_j^2=E\zeta_j^2-(E\zeta_j)^2=\frac{11}{3}$. Innen a centrális határeloszlástétel alapján

$$P\left(3190 \le \sum_{j=1}^{3300} \zeta_j \le 3520\right) = P\left(\frac{-110}{\sqrt{3300\frac{11}{3}}} \le \frac{\sum\limits_{j=1}^{3300} \zeta_j - \sum\limits_{j=1}^{3300} E\zeta_j}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{3300} \operatorname{Var}\xi_j}} \le \frac{220}{\sqrt{3300\frac{11}{3}}}\right)$$
$$\sim \Phi(2) - \Phi(-1) = 0.9772 + 0.8413 - 1 = 0.9285.$$

32.) Egy pénzdarabról ellenőrizni akarjuk, hogy igaz-e az a hipotézis, amely szerint ez az érme legalább $\frac{3}{4}$ valószínűséggel esik a fej és legfeljebb $\frac{1}{4}$ valószínűséggel az írás oldalára. Ennek érdekében feldobjuk a pénzdarabot 30 000 alkalommal, és a következő döntési szabályt hozzuk. Választunk egy $k$ számot, és akkor fogadjuk el a hipotézist helyesnek, ha legalább $k$ fejdobás történt. Legalább mekkorának kell választanunk ezt a $k$ számot, ha azt akarjuk, hogy egy a hipotézist teljesítő pénzdarab esetén legalább 0.9 valószínűséggel döntsünk úgy, hogy a hipotézis teljesül?

*Megoldás:* Vezessük be a következő valószínűségi változókat: $\xi_j = 1$, ha a $j$-ik dobás eredménye fej, $\xi_j = 0$, ha a $j$-ik dobás eredménye írás, $1 \le j \le 30\,000$, $S = S_{30000} = \sum\limits_{j=1}^{30\,000} \xi_j$. Ha a fejdobás eredményének valószínűsége pontosan $\frac{3}{4}$, akkor $E\xi_j = \frac{3}{4}$, $E\xi_j^2 = \frac{3}{4}$, $\operatorname{Var}\xi_j = E\xi_j^2 - (E\xi_j)^2 = \frac{3}{16}$, $ES = 30\,000 E\xi_j = 22\,500$, $\operatorname{Var} S = 30\,000 \operatorname{Var}\xi_j = 5625 = 75^2$. Innen és a centrális határeloszlástételből,

$$P(S > k) = P\left(\frac{S - ES}{\sqrt{\operatorname{Var} S}} > \frac{k - 22\,500}{75}\right) = 1 - P\left(\frac{S - ES}{\sqrt{\operatorname{Var} S}} \le \frac{k - 22\,500}{75}\right)$$
$$\sim 1 - \Phi\left(\frac{k - 22\,500}{75}\right).$$

Válasszuk a $k$ számot úgy, hogy a fenti valószínűség körülbelül 0.9 legyen. Ekkor a $\Phi\left(\frac{k-22\,500}{75}\right) = 0.1$ vagy ami ezzel ekvivalens, a $\Phi\left(\frac{22\,500-k}{75}\right) = 0.9$ egyenletet kell kielégítenünk. A normális eloszlás-táblázat alapján $\frac{22\,500-k}{75} \sim 1.28$, ami azt jelenti, hogy $k = 22\,500 - 75 \cdot 1.28$ és $p = \frac{3}{4}$ esetén annak valószínűsége, hogy a fejdobások száma nagyobb mint $k = 22\,500 - 75 \cdot 1.28 = 22\,212$ és $p = \frac{3}{4}$ esetében annak valószínűsége, hogy legalább ennyi fejdobás történik körülbelül 0.9. Ha $p \ge \frac{3}{4}$, akkor ez a valószínűség nagyobb. Ezért a $k = 22\,212$ helyes választás.

33.) Legyen két urna, mind a kettőben 10 piros és 10 fehér golyó. Egymás után kihúzunk nyolc golyót mind a két urnából, az elsőből visszatevés nélkül, a másodikból visszatevéssel. Ha a $j$-ik húzásnál a két urnából kihúzott golyó egyforma színű, akkor két forintot nyerünk, ha különböző színűek, akkor egy forintot veszítünk, $1 \le j \le 8$. Számítsuk ki nyereményünk várható értékét és szórásnégyzetét.

*Megoldás:* Vezessük be a következő $\xi_j$, $1 \le j \le 8$ valószínűségi változókat: $\xi_j = 2$, ha a $j$-ik húzásnál mind két urnából piros vagy mind a két urnából fehér golyót húzunk, és $\xi_j = -1$, ha az egyik urnából fehér és a másik urnából piros golyót húzunk. Akkor a minket érdeklő mennyiségek a $S = \sum_{j=1}^{8} \xi_j$ valószínűségi változó várható értéke és szórásnégyzete. Ennek kiszámítása érdekében számítsuk ki az $E\xi_j$, $\operatorname{Var}\xi_j$ és $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k)$ mennyiségeket. Vegyük észre, hogy $P(\xi_j = -1) = P(\xi_1 = -1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, mert kifejezve külön annak a valószínűségét, hogy (fehér, piros) vagy (piros, fehér) húzás történik. Hasonlóan $P(\xi_j = 2) = \frac{1}{2}$. Ezért $E\xi_j = 2\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $E\xi_j^2 = \frac{1}{2}(4+1) = \frac{5}{2}$, $\operatorname{Var}\xi = \frac{9}{4}$.

Hasonlóan, $P(\xi_j = 2, \xi_k = 2) = P(\xi_1 = 2, \xi_2 = 2) = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}\frac{9}{19} + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{19} = \frac{1}{4}$, $P(\xi_j = 2, \xi_k = -1) = P(\xi_1 = 2, \xi_2 = -1) = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{10}{19} + \frac{9}{19}\right) = \frac{1}{4}$, $P(\xi_j = -1, \xi_k = -1) = P(\xi_1 = -1, \xi_2 = -1) = \frac{1}{4}$ (itt felsoroltuk, hogy például a $\xi_1 = 2, \xi_2 = 2$ azt jelenti, hogy az ((F,F),(P,P)), ((F,F),(P,P)), ((P,P),(F,F)) vagy ((P,P),(P,P)) húzássorozatok valamelyike következik be. Ezért $E\xi_j\xi_k = \frac{1}{4}(1+4-4) = \frac{1}{4}$, és $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k) = E\xi_j\xi_k - E\xi_j E\xi_k = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$. Innen következik, hogy a $\xi_j$ valószínűségi változók korrelálatlanok, és $ES = 8E\xi_1 = 2$, $\operatorname{Var} S = 8\operatorname{Var}\xi_1 = 18$.

34.) Legyen az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező az $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ egységnégyzet, rajta a szokásos $\mathcal{A}$ Borel $\sigma$-algebrával, és legyen $P = \lambda$, a Lebesgue mérték az egységnégyzet Borel-mérhető részhalmazain. Legyen $\mathcal{F}$ az $A \times [0,1]$, $A \in \mathcal{B}_1$ alakú halmazokból álló $\sigma$-algebra, ahol $\mathcal{B}_1$ a $[0,1]$ intervallumon generált $\sigma$-algebrát jelöli. Tekintsünk egy tetszőleges (mérhető és integrálható) $f(x,y)$ függvényt az egységnégyzeten (az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn), és számoljuk ki az $E(f(x,y)|\mathcal{F})$ feltételes várható értéket az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn.

*Megoldás.* Ha az $f(x,y)$ függvény valóban függ mind a két változójától, akkor nem $\mathcal{F}$ mérhető függvény. Viszont definiáljuk a $g_0(x) = \int_0^1 f(x,y)\,dy$ és $g(x,y) = g_0(x)$ függvényeket. (A $g(x,y)$ függvény valójában nem függ az $y$ koordinától, viszont tekinthető egy az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn definiált valószínűségi változónak, és mivel nem függ az $y$ koordinától (és Borel mérhető), ezért $\mathcal{F}$ mérhető. Azt állítom, hogy $E(f(x,y)|\mathcal{F}) = g(x,y)$. Ehhez azt kell ellenőrizni, hogy

$$\int_{A\times[0,1]} g(x,y)\,dx\,dy = \int_{A\times[0,1]} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Viszont

$$\int_{A\times[0,1]} g(x,y)\,dx\,dy = \int_A g_0(x)\,dx = \int_A \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right)\,dx$$
$$= \int_{A\times[0,1]} f(x,y)\,dx\,dy,$$

amint állítottuk.

35.) Legyen az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező az $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ egységnégyzet, rajta a szokásos $\mathcal{A}$ Borel $\sigma$-algebrával. Rögzítsünk egy olyan $h(x,y)$ függvényt az egységnégyzeten, amelyre $h(x,y) \geq 0$ minden $(x,y)$ pontban, $\int_0^1\int_0^1 h(x,y)\,dx\,dy = 1$, és legyen a $P$ mérték az egységnégyzeten a Lebesgue mérték szerint $h(x,y)$

sűrűségfüggvénnyel rendelkező mérték, azaz legyen $P(B) = \int_B h(x,y)\,dx\,dy$ az egységnégyzet minden Borel-mérhető $B$ részhalmazán. Legyen $\mathcal{F}$ az $A\times[0,1]$ alakú halmazokból álló $\sigma$-algebra, ahol $A \in \mathcal{B}_1$, és $\mathcal{B}_1$ a $[0,1]$ intervallumon generált $\sigma$-algebrát jelöli. Tekintsünk egy tetszőleges (mérhető és a $P$ mérték szerint integrálható) $f(x,y)$ függvényt az egységnégyzeten, és számoljuk ki az $E(f(x,y)|\mathcal{F})$ feltételes várható értéket az $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mezőn.

*Megoldás.* A keresett feltételes várható érték a következő: Definiáljuk a

$$g_0(x) = \int_0^1 f(x,y)\frac{h(x,y)}{\int_0^1 h(x,y)\,dy}\,dy = \frac{\int_0^1 f(x,y)h(x,y)\,dy}{\int_0^1 h(x,y)\,dy}$$

és $g(x,y) = g_0(x)$ függvényeket. Azt állítom, hogy a $g(x,y)$ függvény a keresett feltételes várható érték. Ez a függvény nem függ az $y$ koordinától, így $\mathcal{F}$ mérhető. Azt állítom, hogy $E(f(x,y)|\mathcal{F}) = g(x,y)$. Azt kell ellenőrizni, hogy

$$\int_{A\times[0,1]} g(x,y)h(x,y)\,dx\,dy = \int_{A\times[0,1]} f(x,y)h(x,y)\,dx\,dy$$

minden mérhető $A \subset [0,1]$ halmazra. Viszont

$$\begin{aligned}\int_{A\times[0,1]} g(x,y)h(x,y)\,dx\,dy &= \int_A \left(\int_0^1 h(x,y)\,dy\right) g_0(x)\,dx\\ &= \int_A \left(\int_0^1 f(x,y)h(x,y)\,dy\right)\,dx = \int_{A\times[0,1]} f(x,y)h(x,y)\,dx\,dy,\end{aligned}$$

amint állítottam. A kapott eredmény megfelel szemléletes képünknek, amely szerint rögzített $x_0$ számra az $E(f(x,y)|x=x_0)$ feltételes várható értéket úgy számolhatjuk ki, hogy az $f(x_0,y)$ függvényt kiintegráljuk az $y$ változó szerint, de nem a $h(x_0,y)$ sűrűségfüggvény, hanem ennek normalizáltja a $\frac{h(x_0,y)}{\int_0^1 h(x_0,y)\,dy}$ sűrűségfüggvény szerint.

36.) Legyen $(\xi,\eta)$ egy két-dimenziós normális eloszlású véletlen vektor. Számítsuk ki az $E(\xi|\eta)$ feltételes várható értéket.

*Megoldás:* Láttuk, (lásd a többváltozós centális határeloszlástétel előadás eredményeit) hogy $\xi = a\eta + \zeta$ alakban írható, ahol az $a$ konstans alkalmas választásával (nevezetesen az $a = \frac{\operatorname{Cov}(\xi,\eta)}{\operatorname{Var}\eta}$ választással) elérhető, hogy a $\zeta = \xi - a\eta$ és $\eta$ valószínűségi változók függetlenek legyenek. Ezzel az $a$ választással

$$\begin{aligned}E(\xi|\eta) &= E((a\eta+\zeta)|\eta) = aE(\eta|\eta) + E(\zeta|\eta) = a\eta + E\zeta = a(\eta - E\eta) + E\xi\\ &= \frac{\operatorname{Cov}(\xi,\eta)}{\operatorname{Var}\eta}(\eta - E\eta) + E\xi\end{aligned}$$

a várható értéknek az előadásban a feltételes várható érték tulajdonságait felsoroló tételben szereplő 1., 5. és 6. tulajdonságok alapján.

37.) Legyen $\xi$ standard normális eloszlású valószínűségi változó, azaz legyen a sűrűségfüggvénye $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, $-\infty < x < \infty$. Számoljuk ki a $\xi$ valószínűségi változó $E\xi^k$ $k$-ik momentumát minden $k = 0, 1, 2, \ldots$, nem negatív egész számra.
*Megoldás:* $E\xi^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \varphi(x)\,dx$ minden $k = 0, 1, 2, \ldots$ számra. Mivel páratlan $\bar{k} = 2k+1$ számokra a fenti integrál $x^{2k+1}\varphi(x)$ magfüggvénye páratlan, innen adódik, hogy $E\xi^{2k+1} = 0$. Páros indexekre a következő számolást végezhetjük el parciális integrálás segítségével.

$$\begin{aligned}
E\xi^{2k} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k}\varphi(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k-1} x e^{-x^2/2}\,dx \\
&= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k-1} \frac{d}{dx}\left(e^{-x^2/2}\right) dx \\
&= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \left[x^{2k-1} e^{-x^2/2}\right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (2k-1) x^{2k-2} e^{-x^2/2}\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (2k-1) x^{2k-2} e^{-x^2/2} = (2k-1) E\xi^{2k-2}\,dx.
\end{aligned}$$

Mivel $E\xi^0 = 1$ a fenti azonosságból kapjuk, hogy $E\xi^2 = 1$, $E\xi^4 = 3E\xi^2 = 3$, $E\xi^6 = 5E\xi^4 = 5 \cdot 3$, és teljes indukcióval $E\xi^{2k} = (2k-1)\cdot(2k-3)\cdot(2k-5)\cdots 3 \cdot 1$.

38.) Tegyük fel, hogy a következő játékot játszhatjuk: Feldobnak egy szabályos pénzdarabot egymástól függetlenül egymás után. Amennyiben fej a dobás eredménye, akkor a feltett tét dupláját kapjuk, ha írás, akkor a tét $\frac{2}{3}$ részét elveszítjük, és csak $\frac{1}{3}$ részét őrizhetjük meg. Mivel ez a játék előnyös, ezért feltesszük minden játékban minden pénzünket. Lássuk be, hogy amennyiben $A$ volt a vagyonunk a játék kezdete előtt, és $Z_n$ jelöli vagyonunkat az $n$-ik játék után, akkor

a) $EZ_n = A\left(\frac{7}{6}\right)^n$, azaz vagyonunk várható értéke exponenciálisan nő.

b) $Z_n$ egy valószínűséggel nullához tart, azaz ha sokáig játszunk, akkor közel egy valószínűséggel majdnem minden pénzünket elveszítjük.

c) Értsük meg, hogy ez a két állítás nem mond egymásnak ellent.

*Megoldás:* Vezessük be a következő $\xi_j$ valószínűségi változókat: $\xi_j = 2$, ha a $j$-ik dobás eredménye fej, $\xi_j = \frac{1}{3}$, ha a $j$-ik dobás eredménye írás. Ekkor $\xi_1, \xi_2, \ldots$, független valószínűségi változók, $P(\xi_j = 2) = P\left(\xi_j = \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$, és ezenkívül nyereményünk az $n$-ik játék után $Z_n = A\xi_1\xi_2\cdots\xi_n$. Ezért $E\xi_j = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{6}$, és $EZ_n = EA\xi_1\xi_2\cdots\xi_n = AE\xi_1 E\xi_2 \cdots E\xi_n = A\left(\frac{7}{6}\right)^n$. Ez a feladat a) állítása.

A $Z_n = A\xi_1\xi_2\cdots\xi_n$ relációból következik, hogy $\frac{1}{n}\log Z_n = \frac{\log A}{n} + \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\log\xi_j$. Továbbá, $E\log\xi_j = \frac{1}{2}\left(\log 2 + \log\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{2}\log\frac{3}{2}$. Ezért a nagy számok (erős) törvénye szerint $\frac{1}{n}\log Z_n$ egy valószínűséggel konvergál a negatív $-\frac{1}{2}\log\frac{3}{2}$ számhoz. Innen következik, hogy 1 valószínűséggel $\lim\limits_{n\to\infty}\log Z_n = -\infty$, és ezért $\lim\limits_{n\to\infty} Z_n = 0$.

Az a) rész bizonyítása azon alapult, hogy $E\xi_j > 1$, a b) részé pedig azon, hogy $E\log\xi_j < 0$. Ez a két egyenlőtlenség teljesülhet egyszerre, mert a várható érték és a logaritmusképzés egymással nem felcserélhető. Igaz az $Ee^{\eta} \ge e^{E\eta}$ egyenlőtlenség (ez a konvex függvényekre vonatkozó úgynevezett Jensen egyenlőtlenség speciális esete), ahonnan $\xi = \log \eta$ választással $E\xi \ge e^{\log E\xi}$, de egyenlőség nem írható a fenti egyenlőtlenség helyett. Megjegyzem, hogy hasonló, de egyszerűbben érthető példát mutat a feladat a) és b) állításának egyszerre való teljesülésére a következő modell. Olyan játékot játszunk, amelyben $\frac{1}{2}$ valószínűséggel elveszítjük, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel pedig megháromszorozzuk a pénzünket. Az egyes játékok egymástól függetlenek, és minden időpontban minden pénzünket feltesszük. Ekkor annak a valószínűsége, hogy az $n$-ik játék után minden pénzünket elveszítjük, $1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$, ami rendkívül gyorsan tart egyhez, és pénzünk várható értéke $3^n\left(\frac{1}{2}\right)^n$, ami exponenciálisan gyorsan nő az $n$ függvényében. Hasonló, csak kissé rejtettebb jelenség történik az általunk tárgyalt feladatban is. Tekintsük a feladatban vizsgált játék nyereményét sok játék után. Azt állíthatjuk, hogy nagy $n$ indexre az $n$-ik játék után nagy valószínűséggel alig marad pénzünk. Viszont kis valószínűséggel nagyon sok pénzt nyerünk, és ezért nyereményünk várható értéke nagy. Ez az oka annak, hogy nemcsak a b), hanem az a) állítás is teljesül.

A feladatban tárgyalt modell egyben olyan példát is ad, amelyben a Lebesgue tétel állítása nem érvényes, mert nem teljesülnek a Lebesgue tétel feltételei. Ebben a modellben a nyereményünk értéke 1 valószínűséggel nullához tart, a várható értéke (azaz a nyeremény értékének a $P$ valószínűségi mérték szerinti integrálja) viszont nem a határérték integráljához, azaz nullához, hanem végtelenhez konvergál.

39. Tekintsük a 38. feladatban tárgyalt játékot, azzal a különbséggel, hogy óvatosabban játszunk. A játék minden egyes fordulójában vagyonunk $u$-ad részét, $0 \le u \le 1$, tesszük fel tétként. Jelölje $Z_n(u)$ vagyonunkat a játék $n$-ik lépése után. Ekkor az $\frac{1}{n}\log Z_n(u)$ valószínűségi változók egy valószínűséggel konvergálnak egy $B(u)$ számhoz. Határozzuk meg a legjobb $\bar u$ számot, amelyre $B(\bar u) = \sup\limits_{0\le u\le 1} B(u)$. Lássuk be, hogy $B(\bar u) > 0$, ami azt jelenti, hogy nyereményünk exponenciálisan nő 1 valószínűséggel.

*Megoldás:* Vezessük be a $\xi_j = \xi_j(u)$, $j = 1, 2, \dots$, valószínűségi változókat, amelyekre $\xi_j = 1 + u$, ha a $j$-ik dobás eredménye fej, és $\xi_j = \xi_j(u) = 1 - \frac{2u}{3}$, ha a $j$-ik dobás eredménye írás. Ekkor az $n$-ik lépésben a vagyonunk $Z_n = A\xi_1 \cdots \xi_n$, a $\xi_j$, $j = 1, 2, \dots$, valószínűségi változók függetlenek és egyforma eloszlásúak, ezért $\frac{1}{n}\log Z_n = \frac{\log A}{n} + \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\log \xi_j$, és a nagy számok erős törvénye szerint az $\frac{1}{n}\log Z_n$ valószínűségi változók 1 valószínűséggel konvergálnak a $B(u) = E\log\xi_1 = \frac{1}{2}\left(\log(1+u) + \log\left(1-\frac{2u}{3}\right)\right) = \frac{1}{2}\log(1+u)\left(1-\frac{2u}{3}\right)$ számhoz. A $B(u)$ függvény a maximumát az $\bar u = \frac{1}{4}$ helyen veszi fel, és $B(\bar u) = \frac{1}{2}\log\frac{25}{24} > 0$.

40.) Legyen $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ $n$-változós normális eloszlású véletlen vektor, és $1 \le k \le n$ egész szám. Ekkor $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ $k$-változós normális eloszlású véletlen vektor. Általánosabban, legyen $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ $n$-változós normális eloszlású véletlen vektor, és $A$ $k \times n$ (véletlentől nem függő) téglalap mátrix. Ekkor $(\eta_1, \dots, \eta_k) = (\xi_1, \dots, \xi_n)A$ $k$-dimenziós normális eloszlású véletlen vektor. Ez az állítás nemcsak a $k = n$, hanem a $k < n$ és $k > n$ esetekben is igaz.

*Megoldás.* A feladat első állítása azonnal látható a karakterisztikus függvények módszerével, ha felírjuk mind a $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ mind a $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ véletlen vektor karakterisztikus függvényét. De lássunk ehelyett egy elemi, a lineáris algebra módszerein alapuló indoklást.

Az egyszerű jelölés érdekében tekintsük először csak azt az esetet, ha $\xi_1, \dots, \xi_n$ nulla várható értékű vektor. Ekkor felírhatjuk a $(\xi_1, \dots, \xi_n) = (\eta_1, \dots, \eta_n)A$ összefüggést, ahol $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ standard normális véletlen vektor, és $A$ $n \times n$-es mátrix. Vezessük be az $\eta = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j \eta_j$, alakú véletlen vektorokból álló $n$-dimenziós Euklideszi teret az $(\eta, \bar\eta) = E\eta\bar\eta$ skalárszorzattal. Tekintsük e térnek az $\xi_1, \dots \xi_k$ vektorok által kifeszített alterét, abban egy ortonormált $(\bar\eta_1, \dots, \bar\eta_k)$ ortonormált bázist, és azt egészítsük ki egy ortonormált $(\bar\eta_1, \dots, \bar\eta_n)$ bázissá az egész térben. Ekkor $(\bar\eta_1, \dots, \bar\eta_n)$ $n$-változós, $(\bar\eta_1, \dots, \bar\eta_k)$ pedig $k$-változós standard normális eloszlású véletlen vektor. Mivel a $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ véletlen vektor előállítható, mint $(\bar\eta_1, \dots, \bar\eta_k)$ $k$-változós standard normális eloszlású véletlen vektor lineáris transzformáltja, ezért ez a vektor is normális eloszlású. Az általános esetben, ha a $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ vektor várható értéke nem feltétlenül nulla, alkalmazhatjuk a már bebizonyított állítást a $(\xi_1 - E\xi_1, \dots, \xi_n - E\xi_n)$ vektorra. Innen könnyen látható, hogy $(\xi_1 - E\xi_1, \dots, \xi_k - E\xi_k)$, és ezért $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ is normális eloszlású.

A feladat második állítását először abban az esetben lássuk be, ha $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ standard normális eloszlású vektor. Ha $k < n$, akkor kiegészítve az $A$ mátrixot nullák hozzáírásával egy $n \times n$-es mátrix-szá, kapjuk, hogy $(\eta_1, \dots, \eta_k, 0, \dots, 0)$ $n$-változós normális eloszlású véletlen vektor. Ezért az előbb bizonyítottak alapján $(\eta_1, \dots, \eta_k)$ $k$-változós normális eloszlású véletlen vektor. Ha $k = n$, akkor nincs mit bizonyítani. Ha $k > n$, akkor egészítsük ki nullák hozzáírásával az $A$ mátrixot egy $k \times k$-as $\bar A$ mátrix-szá, és vezessünk be a $\xi_1, \dots, \xi_n$ vektortól független $\xi_{n+1}, \dots, \xi_k$ független, standard normális eloszlású valószínűségi változókat. Ekkor

$$(\eta_1, \dots, \eta_k) = (\xi_1, \dots, \xi_k)\bar A$$

$k$-dimenziós normális eloszlású véletlen vektor.

Az általános esetben felírhatjuk, hogy $(\eta_1, \dots, \eta_n) = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)B + (m_1, \dots, m_n)$, ahol $(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ $n$-változós standard normális vektor, $B$ $n \times n$ méretű mátrix, $(m_1, \dots, m_n)$ $n$-dimenziós (determinisztikus) vektor. Ezért

$$(\xi_1, \dots, \xi_k) = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)BA + (m_1, \dots, m_n)A$$

a már bizonyított eredmények alapján szintén normális eloszlású véletlen vektor.

41.) Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ független normális eloszlású valószínűségi változók $m$ várható értékkel és $\sigma^2$ szórással. Ekkor a $\bar\xi = \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j$ és az $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} (\xi_j - \bar\xi)^2$ valószínűségi változók függetlenek egymástól. Továbbá $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar\xi - m)$ standard normális eloszlású, $\frac{1}{\sigma} S_n$ pedig $n-1$ szabadságfokú $\chi^2$ eloszlású valószínűségi változó. (Ez az eredmény magyarázza meg, hogy bizonyos statisztikai feladatokban miért jelenik meg az $U$-eloszlás, ami egy egymástól független standard normális és egy $\chi^2$ eloszlású valószínűségi változó hányadosának az eloszlása.)

*Megoldás.* Tekintsük a $(\bar\xi,\xi_1-\bar\xi,\dots,\xi_n-\bar\xi)$ véletlen vektort. Ez a 40. feladat eredménye alapján egy $n+1$ dimenziós normális eloszlású véletlen vektor. Továbbá egyszerű számolás mutatja, hogy $\mathrm{Cov}\,(\bar\xi,\xi_j-\bar\xi)=\mathrm{Cov}\,(\bar\xi,\xi_j)-\mathrm{Var}\,\bar\xi=0$ minden $1\le j\le n$ indexre. Ezért a $(\bar\xi,\xi_1-\bar\xi,\dots,\xi_n-\bar\xi)$ véletlen vektor $D=(d_{i,j})$, $1\le i,j\le n+1$, covariancia mátrixa felbomlik egy $1\times 1$-es és $n\times n$-es mátrix direkt szorzatára, azaz $d_{1,j}=d_{j,1}=0$, $2\le j\le n+1$. Ezért a normális eloszlású vektorok tulajdonságaiból, (abból, hogy egy normális eloszlású véletlen vektor eloszlását meghatározza a véletlen vektor kovariancia mátrixa és várható érték vektora) következik, hogy $\bar\xi$ és $(\xi_1-\bar\xi,\dots,\xi_n-\bar\xi)$ függetlenek, továbbá normális eloszlásúak. Ezért a $\bar\xi$ és az $S_n=\sum\limits_{j=1}(\xi_j-\bar\xi)^2$ valószínűségi változók függetlenek egymástól. Továbbá, mivel $E\bar\xi=m$, $\mathrm{Var}\,\bar\xi=\frac{\sigma^2}{n}$, ezért $\frac{\sqrt n}{\sigma}(\bar\xi-m)$ standard normális eloszlású valószínűségi változó. A $\frac{1}{\sigma}S_n$ valószínűségi változó felírható, mint $n$ (együttesen) normális eloszlású valószínűségi változó négyzetösszege. De ezek a valószínűségi változók nem függetlenek. Teljesül a $\sum\limits_{j=1}^n(\xi_j-\bar\xi)=0$ azonosság.
Belátjuk, hogy $S_n$ $\chi^2$ eloszlású valószínűségi változó $n-1$ szabadságfokkal. Az indoklásban felhasználjuk azt a normális véletlen vektorokról szóló előadásban szereplő (a $\chi^2$-próba vizsgálatában bizonyított) eredményt, amely szerint, ha $(\eta_1,\dots,\eta_n)$ normális eloszlású véletlen vektor nulla várható értékkel és $D$ kovariancia mátrixszal akkor $\sum\limits_{j=1}^n\eta_j^2$ eloszlása megegyezik a $\sum\limits_{j=1}^n\lambda_j\zeta_j^2$ valószínűségi változó eloszlásával, ahol $\zeta_1,\dots,\zeta_n$ független, standard normális eloszlású valószínűségi változók, és $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ a $D$ kovariancia mátrix sajátértékei.
Ezért a feladat megoldásához elég belátni, hogy a $\frac{1}{\sigma}(\xi_1-\bar\xi,\dots,\xi_n-\bar\xi)$ véletlen vektor $D=(d_{i,j})$, $1\le i,j\le n$, kovariancia mátrixának az 1 szám $n-1$ multiplicitású sajátértéke, és ezenkívül még a nulla (egyszeres) sajátértéke ennek a mátrixnak. A $D$ mátrix elemei $d_{i,i}=1-\frac1n$, $d_{i,j}=-\frac1n$, $1\le i,j\le n$. Ezért $D=I-A$, ahol $I$ az identitás mátrix, $A=(a_{i,j})$, $a_{i,j}=\frac1n$, $1\le i,j\le n$, mátrix. Az $A$ mátrixnak 1 darab 1 sajátértékű sajátvektora van, (az $(\frac1n,\dots,\frac1n)$ vektor), és $n-1$ nulla sajátértékű vektora. (Az $(\frac1n,\dots,\frac1n)$ vektort kiegészítjük tetszőleges módon egy ortonormált bázissá, és ilyen módon az $R^n$ tér egy az $A$ mátrix sajátvektoraiból álló bázisát kapjuk, és e sajátvektorok sajátértékei a $\lambda_1=1$, és $\lambda_j=0$, $2\le j\le n$.) Innen következik, hogy a $D$ mátrix sajátértékei az $1-\lambda_j$ számok, $1\le j\le n$, azaz 1 darab 0 és $n-1$ darab 1-es.