

## Diszkrét idejű Markov-láncok vizsgálata.

Tekintsünk egy diszkrét idejű  $X_0, X_1, \dots$  Markov-láncot  $P(j, k) = P(X_{n+1} = E_k | X_n = j)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , átmenetvalószínűségekkel egy  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  valószínűségi mezőn, amely bizonyos  $E_1, E_2, \dots$  értékeket vesz fel. Elsősorban a következő kérdésekre vagyunk kíváncsiak.

- Milyen  $P(j, k)$  átmenetvalószínűségek esetében mondhatjuk azt, hogy a Markov-lánc az  $E_j$  állapotból kiindulva 1 valószínűséggel (végtelen sokszor) visszatér az  $E_j$  állapotba? (Mint látni fogjuk, ha a Markov-lánc 1 valószínűséggel visszatér az  $E_j$  állapotba, akkor az is igaz, hogy 1 valószínűséggel végtelen sokszor visszatér oda.)
- Tekintsük egy  $X_0, X_1, \dots$  Markov-lánc  $E_j$  állapotát, és a  $P(n, j, j) = P(X_n = E_j | X_0 = E_j)$   $n$ -lépéses átmenetvalószínűségeket. Létezik-e a  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n, j, j)$  határérték? Ha létezik meg tudjuk-e adni ezt a határértéket viszonylag egyszerű módon? Léteznek-e és jellemezhetőek-e a  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n, j, k) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = E_k | X_0 = E_j)$  határértékek?
- Mondhatjuk-e, hogy amennyiben  $E_j$  és  $E_k$  két olyan állapot, amelyekre teljesül az a tulajdonság, hogy a Markov-lánc pozitív valószínűséggel jut el az az  $E_j$  állapotból az  $E_k$  állapotba, illetve az  $E_k$  állapotból az  $E_j$  állapotba (alkalmas számú lépésben) akkor a Markov-láncot az  $E_j$  illetve  $E_k$  állapotból elindítva egyszerre igaz vagy nem igaz az, hogy a Markov-lánc végtelen sokszor visszatér illetve csak véges sok alkalmommal tér vissza oda; egyszerre léteznek vagy nem léteznek pozitív  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n, j, j) > 0$  és  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n, k, k) > 0$  határértékek? Általánosabban, fel tudjuk-e osztani a Markov-lánc állapotterét annak alapján, hogy mely állapotból mely állapotba lehet eljutni pozitív valószínűséggel természetes módon osztályokra úgy, hogy az egy osztályban levő elemeknek sok fontos hasonló tulajdonsága van?

E kérdések tárgyalása előtt érdemes bevezetni néhány fogalmat és mennyiséget.

**Markov-lánc rekurrens és tranziens állapotának fogalma.** Legyen  $X_0, X_1, \dots$  egy Markov-lánc egy  $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots\}$  állapottéren. Azt mondjuk, hogy a Markov-lánc  $E_j$  állapota rekurrens, ha a Markov-láncot az  $E_j$  állapotból indítva, azaz ha  $P(X_0 = E_j) = 1$ , a Markov-lánc 1 valószínűséggel visszatér valamikor az  $E_j$  állapotba. Ez azt jelenti, hogy

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega: X_n(\omega) = E_j\}\right) = 1.$$

A Markov-lánc  $E_j$  állapota tranziens, ha a Markov-láncot az  $E_j$  állapotból indítva, az 1-nél kisebb valószínűséggel tér vissza valamikor az  $E_j$  állapotba, azaz

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega: X_n(\omega) = E_j\}\right) < 1.$$

**Markov-lánc egy állapotának a periódusa.** Legyen  $X_0, X_1, \dots$  egy Markov-lánc egy  $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots\}$ , állapottéren, és jelölje  $P(n, j, k) = P(X_n = E_k | X_0 = E_j)$ , az  $n$ -lépéses átmenetvalószínűségeket. Vezessük be az  $\mathcal{A}(j) = \{n: P(n, j, j) > 0\}$ , halmazokat, azaz azon  $n$  indexek halmazát, amelyekre a  $P(n, j, j)$  átmenetvalószínűség szigorúan pozitív. Azt mondjuk, hogy a Markov-lánc  $E_j$  állapotának periódusa  $l$ , ha az  $\mathcal{A}(j)$  halmazban szereplő számok legnagyobb közös osztója  $l$ . Ha ez a legnagyobb közös osztó  $1$ , akkor a Markov-lánc  $E_j$  állapotát aperiódikusnak nevezzük. (Ha a  $\mathcal{A}(j)$  halmaz üres, azaz a Markov-lánc  $1$  valószínűséggel soha nem tér vissza az  $E_j$  állapotba, akkor nem definiáljuk az  $E_j$  halmaz periódusát.)

(Egyszerű) feladat. Egy a  $d$ -dimenziós tér egész koordinátájú pontjaiból álló rácson történő bolyongás periódusa  $2$ .

Legyen  $X_0, X_1, \dots$  Markov-lánc egy  $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots\}$ , állapottéren, és jelölje  $P(n, j, k) = P(X_n = E_k | X_0 = E_j)$ , az  $n$ -lépéses átmenetvalószínűségeket. Vezessük be az alábbi mennyiségeket:

$$f_j(n) = P(X_n = E_j, X_m \neq E_j, \text{ ha } 1 \leq m < n | X_0 = E_j), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

azaz  $f_j(n)$  annak a valószínűsége, hogy az  $E_j$  állapotból indított Markov-lánc  $n$  lépés múlva tér vissza először az  $E_j$  állapotba. Nyilván az  $E_j$  állapot akkor és csak akkor rekurrens, ha  $\sum_{n=1}^{\infty} f_j(n) = 1$ . Ha az  $E_j$  állapot rekurrens, akkor vezessük be a

$$\mu_j = \sum_{n=1}^{\infty} n f_j(n) \quad (2)$$

mennyiségeket is. A  $\mu_j$  mennyiség egyenlő az  $E_j$  állapotba való első visszatérés idejének a várható értékével. Mint majd látni fogjuk, a  $\mu_j$  mennyiség szoros kapcsolatban van a (létező)  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n, j, j)$  határértékkel.

Vezessük be a

$$P_j(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n, j, j) x^n, \quad F_j(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_j(n) x^n \quad (3)$$

hatványsorokat, ahol  $P(0, j, j) = 1$ ,  $f_j(0) = 0$  definíció szerint. Ezek a hatványsorok konvergálnak  $|x| < 1$  esetében. Vegyük észre, hogy  $P(n, j, j) = f_j(n)P(0, j, j) + f_j(n-1)P(1, j, j) + f_j(n-2)P(2, j, j) + \dots + f_j(1)P(n-1, j, j)$  minden  $n = 1, 2, \dots$  számra. Innen, illetve a  $P(0, j, j) = 1$  relációból következik, hogy

$$F_j(x)P_j(x) = P_j(x) - 1. \quad (4)$$

A (4) azonosság segítségével be fogjuk látni a következő tételt.

**Tétel Markov-lánccok rekurrens és tranzien állapotainak jellemzéséről.** Legyen  $X_0, X_1, \dots$ , Markov-lánc,  $E_1, E_2, \dots$  állapotokkal, és jelölje  $P(n, j, k) = P(X_n = E_k | X_0 = E_j)$ .

$E_k|X_0 = E_j$ ) a Markov-lánc átmenetvalószínűségeit. A Markov-lánc  $E_j$  állapota rekurrens, ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(n, j, j) = \infty,$$

tranziens, ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(n, j, j) < \infty.$$

Ha az  $E_j$  állapot rekurrens, akkor a Markov-lánc 1 valószínűséggel végtelen sokszor tér vissza az  $E_j$  állapotba. Ha az  $E_j$  állapot tranziens, akkor a Markov-lánc 1 valószínűséggel csak véges sokszor tér vissza az  $E_j$  állapotba.

A tétel utolsó állítása a következőt mondja. Ha egy az  $E_j$  állapotból induló Markov-lánc 1 valószínűséggel tér vissza az  $E_j$  állapotba, akkor 1 valószínűséggel végtelen sokszor tér vissza az  $E_j$  állapotba. Míg abban az esetben, ha a visszatérés valószínűsége szigorúan kisebb, mint egy, akkor nulla annak a valószínűsége, hogy a Markov-lánc végtelen sokszor tér vissza az  $E_j$  állapotba.

*Bizonyítás:* A (4) reláció, illetve annak a ténynek az alapján, hogy  $F_j(x)$  és  $P_j(x)$  nem-negatív együtthatós hatványsorok, kapjuk, hogy minden  $N \geq 1$  számra

$$\sum_{n=1}^N f_j(n) \leq \lim_{x \rightarrow 1} F_j(x) = 1 - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{P_j(x)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} f_j(n).$$

Ha  $\sum_{n=1}^{\infty} P(n, j, j) = K < \infty$ , akkor  $\sum_{n=1}^N f_j(n) \leq 1 - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{P_j(x)} \leq 1 - \frac{1}{K}$  minden  $N = 1, 2, \dots$ , számra, ezért  $\sum_{n=1}^{\infty} f_j(n) < 1$ , és az  $E_j$  állapot tranziens. Ha  $\sum_{n=1}^{\infty} P(n, j, j) = \infty$ , akkor  $1 \geq \sum_{n=1}^{\infty} f_j(n) \geq 1 - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{P_j(x)} = 1$ , tehát  $\sum_{n=1}^{\infty} f_j(n) = 1$ , és az  $E_j$  állapot rekurrens.

A tétel bizonyításának befejezéséhez elegendő belátni, hogy mivel  $F_j = \sum_{n=1}^{\infty} f_j(n)$  annak a valószínűsége, hogy az  $E_j$  állapotból induló Markov-lánc legalább 1-szer visszatér az  $E_j$  állapotba,  $F_j^k$  annak a valószínűsége, hogy a Markov-lánc legalább  $k$ -szor visszatér az  $E_j$  állapotba. Ezt az állítást  $k$  szerinti teljes indukcióval fogjuk belátni.

Az indukciós feltevés  $k = 1$  esetben érvényes. Jelölje  $f_j^{(k)}(n)$  annak a valószínűségét, hogy a Markov-lánc az  $n$  időpontban tér vissza a  $k$ -ik alkalommal az  $E_j$  állapotba. Az, hogy az indukciós feltevés érvényes  $k$ -ra azt jelenti, hogy  $\sum_{n=1}^{\infty} f_j^{(k)}(n) = F_j^k$ . Annak a valószínűsége, hogy a Markov-lánc legalább  $k + 1$ -szer visszatér az  $E_j$  állapotba kifejezhető, mint  $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f_j^{(k)}(n) f_j(m) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_j^{(k)}(n) \right) \left( \sum_{m=1}^{\infty} f_j(m) \right) = F_j^{k+1}$ . A tétel bizonyítását befejeztük.

Érdemes megfogalmazni a fenti eredmény következő Pólya tétel néven ismert híres következményét.

**Pólya György tétele véletlen bolyongások visszatéréséről.** *Tekintsük a véletlen bolyongást a  $d$ -dimenziós egész rácson, azaz tekintsünk egy olyan  $X_0, X_1, \dots$ , Markov-láncot a  $d$ -dimenziós tér egész koordinátájú pontjain, amelyre  $P(X_0 = (0, \dots, 0)) = 1$ , az  $X_{n+1} - X_n$  valószínűségi változók függetlenek,  $P(X_{n+1} - X_n = e_j) = P(X_{n+1} - X_n = -e_j) = \frac{1}{2d}$ ,  $j = 1, \dots, d$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , ahol  $e_j$  azt a  $d$ -dimenziós vektort jelöli, amelynek  $j$ -ik koordinátája 1, és összes többi koordinátája nulla. A véletlen bolyongás  $d = 1$  és  $d = 2$  dimenzióban 1 valószínűséggel végtelen sokszor visszatér az origóba,  $d \geq 3$  dimenzióban 1 valószínűséggel csak véges sokszor tér vissza oda.*

*Megjegyzés:* Micheal Keane amerikai matematikus a következő humoros, de a lényegét jól kifejező interpretációját adta a Pólya tételnek: Egy részeg ember előbb-utóbb biztos, hogy hazatalál, de egy részeg madár nem feltétlenül.

*A Pólya tétel bizonyítása.* Az előző tétel alapján elég belátni azt, hogy  $\sum_{n=1}^{\infty} P(n, 0, 0) = \infty$  egy  $d$ -dimenziós véletlen bolyongás átmenet valószínűségeire, ha  $d = 1$  vagy  $d = 2$ , és  $\sum_{n=1}^{\infty} P(n, 0, 0) < \infty$ , ha  $d \geq 3$ . Ezen relációk megmutatásához elég belátni, hogy  $P(2n, 0, 0) \sim Kn^{-d/2}$  alkalmas  $K = K(d) > 0$  együtthatóval minden  $n = 1, 2, \dots$ , paraméterre és  $d = 1, 2, \dots$  dimenzióra. (Jegyezzük meg, hogy  $P(2n+1, 0, 0) = 0$ , azaz páratlan sok lépésben nem térhetünk vissza az origóba). Viszont ismert az úgynevezett lokális centrális határeloszlástétel, amely jelen esetben azt fejezi ki, kissé felületesen megfogalmazva, hogy a  $P(X_n = k)$  valószínűségek úgy viselkednek, mint ahogy azt a centrális határeloszlástétel sugallja.

Felírhatjuk az  $X_n = \sum_{j=1}^{n-1} (X_j - X_{j-1})$  relációt, ahol az összegben független és (ismert) egyforma eloszlású valószínűségi változók szerepelnek. Ez lehetővé teszi, hogy a centrális határeloszlástétel bizonyításához hasonlóan, (valójában egyszerűbben), jó aszimptotikus relációt írjunk fel annak valószínűségére, hogy az  $X_n$  valószínűségi változó adott értéket vesz fel. Most csak a számunkra a jelen feladatban érdekes formulát látjuk be. Nevezetesen azt, hogy amennyiben  $Y_k = X_k - X_{k-1}$ ,  $k = 1, \dots, 2n$  független  $d$ -dimenziós térbeli értékeket felvevő valószínűségi változók,  $P(Y_k = e_j) = P(Y_k = -e_j) = \frac{1}{2d}$ ,  $j = 1, \dots, d$ ,  $k = 1, \dots, 2n$ , akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-d/2} P(X_{2n} = 0) \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-d/2} P(Y_1 + \dots + Y_{2n} = 0) = \frac{2d^{d/2}}{(2\pi)^{d/2}}, \quad (5)$$

Innen következik Pólya György tétele.

Az (5) reláció bizonyításának részleteit elhagyom, Csak rövid magyarázatot adok arra, honnan lehet látni, hogy egy ilyen aszimptotikus formula érvényes, illetve, mi a bizonyítás alap gondolata. A részletek kidolgozása szorgalmi feladat.

Az (5) képlet bizonyos értelemben a centrális határeloszlástétel lokális alakjának tekinthető. A centrális határeloszlástétel bizonyítása azon múlik, hogy az  $X_{2n}$  véletlen

független összeg  $\varphi_n(t)$  karakterisztikus függvényére, illetve annak normalizáltjára jó aszimptotikus becslést tudunk adni. Jelen esetben a karakterisztikus függvény egy  $\varphi_n(t_1, \dots, t_d) = c_n(k_1, \dots, k_d)e^{i(k_1 t_1 + \dots + k_d t_d)}$  alakú (több-változós) Fourier sor, amelynek tagjai  $c_n(k_1, \dots, k_d)e^{i(k_1 t_1 + \dots + k_d t_d)}$  alakú függvények, ahol  $k_1, \dots, k_d$  egész számok, és  $k_1 + \dots + k_d$  páros szám. Továbbá a függetlenség miatt  $\varphi_n(t_1, \dots, t_d) = \bar{\varphi}^{2n}(t_1, \dots, t_d)$ , ahol  $\bar{\varphi}(t_1, \dots, t_d) = \frac{1}{2^d} \sum_{j=1}^d (e^{it_j} + e^{-it_j})$ . Így a  $\varphi_n(t)$  karakterisztikus függvény kiszámolható. Ezért felhasználva, hogy a Fourier sor tagjaiban szereplő függvények ortogonálisak a  $K = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [-\pi, \pi]^{d-1}$   $d$ -dimenziós téglatesten, (mely állítást külön igazolni kell,) a  $c_n(0, \dots, 0)$  Fourier együtthatót, ami egyenlő a  $P(X_{2n} = 0)$  valószínűséggel, ki lehet fejezni a Fourier sor integráljának a segítségével a  $K$  téglatesten. Ez, mivel a Fourier sor értékére jó aszimptotikus formulánk van, lehetővé teszi az (5) képlet igazolását. Ennek a számolásnak a fő lépése annak megmutatása, hogy a tekintendő integrál lényegében az origó egy kis környezetébe van koncentrálna, ahol az integrandusra jó aszimptotikus formulát lehet adni.

Magát a végeredményt előre megsejthetjük. A keresett valószínűség közelítőleg egyenlő a megfelelő kovarianciájú, 0 várható értékű normális sűrűségfüggvény integráljával a  $K$  téglatesten. Ráadásul, mivel a kovariancia mátrix (nagy  $n$  index esetén) nagy, ezért kis hibát követünk el, ha a  $K$  téglatest helyett az egész téren integrálunk.

Rátérek a b) kérdés tárgyalására, annak vizsgálatára, hogy mennyivel egyenlő egy Markov-lánc átmeneteinek  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n, j, j)$  határértéke (feltéve, hogy ez a határérték létezik), illetve az így kapott eredményből milyen következtetéseket tudunk levonni a  $P(n, j, k)$  átmenetvalószínűségek aszimptotikus viselkedésére nagy  $n$  paraméter esetén. A vizsgálat elején csak aperiódikus  $E_j$  állapotokat vizsgálunk. Ha ezek viselkedését jól le tudjuk írni, akkor az általános eset vizsgálata viszonylag egyszerűen visszavezethető erre.

A vizsgálat kulcslépése a valószínűségszámítás egyik érdekes eredményének az úgynevezett felújítási tételnek az alkalmazása. Ezt az eredményt az előadásban nem bizonyítom, csak elmagyarázom, hogy szemléletesen nagyon természetes. (A kiegészítésben ismertetem ennek az eredménynek egy lehetséges bizonyítását William Feller: Bevezetés a Valószínűségszámításba című könyve XIII. fejezetének 11. pontjában leírt bizonyítás alapján.)

**Felújítási tétel.** *Legyen  $Y_1, Y_2, \dots$ , független, egyforma eloszlású, (szigorúan) pozitív egész értékeket felvevő valószínűségi változók sorozata. Jelölje  $S_n = \sum_{j=1}^n Y_j$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , a tekintett valószínűségi változók részletösszegeit, és  $\mathcal{A} = \{m: P(Y_1 = m) > 0\}$ , azaz azon egész számok halmazát, amelyeket az  $Y_1$  valószínűségi változó pozitív valószínűséggel vesz fel. Tegyük fel, hogy az  $\mathcal{A}$  halmazban szereplő számok legnagyobb közös osztója 1. Jelölje továbbá  $\mu = \sum_{j=1}^{\infty} jP(Y_1 = j)$  az  $Y_1$  valószínűségi változó várható értékét. Ekkor a következő aszimptotikus formulát érvényes annak valószínűségére, hogy valamelyik  $S_m$*

részletösszeg felvesz egy előre rögzített nagy  $n$  értéket:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \omega: \bigcup_{m=1}^{\infty} S_m(\omega) = n \right) = \frac{1}{\mu}. \quad (6)$$

A (6) reláció mind  $\mu < \infty$ , mind  $\mu = \infty$  esetben fennáll. Utóbbi esetben ez a képlet a  $\frac{1}{\infty} = 0$  jelöléssel érvényes.

A felújítási tétel segítségével be fogjuk látni a következő tételt.

**Tétel Markov-láncok átmenetvalószínűségeinek aszimptotikus viselkedéséről.** Legyen  $X_0, X_1, \dots$  olyan Markov-lánc  $P(n, i, j) = P(X_n = E_j | X_0 = E_i)$  átmenetvalószínűségekkel, amelyben az  $E_j$  állapot rekurrens és aperiódikus. Ekkor teljesül

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(n, j, j) = \frac{1}{\mu_j} \quad (7)$$

azonosság, ahol a  $\mu_j$  mennyiség a (2) formulában van definiálva. A (7) képlet speciálisan azt is állítja, hogy ha  $\mu_j = \infty$ , akkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n, j, j) = 0$ .

Először elmagyarázom a felújítási tétel szemléletes tartalmát, majd azt, hogy hogyan lehet ennek segítségével az ezt követő tételt belátni.

Természetes azt várni, hogy a független, pozitív egész értékű valószínűségi változók  $S_1, S_2, \dots$ , részletösszegei körülbelül ugyanolyan valószínűséggel vesznek fel valamilyen indexre minden elég nagy  $n$  számot. (Ahhoz, hogy ez a tulajdonság teljesüljön fel kellett tenni, hogy a tételben definiált  $\mathcal{A}$  halmazban szereplő számok legnagyobb közös osztója 1. Ezzel kapcsolatban lásd a következő feladatot.) Ez azt sugallja, hogy ha megjelöljük azokat a (véletlen) pontokat, amelyeket az  $S_1(\omega), S_2(\omega), \dots$  részletösszegek meglátogatnak, akkor a megjelölt pontok halmazának az összes pozitív egész számok halmazában van valamilyen sűrűsége, és a (6) képlet baloldalán szereplő kifejezésnek ez a sűrűség a (létező) limesze. Viszont ezt a sűrűséget könnyen kiszámolhatjuk. Ugyanis a nagy számok törvénye alapján  $\frac{S_n}{n}$  értéke tart a  $\mu$  számhoz 1 valószínűséggel, ha  $n \rightarrow \infty$ . Ez azt jelenti, hogy nagy  $n$  indexre van egy olyan  $[1, A_n]$  intervallum, (véletlen  $A_n$  végponttal), amelyre  $A_n \sim n\mu$ , és az  $[1, A_n]$  intervallumban pontosan  $n$  megjelölt pont van. Ezért a megjelölt pontok sűrűsége  $\frac{1}{\mu}$ .

*Feladat.* Legyenek  $Y_1, Y_2, \dots$  független, egyforma eloszlású, pozitív egész értékeket felvevő valószínűségi változók. Tekintsük a felújítási tétel megfogalmazásában definiált  $\mathcal{A} = \{m: P(Y_1 = m) > 0\}$  halmazt. Mutassuk meg hogy ha a  $\mathcal{A}$  halmazban szereplő számok legnagyobb közös osztója 1, akkor létezik olyan (az  $\mathcal{A}$  halmaztól függő)  $N_0$  küszöbszám, és olyan  $a_1, \dots, a_k \in \mathcal{A}$  számok, hogy minden  $n \geq N_0$  szám felírható  $n = r_1 a_1 + \dots + r_k a_k$  alakban, ahol  $r_1, \dots, r_k$  szigorúan pozitív egész számok. Ezért annak valószínűsége, hogy  $\sum_{j=1}^M Y_j = n$  valamilyen  $M \geq 1$  számra, ha  $n \geq N_0$ , szigorúan pozitív.

*Segítség.* Vegyük észre, hogy bizonyos számelméleti eredmények alapján igaz a következő állítás: Ha  $a_1, \dots, a_k$  egész számok legnagyobb közös osztója 1, akkor az  $s_1 a_1 + \dots + s_k a_k = 1$  reláció teljesül alkalmas  $s_1, \dots, s_k$  egész, de nem feltétlenül pozitív számokkal. Ha  $R(a_1 + \dots + a_k) \leq n < (R+1)(a_1 + \dots + a_k)$ , akkor írjuk fel az  $n$  számot  $n = R(a_1 + \dots + a_k) + [n - R(a_1 + \dots + a_k)]$  alakban, és alkalmazzuk a fenti eredményt.

A fenti heurisztikus gondolatmenet mutatja, miért hihető, hogy a felújítási tétel igaz. Másrészt, mint látni fogjuk, abban az esetben, ha egy olyan az  $E_j$  állapotból induló Markov-láncot tekintünk, amelynek  $E_j$  állapota rekurrens és aperiódikus, akkor az  $E_j$  állapot egymást követő látogatásai között eltelt időszakok hosszai olyan független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, amelyek teljesítik a felújítási tétel feltételeit  $\mu = \mu_j$  várható értékkel. Ezen észrevétel segítségével megkapjuk a (7) formula bizonyítását. A részletek kidolgozása érdekében érdemes bevezetni és bebizonyítani diszkrét idejű Markov-lánckra az úgynevezett erős Markov tulajdonságot. Ez egyszerű, de fontos tulajdonság. Az erős Markov tulajdonság definíciója előtt be kell vezetnem a megállási szabály fogalmát.

A megállási szabály szemléletes tartalma az, hogy ez olyan utasítás (véletlen időpontbeli) megállásra, amely végrehajtható, azaz az  $n$  időpontbeli információk alapján, de a jövőbeli fejlődést nem feltétlenül ismerve el lehet dönteni, hogy az  $n$ -ik időpontban megállítsuk-e a folyamatot vagy sem. Először az általános esetben fogalmazom meg a definíciót, akkor amikor az  $n$  időpontig szerzett információk egy  $\mathcal{F}_n$   $\sigma$ -algebrában vannak összegyűjtve.

**Megállási szabály definíciója.** *Legyen adva  $\sigma$ -algebrák növekvő  $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3 \subset \dots \subset \mathcal{A}$  sorozata egy  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  valószínűségi mezőn. Azt mondjuk, hogy egy pozitív egész értékeket (és esetleg a  $\infty$ ) értéket felvevő  $\tau(\omega)$  valószínűségi változó megállási szabály e  $\sigma$ -algebrák rendszerére nézve, ha  $\{\omega : \tau(\omega) = n\} \in \mathcal{F}_n$  minden  $n = 1, 2, \dots$  számra.*

Ezután megadom a definíció változatát abban az esetben, ha  $\sigma$ -algebrák helyett valószínűségi változók egy sorozata van adva.

**Megállási szabály definíciója.** *Legyen valószínűségi változók  $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots$  sorozata egy  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  valószínűségi mezőn. Egy pozitív egész értékeket (és esetleg a  $\infty$ ) értéket felvevő  $\tau(\omega)$  valószínűségi változó megállási szabály e valószínűségi változók sorozatára nézve, ha megállási szabály a  $\mathcal{F}_n = \mathcal{B}(\xi_k(\omega), 1 \leq k \leq n)$   $\sigma$ -algebrák növekvő rendszerére nézve.*

*Feladat:* Mutassuk meg, hogy a megállási szabály definícióját ekvivalens módon fogalmazzuk át, ha az  $\{\omega : \tau(\omega) = n\} \in \mathcal{F}_n$  feltételt az  $\{\omega : \tau(\omega) \leq n\} \in \mathcal{F}_n$  feltétellel helyettesítjük (minden  $n = 1, 2, \dots$  számra).

E fogalom bevezetése után megfogalmazom az erős Markov tulajdonságot.

**Erős Markov tulajdonság definíciója diszkrét idejű Markov-lánckra.** *Legyen  $X_0, X_1, \dots$  (stacionárius) Markov-lánc. Azt mondjuk, hogy a Markov-lánc teljesíti az*

erős Markov tulajdonságot, ha a Markov-lánc tetszőleges olyan  $\tau$  megállási szabályára, amelyre  $P(\tau(\omega) < \infty) = 1$

$$\begin{aligned} P(X_{\tau+1} = E_{u_1}, X_{\tau+2} = E_{u_2}, \dots, X_{\tau+j} = E_{u_j} | \tau = n, X_0 = E_{v_0}, \dots, X_\tau = E_{v_n}) \\ = P(X_1 = E_{u_1}, X_2 = E_{u_2}, \dots, X_j = E_{u_j} | X_0 = E_{v_n}) \end{aligned} \quad (8)$$

minden olyan  $n, u_1, \dots, u_n$  és  $v_1, \dots, v_k$  számokra, amelyekre a (8) képlet baloldalán szereplő feltétel nem nulla valószínűségű esemény.

A Markov tulajdonság (stacionárius) Markov-láncokra azt mondja ki, hogy rögzítve egy  $n$  időpontot, és egy trajektóriát a  $[0, n]$  intervallumon egy Markov-folyamatnak az  $n$  időpont utáni viselkedése, feltéve, hogy a  $[0, n]$  időintervallumban az előírt trajektóriát járta be ugyanolyan, mint egy olyan Markov-folyamaté, amely a 0 időpontban ennek a trajektóriának a végpontjából indul. Az erős Markov tulajdonság ezt a tulajdonságot fogalmazza meg abban az általánosabb esetben, amikor a Markov-folyamatnak nem egy determinisztikus, hanem egy véletlen megállási szabály által definiált időpontja utáni viselkedését kívánjuk leírni. Bár ezt a fogalmat csak diszkrét idejű Markov-láncokra fogalmaztuk meg, az erős Markov tulajdonság fogalmát lehet (sőt érdemes) definiálni általános Markov-folyamatokra is. Számunkra az erős Markov tulajdonságnak az alább definiált  $\tau_n, n = 1, 2, \dots$ , megállási szabályokra vett alkalmazása lesz elsősorban érdekes.

Legyen  $X_0, X_1, \dots$ , stacionáris Markov-lánc,  $P(X_0 = E_j) = 1$ , és legyen  $E_j$  a Markov-lánc egy rekurrens állapota. Legyen

$$\tau_1 = \tau_1(E_j) = \min\{k: k > 0, X_k = E_j\}. \quad (9)$$

Definiáljuk ezután a  $\tau_n, n = 1, 2, \dots$ , megállási szabályokat az  $n$  szám szerinti teljes indukcióval a következő módon. Ha  $\tau_n$ -et már definiáltuk, akkor legyen

$$\tau_{n+1} = \tau_{n+1}(E_j) = \min\{k: k > \tau_n, X_k = E_j\}. \quad (9')$$

Szavakkal megfogalmazva,  $\tau_n$  az  $E_j$  állapotba való  $n$ -ik visszatérés időpontja. Belátjuk a következő lemmát.

**Lemma.** *Egy  $X_0, X_1, \dots$ , Markov-lánc teljesíti az erős Markov tulajdonságot. Speciálisan, ha  $E_j$  a Markov-lánc rekurrens állapota, és  $P(X_0 = E_j) = 1$ , akkor a (9) és (9') formulákban definiált  $\tau_n, n = 1, 2, \dots$ , megállási szabályokra az  $Y_1 = \tau_1, Y_k = \tau_k - \tau_{k-1}, k = 2, 3, \dots$ , valószínűségi változók függetlenek és egyforma eloszlásúak,  $P(Y_k = N) = f_j(N)$ , ahol  $f_j(N)$  a (1) képletben van definiálva.*

*A Lemma bizonyítása.* Mivel  $\tau$  megállási szabály, a (8) formula baloldalán szereplő  $\{\tau = n, X_0 = E_{v_0}, \dots, X_\tau = E_{v_n}\}$  feltételben definiált esemény részeként szereplő  $\{\tau = n\}$  esemény be vagy be nem következését az  $\{X_0 = E_{v_0}, \dots, X_n = E_{v_n}\}$  esemény (determinisztikusan) meghatározza. Ezért ez a feltétel vagy az üres vagy az  $\{X_0 = E_{v_0}, \dots, X_n = E_{v_n}\}$  esemény. Az utóbbi esetben a (8) képlet baloldalán szereplő kifejezés a  $P(X_{n+1} = E_{u_1}, X_{n+2} = E_{u_2}, \dots, X_{n+j} = E_{u_j} | X_0 = E_{v_0}, \dots, X_n = E_{v_n})$

feltételes valószínűséggel egyenlő. Ez viszont a (stacionárius) Markov tulajdonság miatt egyenlő a jobboldali kifejezéssel.

A Lemma második állításának bizonyításához elég megmutatni, hogy minden  $n$  pozitív,  $N_1, N_2, \dots, N_n$  és  $N$  nem-negatív egész számokból álló számrendszerre

$$P(\tau_{n+1} - \tau_n = N | \tau_1 = N_1, \tau_2 - \tau_1 = N_2, \dots, \tau_n - \tau_{n-1} = N_n) = P(\tau_1 = N | X_0 = E_j),$$

illetve észrevenni azt, hogy  $P(\tau_1 = N | X_0 = E_j) = f_j(N)$  definíció szerint. Másrészt  $\{\tau_{n+1} - \tau_n = N\}$  eseményt felírhatjuk, mint  $\{X_{\tau_{n+1}} = E_{u_1}, \dots, X_{\tau_{n+1}+N} = E_{u_N}\}$  alakú diszjunkt események unióját, és hasonlóan a  $\{\tau_1 = N\}$  esemény felírható, mint  $\{X_1 = E_{u_1}, \dots, X_N = E_{u_N}\}$  alakú diszjunkt események uniója. Ezért a bizonyítandó azonosság igazolásához elég megmutatni azt, hogy

$$\begin{aligned} P(X_{\tau_{n+1}} = E_{u_1}, \dots, X_{\tau_{n+1}+N} = E_{u_N} | \tau_1 = N_1, \tau_2 - \tau_1 = N_2, \dots, \tau_n - \tau_{n-1} = N_n) \\ = P(X_1 = E_{u_1}, \dots, X_N = E_{u_N} | X_0 = E_j) \end{aligned}$$

minden lehetséges  $E_{u_1}, \dots, E_{u_N}$  állapotokra.

Viszont az utolsó bizonyítandó azonosság baloldalán szereplő  $\{\tau_1 = N_1, \tau_2 - \tau_1 = N_2, \dots, \tau_n - \tau_{n-1} = N_n\}$  feltétel felbontható  $\{\tau_n = N_1 + \dots + N_n, X_0 = E_{u_0}, X_1 = E_{u_1}, \dots, X_{N_1+\dots+N_n} = E_j\}$  alakú diszjunkt események uniójára. (Fontos, hogy az utolsó egyenlet jobboldalának feltételében az  $E_j$  állapot szerepel.) Ezért elég megmutatni, hogy a bizonyítani kívánt azonosság érvényes, ha az azonosság baloldalán szereplő feltételes valószínűségben megjelenő feltételt ilyen alakú feltétellel helyettesítjük. Ez viszont a (8) formulában szereplő erős Markov tulajdonság következménye. A lemmát bebizonyítottuk.

A Markov-láncok átmenetvalószínűségeinek aszimptotikus viselkedéséről szóló tétel egyszerű következménye a fenti lemmának és a felújítási tételnek. Valóban, tekintsük a lemma második állításában szereplő  $\tau_n$  megállási szabályokat. Ezek felírhatóak  $\tau_n = \sum_{k=1}^n Y_k$  alakban, ahol  $Y_1, Y_2, \dots$  független egyforma eloszlású valószínűségi változók, és az az esemény, hogy az  $E_j$  pontból induló bolyongás az  $n$ -ik időpontban visszatér az  $E_j$  állapotba azzal az eseménnyel egyezik meg, hogy az  $\tau_1(\omega), \tau_2(\omega), \dots$ , visszatérési idők valamelyike felveszi az  $n$  értéket. Mivel ezeket a valószínűségi változókat előállítottuk, mint független, egyforma eloszlású  $Y_1, Y_2, \dots$  valószínűségi változók részletösszegeit, azt kell meggondolnunk, hogy ezekre alkalmazható a felújítási tétel, és az az általunk megfogalmazott eredményt adja.

Valóban, megadtuk az  $Y_1$  valószínűségi változó eloszlását, és abból látszik, hogy  $Y_1$  várható értéke a (2) formulában definiált  $\mu_j$  szám. Másrészt azon pozitív egész számok halmazának, amelyeket az  $Y_1$  valószínűségi változó pozitív valószínűséggel vesz fel, (azaz a  $\mathcal{A}$  halmazban szereplő számoknak) a legnagyobb közös osztója 1 az  $E_j$  állapot aperiódikus tulajdonsága miatt. Valóban, ha ezen számok mindegyike osztható volna valamely  $d \geq 2$  számmal, akkor a  $\tau_n$  valószínűségi változók értékei 1 valószínűséggel oszthatók lennének  $d$ -vel minden  $n = 1, 2, \dots$  számra, és ez azt jelentené, hogy az  $E_j$  állapot periódusa osztható  $d$ -vel. Így a felújítási tétel megadja a kívánt állítást.

Bevezetem a következő definíciókat.

**Markov-lánc null rekurrens állapotának a definíciója.** Legyen  $X_0, X_1, \dots$  Markov-lánc egy  $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots\}$  állapottéren. Azt mondjuk, hogy a Markov-lánc egy  $E_j$  állapota null rekurrens állapot, ha az  $E_j$  állapotból indított Markov-lánc egy valószínűséggel visszatér az  $E_j$  állapotba, de a visszatérés idejének a várható értéke végtelen.

**Markov-lánc pozitív rekurrens állapotának a definíciója.** Legyen  $X_0, X_1, \dots$  Markov-lánc egy  $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots\}$  állapottéren. Azt mondjuk, hogy a Markov-lánc egy  $E_j$  állapota pozitív rekurrens állapot, ha az  $E_j$  állapotból indított Markov-lánc egy valószínűséggel visszatér az  $E_j$  állapotba, és a visszatérés idejének a várható értéke véges. Egy pozitív rekurrens aperiódikus állapotot ergodikusnak nevezünk.

A következő tételben megfogalmazott eredmény részben összefoglaló jellegű. Ebben felsorolom azokat a már bizonyított eredményeket is, amelyek a  $P(n, j, k)$  átmenetvalószínűségek segítségével jellemzik a tranziens, null rekurrens és pozitív rekurrens állapotokat. Ezenkívül nagy  $n$  idő esetén, aszimptotikus formulát is adunk a  $P(n, i, j)$  átmenetvalószínűségekre, azaz annak a valószínűségére, hogy az  $E_j$  állapotba jutunk az (attól esetleg különböző)  $E_i$  állapotból. Ahhoz, hogy ezeket az eredményeket megkapjuk, először bevezetek néhány jelölést, és megadok néhány egyszerű, de hasznos formulát.

Vezessük be az

$$f_{i,j}(n) = P(X_n = E_j, X_m \neq E_j, \text{ ha } 1 \leq m < n | X_0 = E_i), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

és

$$F(i, j) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{i,j}(n) \quad n = 1, 2, \dots, \quad (10')$$

mennyiségeket. Az  $f_{i,j}(n)$  szám annak a valószínűsége, hogy az  $E_i$  állapotból elinduló Markov-lánc az  $n$  időpontban jut először az  $E_j$  állapotba, és  $F(i, j)$  annak a valószínűsége, hogy az  $E_i$  állapotból elindított Markov-lánc valamikor később eljut az  $E_j$  állapotba.

Igaz a következő azonosság:

$$P(n, i, j) = \sum_{l=1}^n f_{i,j}(l) P(n-l, j, j), \quad \text{ha } n \geq 1, \quad (11)$$

mert  $f_{i,j}(l)P(n-l, j, j)$  annak a valószínűsége, hogy az  $E_i$  állapotból kiinduló Markov-lánc az  $l$ -ik lépésben veszi fel először az  $E_j$  értéket,  $1 \leq l \leq n$ , és ezután  $n-l$  lépésben az  $E_j$  állapotból visszajut az  $E_j$  állapotba. Most megfogalmazom a következő eredményt.

**Tétel egy Markov-lánc egy állapotának jellemzéséről.** Legyen  $X_0, X_1, \dots$  Markov-lánc valamely  $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots\}$  állapottéren  $P(n, i, j) = P(X_n = E_j | X_0 = E_i)$  átmenetvalószínűségekkel.

a) Az  $E_j$  állapot akkor és csak akkor tranziens, ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(n, j, j) < \infty.$$

Ebben az esetben

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(n, i, j) < \infty \quad \text{minden } E_i \text{ állapotra.}$$

b) Az  $E_j$  állapot akkor és csak akkor null rekurrens állapot, ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(n, j, j) = \infty \quad \text{és} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(n, j, j) = 0.$$

Ebben az esetben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(n, i, j) = 0 \quad \text{minden } E_i \text{ állapotra.}$$

c) Egy aperiódikus  $E_j$  állapot akkor és csak akkor ergodikus, (azaz akkor és csak akkor teljesül a  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n, j, j) = \frac{1}{\mu_j} > 0$  reláció alkalmas  $\mu_j > 0$  számmal, ha  $\mu_j = \sum_{n=1}^{\infty} n f_j(n) < \infty$ , ahol az  $f_j(n)$  mennyiség az (1) képlettel van megadva. A két képletben szereplő  $\mu_j$  szám megegyezik. Ha az  $E_j$  állapot ergodikus, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(n, i, j) = F(i, j) \frac{1}{\mu_j} \quad \text{minden } E_i \text{ állapotra.} \quad (12)$$

Az ebben a képletben szereplő  $F(i, j)$  számot a (10') képletben definiáltuk.

Markov-lánc egy állapotának jellemzéséről szóló tétel bizonyítása. Az a) rész első állítását a Markov-láncok rekurrens és tranzienst állapotainak jellemzéséről szóló tétel tartalmazza. Az a) rész második állítása következik az a) rész első állításából és a (11) formulából, mert ebből következik, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(n, i, j) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^n f_{i,j}(l) P(n-l, j, j) = \left( \sum_{l=1}^{\infty} f_{i,j}(l) \right) \left( \sum_{m=1}^{\infty} P(m, j, j) \right) < \infty.$$

A b) rész első állítása következik a Markov-láncok rekurrens és tranzienst állapotainak és a Markov-láncok átmenetvalószínűségeinek aszimptotikus viselkedéséről szóló tételekből. Ez utóbbi eredmény csak aperiódikus (azaz 1 periódusú) állapotokról szól. Viszont, ha az  $X_j$  állapot periódusa  $d \geq 2$ , akkor tekinthetjük az  $\bar{X}_j = X_{dj}$ ,  $j = 0, 1, \dots$ ,  $P(\bar{X}_j = 0) = 1$ , Markov-láncot. Ennek periódusa 1, ezért erre alkalmazva a Markov-láncok átmenetvalószínűségeinek aszimptotikus viselkedéséről szóló eredményt kapjuk, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_{nd} = E_j) = 0$ . Másrészt  $P(X_{nd+r} = E_j) = 0$ , ha  $0 < r < d$ . Ezért a b) rész első állítása igaz az általános esetben.

A b) rész második állítása következik annak első feléből és a (11) formulából, mert

$$P(n, i, j) \leq \sup_{m \geq \frac{n}{2}} P(m, j, j) \sum_{l=1}^{n/2} f_{i,j}(l) + \sum_{l=n/2}^{\infty} f_{i,j}(l),$$

és a b) eset feltételei mellett mind a két összeg nagyon kicsi nagy  $n$  indexre.

A c) résznek is csak a második állítása új. Az elsőt tartalmazza a Markov-láncok átmenetvalószínűségeinek aszimptotikus viselkedéséről szóló tétel. A hiányzó részt az első rész és a (11) formula segítségével láthatjuk be hasonlóan a b) rész indoklásához. Valóban

$$P(n, i, j) = \sum_{l=1}^{n/2} f_{i,j}(l)P(n-l, j, j) + \sum_{l=n/2+1}^n f_{i,j}(l)P(n-l, j, j) = \Sigma_1(n) + \Sigma_2(n).$$

Viszont

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma_1(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^{n/2} f_{i,j}(l)\mu_j = \frac{F(i, j)}{\mu_j},$$

és

$$0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \Sigma_2(n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=n/2}^{\infty} f_{i,j}(l) = 0,$$

ahonnan következik az állítás.

*Feladat:* Tekintsünk egy az origóból induló bolyongást a számegeyenesen. Mutassuk meg, hogy a bolyongás egy valószínűséggel eljut az 1 pontba, viszont az 1 pontba jutás idejének a várható értéke végtelen.

*Segítség:* Alkalmazzuk az előző tétel eredményét.

Megadom egy Markov-lánc határátmenetvalószínűségeinek egy más típusú jellemzését is. Ennek alap gondolata a következő. Ha megadjuk a Markov-lánc egy olyan kezdeti (úgynevezett stacionárius) eloszlását, amely az idő során nem változik, akkor bizhatunk abban, hogy ennek eloszlásai megegyeznek az előző tételben megadott határértékekkel. Így módon ki tudjuk számolni az  $\frac{1}{\mu_j}$  határértékeket anélkül, hogy a közvetlenül nehezen kiszámítható várható értékeket kellene meghatároznunk. Ehelyett egy (esetleg végtelen) lineáris egyenletrendszer kell megoldanunk. E módszer tárgyalásában szükségünk van az alábbi definícióra.

**Markov-lánc stacionárius eloszlásának a definíciója.** Legyen  $X_0, X_1, \dots$ , Markov-lánc valamely  $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots\}$  állapotterén  $P(i, j) = P(X_1 = E_j | X_0 = E_i)$  egy lépéses átmenetvalószínűségekkel. Azt mondjuk, hogy egy  $u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, \dots$ , nemnegatív számokból álló sorozat a Markov-lánc stacionárius eloszlását adja meg, ha ez a sorozat teljesíti a

$$\sum_{j: E_j \in \mathcal{E}} u_j = 1 \tag{13}$$

$$u_j = \sum_{i: E_i \in \mathcal{E}} u_i P(i, j) \quad \text{minden } j = 1, 2, \dots \text{ számra.} \quad (14)$$

egyenleteket.

A (13) és (14) formuláknak természetes szemléletes tartalma van. Ha olyan Markov-láncot tekintünk, amelynek 0 időpontbeli eloszlása  $P(X_0 = E_j) = u_j$  minden  $j = 1, 2, \dots$  számra, akkor a (13) képlet alapján a Markov-lánc 1 időpontbeli eloszlása  $P(X_1 = E_j) = \sum_{i: E_i \in \mathcal{E}} P(X_0 = E_i) P(X_1 = E_j | X_0 = E_i) = \sum_{i: E_i \in \mathcal{E}} u_i P(i, j) = u_j$  minden  $j = 1, 2, \dots$  számra. Ez azt jelenti, hogy a Markov-láncnak ugyanaz a  $P(X_1 = E_j) = u_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , az eloszlása az  $n = 1$  időpontban. De ekkor indukcióval kapjuk, hogy ugyanez a Markov-lánc eloszlása minden  $n = 1, 2, \dots$  időpontban.

A korábbi eredmények alapján természetes azt várni, hogy bizonyos nem túl megszorító feltételek teljesülése esetén a Markov-láncnak egyetlen stacionárius eloszlása van, amelyet az  $u_j = \frac{1}{\mu_j}$  képlettel adhatunk meg. Azt várjuk, hogy ez a számsorozat kielégíti a (13) és (14) képleteket, valamint a Markov-lánc tetszőleges kezdeti eloszlás esetén tart a stacionárius eloszláshoz, ha az idő tart a végtelenhez. Ilyen típusú eredményt fogunk bizonyítani.

Csak abban az esetben várhatjuk, hogy egy Markov-láncnak létezik az előbb leírt stacionárius eloszlása, ha annak állapotai pozitív rekurrens, aperiódikus állapotok. Ez a feltétel biztosítja, hogy az  $u_j = \frac{1}{\mu_j}$  számok pozitívak. Annak érdekében, hogy lássuk azt, hogy a később megfogalmazott eredmény jól használható, először áttekintjük egy Markov-lánc állapotterének szerkezetét. Megmutatjuk, hogy az állapotteret természetes módon fel lehet bontani alkalmas osztályok uniójaként úgy, hogy az egy osztályban levő állapotok egyszerre tranzienst, null vagy pozitív rekurrens állapotok, és mindegyiküknek ugyanannyi a periódusa. Az állapotter alkalmas felbontásának megtalálásában a következő eredmény játszik kulcsfontosságú szerepet.

**Tétel Markov-lánc állapotainak tulajdonságairól.** *Legyen  $X_0, X_1, \dots$  Markov-lánc valamely  $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots\}$  állapotterén  $P(n, i, j) = P(X_n = j | X_0 = i)$  átmenet-valószínűségekkel. Legyen  $E_j$  rekurrens állapota a Markov-láncnak, és definiáljuk az állapotter következő az  $E_j$  állapottól függő  $\mathcal{C}(j) \subset \mathcal{E}$  részhalmazát.  $E_k \in \mathcal{C}(j)$  akkor és csak akkor, ha létezik olyan  $r$  pozitív egész szám, hogy  $P(r, j, k) > 0$ , azaz az  $E_j$  állapotból pozitív valószínűséggel el lehet jutni az  $E_k$  állapotba.*

*A  $\mathcal{C}(j)$  halmaz minden eleme rekurrens állapot. Ha  $E_k \in \mathcal{C}(j)$ ,  $E_l \in \mathcal{C}(j)$  akkor  $F(k, l) = 1$  a (10') képletben definiált  $F(\cdot, \cdot)$  mennyiséggel, azaz az  $E_k$  állapotból kiinduló Markov-lánc 1 valószínűséggel eléri az  $E_l$  állapotot. A  $\mathcal{C}(j)$  halmazban levő állapotok mindegyike egyszerre null vagy pozitív rekurrens állapot, és mindegyikük periódusa megegyezik. Továbbá minden  $E_k \in \mathcal{C}(j)$  (rekurrens) állapotra az  $E_k$  állapottól függő  $\mathcal{C}(k) \subset \mathcal{E}$  halmazra  $\mathcal{C}(k) = \mathcal{C}(j)$ .*

*A Markov-lánc állapotainak tulajdonságairól szóló tétel bizonyítása.* Először azt mutatjuk meg, hogy ha  $P(n, j, k) > 0$  valamely  $n \geq 1$  számra, azaz az  $E_j$  állapotból indított Markov-lánc pozitív valószínűséggel eljut az  $E_k$  állapotba, akkor  $F(k, j) = 1$ ,

azaz az  $E_k$  állapotból indított Markov-lánc 1 valószínűséggel eljut az  $E_j$  állapotba. Valóban, ha ez nem lenne igaz, akkor az  $1 - F(k, j) > 0$  és  $P(n, j, k) > 0$  relációk miatt pozitív lenne annak a valószínűsége, hogy az  $E_j$  állapotból induló Markov-lánc az  $n$  időpont után nem tér vissza az  $E_j$  állapotba, mert az  $n$  időpontban az  $E_k$  állapotba jut, és onnan nem lép soha az  $E_j$  állapotba. Ez viszont ellentmond annak a ténynek, hogy az  $E_j$  állapot rekurrens, ezért a Markov-lánc 1 valószínűséggel végtelen sokszor visszatér az  $E_j$  állapotba.

Ha  $k \in C_j$ , akkor léteznek olyan  $r$  és  $\bar{r}$  számok, amelyekre  $P(r, j, k) > 0$  és  $P(\bar{r}, k, j) > 0$ . Továbbá  $P(r + \bar{r} + n, k, k) \geq P(\bar{r}, k, j)P(n, j, j)P(r, j, k)$ . Ebből az egyenlőtlenségből, illetve abból a tényből, hogy a  $E_j$  állapot rekurrens tulajdonsága ekvivalens azzal, hogy  $\sum_{n=1}^{\infty} P(n, j, j) = \infty$  következik, hogy  $\sum_{n=1}^{\infty} P(n, k, k) = \infty$ , és az  $E_k$  állapot szintén rekurrens. Továbbá, ha az  $E_j$  állapot vagy  $E_k$  állapot egyikéből egy  $E_l$  pozitív valószínűséggel elérhető, akkor ez az  $E_l$  állapot a  $E_j$  és  $E_k$  állapotok másikából is pozitív valószínűséggel elérhető, (esetleg először azt az állapotot látogatva meg, ahonnan tudjuk, hogy az  $E_l$  halmaz meglátogatható. Ez azt jelenti, hogy  $\mathcal{C}(j) = \mathcal{C}(k)$ , ha  $E_k \in \mathcal{C}(j)$ . Ez speciálisan azt a következményt is maga után vonja, hogy  $E_k, E_l \in \mathcal{C}(j)$  esetén  $F(k, l) = 1$ . Valóban (a paraméterek más szereposztásában) láttuk, hogy ez a reláció következik abból, hogy  $E_k \in \mathcal{C}(l)$ .

Megmutatom, hogy abban az esetben, ha létezik egy olyan  $E_k \in \mathcal{C}(j)$ , amelyik null rekurrens állapot, akkor  $E_j$  is null rekurrens állapot. Innen következik, hogy  $\mathcal{C}(j)$  osztályban levő állapotok egyidejűleg null vagy pozitív rekurrens állapot. Az említett tulajdonság azért érvényes, mert  $P(r + \bar{r} + n, k, k) \geq P(\bar{r}, k, j)P(n, j, j)P(r, j, k)$  alkalmas  $P(\bar{r}, k, j) > 0$  és  $P(r, j, k) > 0$  számokkal, ezért a  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n, k, k) = 0$  relációból következik, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n, j, j) = 0$ .

A tétel bizonyításának befejezéséhez elegendő azt megmutatni, hogy ha  $E_k, E_l \in \mathcal{C}(j)$ , és az  $\mathcal{A}(k) = \{n: P(n, k, k) > 0\}$  halmaz elemei oszthatók egy  $d$  számmal, akkor az  $\mathcal{A}(l) = \{n: P(n, l, l) > 0\}$  halmaz elemei szintén oszthatók ezzel a  $d$  számmal. Innen következik, hogy a  $\mathcal{C}(j)$  halmaz elemei ugyanolyan periódusú állapotok. A fent megfogalmazott állítás igazolása érdekében vegyük észre, hogy léteznek olyan  $r_1 > 0$  és  $r_2 > 0$ , amelyekre  $P(r_1, k, l) > 0$  és  $P(r_2, l, k) > 0$ . Továbbá  $r_1 + r_2 \in \mathcal{A}(k)$ , mert a Markov-lánc pozitív valószínűséggel visszajuthat  $r_1 + r_2$  lépésben az  $E_k$  állapotból az  $E_k$  állapotba,  $r_1$  lépésben az  $E_l$  majd további  $r_2$  lépésben az  $E_k$  állapotba jutva. Ezért  $r_1 + r_2$  osztható a  $d$  számmal. Továbbá, ha  $n \in \mathcal{A}(l)$ , azaz  $P(n, l, l) > 0$  valamely  $n$  számra, akkor  $P(n + r_1 + r_2, k, k) \geq P(r_1, k, l)P(n, l, l)P(r_2, l, k) > 0$ , ezért  $n + r_1 + r_2$  osztható a  $d$  számmal. A fentiekből következik, hogy  $n$  osztható  $d$ -vel, és ezt kellett belátnunk.

Bevezetem a következő két definíciót.

**Zárt osztályok definíciója egy Markov-láncok állapotterében.** Legyen adva egy  $X_0, X_1, \dots$  Markov-lánc valamely  $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots\}$  állapotterén  $P(j, k)$  1 lépéses átmenetvalószínűségekkel. Azt mondjuk, hogy egy  $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$  halmaz az állapottér egy zárt

osztályát alkotja, ha minden  $E_j \in \mathcal{C}$  állapotra  $\sum_{k \in \mathcal{C}} P(j, k) = 1$ , azaz, ha a Markov-lánc egy  $\mathcal{C}$  halmazbeli állapotból indul, akkor egy valószínűséggel a következő lépésben is egy ilyen állapotban marad.

**Irreducibilis, zárt osztályok definíciója egy Markov-lánc állapotterében.** Azt mondjuk, hogy egy Markov-lánc állapotterének egy zárt osztálya irreducibilis, ha önmagán és az üres halmazon kívül nincs más olyan részhalmaza, amely zárt osztály. Egy Markov-láncot irreducibilisnak hívunk, ha a teljes állapotter irreducibilis (zárt) osztály.

Az előző eredményből kiolvasható, hogy ha veszünk egy rekurrens állapotot, akkor ez az állapot az összes olyan állapottal együtt, amelyek egy 1 valószínűséggel ebből az állapotból induló Markov-láncban pozitív valószínűséggel elérhetőek zárt osztályt alkotnak. A tranziens állapotok osztályozása nem ilyen egyszerű, áttekinthető. Az egyik lehetőségre a következő feladat mutat példát.

**Feladat.** Legyen  $X_1, X_2, \dots$  bolyongás a  $d$ -dimenziós téren. Ez irreducibilis Markov-lánc (azaz egyetlen irreducibilis osztályból áll), melynek elemei 2 periódikusak. Ha  $d = 1$  vagy  $d = 2$  akkor ennek az osztálynak az elemei null rekurrens állapotok, ha  $d \geq 3$  akkor tranziens állapotok.

Látni fogunk példát olyan Markov-láncokra is, amelynek tranziens állapotai nem tartoznak egyetlen zárt osztályba sem.

Bebizonyítom az előző tétel segítségével az irreducibilis zárt osztályok néhány tulajdonságát.

**Tétel Markov-lánc irreducibilis zárt osztályainak tulajdonságairól.** Legyen  $\mathcal{C}$  egy  $X_0, X_1, \dots$ ,  $P(n, j, k) = P(X_n = E_k | X_0 = E_j)$  átmenetvalószínűségekkel rendelkező Markov-lánc  $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots\}$  állapotterének irreducibilis, zárt osztálya. Ekkor minden  $E_k \in \mathcal{C}$  és  $E_l \in \mathcal{C}$ , állapotpárra az  $E_l$  állapot elérhető az  $E_k$  állapotból, azaz létezik olyan  $r$  pozitív egész szám, amelyre  $P(r, k, l) > 0$ . Egy irreducibilis osztály minden elemének ugyanaz a periódusa, és egy irreducibilis osztály minden eleme egyidejűleg, tranziens, null-rekurrens vagy pozitív rekurrens állapot. Ha  $E_j$  a Markov-lánc rekurrens állapota, akkor az előző tételben definiált  $\mathcal{C}(j)$  halmaz, amely azokból az állapotokból áll, amelyeket az  $E_j$  állapotból pozitív valószínűséggel el lehet érni, irreducibilis, zárt osztály. Minden olyan zárt, irreducibilis osztály, amely tartalmaz egy  $E_j$  rekurrens állapotot megegyezik egy ilyen  $\mathcal{C}(j)$  osztállyal.

*A tétel bizonyítása.* Adva egy  $\mathcal{C}$  zárt osztály és egy  $E_k \in \mathcal{C}$  állapot definiáljuk azt a  $\mathcal{C}^{(k)} \subset \mathcal{C}$  halmazt, amely azokból az  $E_p \in \mathcal{C}$  állapotokból áll, amelyekre  $P(n, k, p) > 0$  valamely  $n$  számra. Azt állítom, hogy  $\mathcal{C}^{(k)}$  is zárt osztály. Innen következik a Tétel első állítása, mert ha a  $\mathcal{C}$  halmaz valamelyik állapota nem érhető el az  $E_k$  állapotból, azaz ha létezik olyan  $E_l$  állapot, amelyre  $P(n, k, l) = 0$  minden pozitív egész  $n$  számra, akkor  $\mathcal{C}^{(k)}$  a  $\mathcal{C}$  halmaz olyan nem üres, valódi részhalmaza, (mert  $\mathcal{C}$  nem üres halmaz, az  $E_l$  állapotot viszont nem tartalmazza), amely zárt osztály. Ez azt jelenti, hogy  $\mathcal{C}$  nem irreducibilis.

Világos, hogy  $\sum_{l: E_l \in \mathcal{C}^{(k)}} P(n, k, l) = 1$  minden  $n = 1, 2, \dots$  számra, mert  $\mathcal{E} \setminus \mathcal{C}^{(k)}$

csak olyan  $E_l$  állapotokat tartalmaz, amelyekre  $P(n, k, l) = 0$  minden  $n = 1, 2, \dots$  számra. Azt állítom, hogy ha  $E_l \in \mathcal{C}^{(k)}$ , akkor a  $\sum_{p: E_p \in \mathcal{C}^{(k)}} P(n, l, p) = 1$  relációnak is

teljesülnie kell minden  $n = 1, 2, \dots$  számra, amiből következik, hogy  $\mathcal{C}^{(k)}$  zárt osztály. A bizonyítandó állítás igaz, mert ellenkező esetben lenne olyan  $n \geq 1$  szám, amelyre  $\sum_{p: E_p \in \mathcal{C}^{(k)}} P(n, l, p) < 1$ . Ekkor létezik olyan  $r$  szám, amelyre  $P(r, k, l) > 0$ , és

$$\sum_{\bar{l}: E_{\bar{l}} \in \mathcal{C}^{(k)}} P(n+r, k, \bar{l}) \leq \sum_{\bar{l}: E_{\bar{l}} \in \mathcal{E} \setminus \{E_l\}} P(r, k, \bar{l}) + P(r, k, l) \sum_{p: E_p \in \mathcal{C}^{(k)}} P(n, l, p) = 1 - P(r, k, l) + P(r, k, l) \sum_{p: E_p \in \mathcal{C}^{(k)}} P(n, l, p) < 1, \text{ és ez ellentmondás.}$$

Az irreducibilis osztályok már bizonyított tulajdonságából következik az előző tétel bizonyításának befejezéséhez hasonlóan, hogy egy ilyen osztály minden elemének ugyanannyi a periódusa. Az előző tételben láttuk, hogy egy rekkurens  $E_j$  állapotra a  $\mathcal{C}(j)$  halmaz az állapotter egy zárt osztálya. Továbbá, ha  $\bar{\mathcal{C}} \subset \mathcal{C}(j)$  nem üres zárt osztály, akkor létezik egy  $E_k \in \bar{\mathcal{C}}$  elem, és ezért  $\mathcal{C}(j) = \mathcal{C}(k) \subset \bar{\mathcal{C}}$ . Ezért  $\mathcal{C}(j)$  irreducibilis zárt osztály. Továbbá, ha egy irreducibilis zárt osztály tartalmaz egy rekkurens  $E_j$  állapotot, akkor tartalmazza a zárt  $\mathcal{C}(j)$  osztályt is, ezért megegyezik vele. Innen következik, hogy egy irreducibilis zárt osztálynak vagy mindegyike eleme tranziens állapot vagy megegyezik valamelyik  $\mathcal{C}(j)$  halmazzal, ahol  $E_j$  rekkurens állapot. Egy ilyen osztály minden eleme rekkurens null vagy rekkurens pozitív állapot. A tétel bizonyítását befejeztük.

Megfogalmazom a fenti eredmények alábbi következményét.

**Következmény.** Legyen  $X_0, X_1, \dots$  Markov-lánc  $P(n, j, k) = P(X_n = E_k | X_0 = E_j)$  átmenetvalószínűségekkel egy  $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots\}$  állapotterén. Bontsuk fel az  $\mathcal{E}$  állapotteret az  $\mathcal{E} = \mathcal{R} \cup \mathcal{T}$  képlettel az  $\mathcal{R}$  rekkurens és  $\mathcal{T}$  tranziens állapotokból álló halmazok uniójaként. A  $\mathcal{R}$  halmaz felbontható  $\mathcal{C}(j)$  diszjunkt irreducibilis, zárt osztályok uniójaként. Ha  $E_k, E_l \in \mathcal{C}(j)$  az  $\mathcal{R}$  halmaz egy irreducibilis, zárt  $\mathcal{C}(j)$  osztályára, akkor  $F(k, l) = 1$  a (10') képletben definiált  $F(\cdot, \cdot)$  függvényen.

*Bizonyítás.* A megfogalmazott eredmények következnek a Markov-lánc irreducibilis zárt osztályainak és egy Markov-lánc állapotainak tulajdonságairól szóló tételek eredményeiből. Azt kell még megmutatnunk, hogy ha két az utóbbi tétel megfogalmazásában definiált  $\mathcal{C}(j)$  és  $\mathcal{C}(k)$  halmaz nem diszjunkt, akkor  $\mathcal{C}(j) = \mathcal{C}(k)$ . De ebben az esetben létezik egy  $E_l \in \mathcal{C}(j) \cap \mathcal{C}(k)$  állapot, és  $\mathcal{C}(j) = \mathcal{C}(l) = \mathcal{C}(k)$ .

A fent megfogalmazott következményben egy Markov-lánc rekkurens állapotainak halmazát felbontottuk irreducibilis, zárt halmazok uniójaként. A tranziens állapotok halmazának nincs ilyen egyértelmű leírása. Ennek megmutatása érdekében a bolyongások állapotterének leírásáról szóló feladatot kiegészíttem a következő példával.

**Példa.** Definiáljuk a következő Markov-láncot a két-dimenziós tér egész koordinátájú rácspontjain: Ha a Markov-lánc valamely  $(j, k)$ ,  $j \neq 0$  pontban van, akkor a következő lépésben egyforma  $\frac{1}{4}$  valószínűséggel lép a  $(j-1, k)$ ,  $(j+1, k)$ ,  $(j, k+1)$ ,  $(j, k-1)$  szomszéd

pontok valamelyikébe. Ha a Markov-lánc valamely  $(0, k)$  alakú pontban van, akkor a következő lépésben  $\frac{1}{2}$  valószínűséggel lép a  $(0, k + 1)$  vagy a  $(0, k - 1)$  pontba. Ennek a Markov-láncnak a  $(0, k)$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  alakú pontok a rekurrens állapotai, amelyek irreducibilis zárt osztályt alkotnak. Ennek elemei null-rekurrens, 2 periódusú állapotok. A  $(j, k)$ ,  $j \neq 0$  alakú pontok tranzienzensek. Egy ilyen állapotból kiinduló Markov-lánc 1 valószínűséggel eljut a rekurrens állapotokból álló halmazba, ezért nincs olyan irreducibilis zárt osztály, amely ezeket tartalmazza.

*Feladat:* Bizonyítsuk be a fenti példa állítását.

Egy irreducibilis Markov-láncokról szóló állítást fogjuk bebizonyítani, azaz olyan Markov-láncot fogunk tekinteni, amelynek állapottere egyetlen, zárt osztály. Az ismertett tétel feltételt ad arra, hogy mikor van egy ilyen Markov-láncnak stacionárius eloszlása.

**Tétel irreducibilis Markov-láncok stacionárius eloszlásáról.** Legyen  $X_0, X_1, \dots$  irreducibilis, aperiódikus Markov-lánc  $P(n, j, k) = P(X_n = E_k | X_0 = E_j)$  átmenetvalószínűségekkel egy  $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots\}$  állapottéren.

a) Ha a Markov-lánc állapotai pozitív rekurrenssek, akkor az  $u_j = \lim_{n \rightarrow \infty} P(n, i, j) > 0$  határértékek léteznek,  $u_j = \frac{1}{\mu_j}$ , ahol a  $\mu_j$  számok a (2) formulában vannak definiálva. Az  $u_j$  számok,  $E_j \in \mathcal{E}$ , a Markov-lánc stacionárius eloszlását definiálják, azaz teljesítik a (13) és (14) formulákat.

b) Megfordítva, ha a Markov-láncnak van  $u_j$ ,  $j \in \mathcal{E}$ , stacionárius eloszlása, akkor a Markov-lánc ergodikus, azaz pozitív rekurrens állapotokkal rendelkezik, (és aperiódikus). A Markov-lánc (egyetlen) stacionárius eloszlása teljesíti az  $u_j = \frac{1}{\mu_j}$ ,  $E_j \in \mathcal{E}$ , azonosságot.

*A tétel bizonyítása.* Tekintsük először azt az esetet, amikor az a) rész feltételei teljesülnek. Az egy Markov-lánc egy állapotának jellemzéséről szóló tételben bizonyított (12) formulából és a Markov-lánc állapotainak tulajdonságairól szóló tételből következik, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n, i, j) = F(i, j) \frac{1}{\mu_j} = \frac{1}{\mu_j}$ . Azt kell még belátnunk, hogy az  $u_j = \frac{1}{\mu_j}$ ,  $E_j \in \mathcal{E}$ , számok teljesítik a (13) és (14) azonosságot. Először azt mutatom meg, hogy

$$u_j = \sum_{k: E_k \in \mathcal{E}} u_k P(m, k, j) \quad \text{minden } m = 1, 2, \dots, \text{ számra.} \quad (15)$$

Ennek érdekében írjuk fel a

$$P(n + m, i, j) = \sum_{k: E_k \in \mathcal{E}} P(n, i, k) P(m, k, j)$$

és próbáljunk limeszt venni az  $n$  változó szerint mind a két oldalon felhasználva azt, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n + m, i, j) = u_j$  és  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n, i, k) = u_k$ . Mivel a jobb oldalon szereplő

$P(m, k, j)$  együtthatók összege (rögzített  $j$ -re és a  $k$  változó szerint összegezve) lehet divergens is, egyelőre csak az alábbi a kívántnál gyengébb összefüggést tudjuk felírni (felhasználva, hogy a jobb-oldalon szereplő számok mind nem-negatívak):

$$u_j \geq \sum_{k: E_k \in \mathcal{E}} u_k P(m, k, j) \quad (15a)$$

Hasonlóan a  $\sum_{k: E_k \in \mathcal{E}} P(n, i, k) = 1$  azonosságból kapjuk  $n \rightarrow \infty$  határátmenettel, hogy

$$s = \sum_{k: E_k \in \mathcal{E}} u_k \leq 1. \quad (16)$$

Ezt az egyenlőtlenséget felhasználva, és összegezve  $j$ -re a (15a) egyenlőtlenségeket azt kapjuk, hogy

$$s = \sum_{j: E_j \in \mathcal{E}} u_j \geq \sum_{j: E_j \in \mathcal{E}} \sum_{k: E_k \in \mathcal{E}} u_k P(m, k, j) = \left( \sum_{j: E_j \in \mathcal{E}} P(m, k, j) \right) \left( \sum_{k: E_k \in \mathcal{E}} u_k \right) = s.$$

Mivel az utolsó egyenlőtlenségsor bal és jobb oldala egyenlő (és véges), a felhasznált (15a) egyenlőtlenségekben mindenütt azonosságnak kell állni, tehát a (15) formula érvényes.

Ha a (15) formulát  $m = 1$  választással tekintjük, megkapjuk a (14) képletet. Tekintsük újból a (15) formulát tetszőleges  $j$  számmal, és tartsunk végtelenhez az  $m$  paraméterrel. Ekkor felhasználva a (16) formulát (pontosabban csak azt, hogy az ott tekintett összeg véges) azt kapjuk, hogy

$$u_j = \sum_{k: E_k \in \mathcal{E}} u_k u_j = u_j \sum_{k: E_k \in \mathcal{E}} u_k.$$

Mivel  $u_j = \frac{1}{\mu_j} > 0$ , innen következik a (13) reláció.

Rátérek a b) rész bizonyítására. Megmutatom  $n$  szerinti teljes indukcióval a Chapman–Kolmogorov egyenlet segítségével, hogy a b) esetben teljesül a (14) képlet következő általánosítása is.

$$u_j = \sum_{i: E_i \in \mathcal{E}} u_i P(n, i, j) \quad \text{minden } j = 1, 2, \dots \text{ és } n = 1, 2, \dots \text{ számra.} \quad (14')$$

Valóban, ha a (14') formula igaz az  $n$  számra, akkor

$$\begin{aligned} \sum_{i: E_i \in \mathcal{E}} u_i P(n+1, i, j) &= \sum_{i: E_i \in \mathcal{E}} u_i \sum_{k: E_k \in \mathcal{E}} P(n, i, k) P(k, j) \\ &= \sum_{k: E_k \in \mathcal{E}} P(k, j) \sum_{i: E_i \in \mathcal{E}} u_i P(n, i, k) = \sum_{k: E_k \in \mathcal{E}} P(k, j) u_k = u_j, \end{aligned}$$

tehát a (14') azonosság igaz  $n + 1$ -re is.

Alkalmazzunk  $n \rightarrow \infty$  határátmenetet a (14') képletben. Azt állítom, hogy a Markov-lánc ergodikus, minden  $i$  és  $j$  indexre létezik a  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n, i, j) = \frac{1}{\mu_j} > 0$  (2) képletben definiált határérték, és

$$u_j = \sum_{i: E_i \in \mathcal{E}} u_i \frac{1}{\mu_j} \quad \text{minden } j = 1, 2, \dots \text{ számra.} \quad (17)$$

Valóban, mivel irreducibilis Markov-láncot tekintünk, a Markov-lánc minden állapota egyszerre tranzienst, null-rekurrens vagy pozitív rekurrens. Viszont az első két esetben  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n, i, j) = 0$ , ezért a (14') formulában elvégzett határátmenet azt adná, hogy  $u_j = 0$  minden  $j$  indexre. Ez viszont ellentmond a (13) relációnak. Ezért a Markov-lánc állapotai pozitív rekurrens. Mivel feltettük, hogy a Markov-lánc aperiódikus, ezért ergodikus, az átmenet valószínűségeknek az előző bekezdésben felírt határértékeik vannak, és teljesül a (17) formula. A (17) és (13) formulák alapján viszont

$$u_j = \sum_{i: E_i \in \mathcal{E}} u_i \frac{1}{\mu_j} = \frac{1}{\mu_j} \sum_{i: E_i \in \mathcal{E}} u_i = \frac{1}{\mu_j} \quad \text{minden } j = 1, 2, \dots \text{ számra.}$$

Ez azt jelenti, hogy egy ergodikus Markov-láncnak  $u_j = \frac{1}{\mu_j}$ ,  $E_j \in \mathcal{E}_j$ , az egyetlen stacionárius eloszlása.

*Feladat:* Lássuk be az előző feladat eredményének a segítségével, hogy egy  $X_0, X_1, \dots$ , irreducibilis, ergodikus Markov-lánc eloszlása tetszőleges kezdeti eloszlás esetén konvergál a Markov-lánc stacionárius eloszlásához, ha  $n \rightarrow \infty$ , azaz  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = E_j) = u_j$  minden  $u_j$  állapotra.

A korábbi eredményekben feltettem, hogy a tekintett Markov-lánc aperiódikus. Ezt elsősorban kényelmi szempontok miatt tettem. Periódikus Markov-láncok vizsgálata hasonlóan történhet, és az eredmények is hasonlóak, csak a jelölés válik kissé bonyolultabbá. Ezenkívül periódikus Markov-láncok vizsgálata visszavezethető az aperiódikus Markov-láncok esetére. Itt csak röviden áttekintem azt, hogy milyen eredmények érvényesek, és milyen észrevétel segítségével kaphatjuk meg azokat.

Legyen  $X_0, X_1, \dots$  irreducibilis Markov-lánc egy  $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots\}$  állapotterén  $P(n, j, k)$  átmenetvalószínűséggel. Tegyük fel, hogy a Markov-lánc állapotai pozitív rekurrens, és periódusok valamilyen  $d \geq 1$ . (Tudjuk, hogy egy irreducibilis Markov-lánc minden állapota egyszerre, tranzienst, null vagy pozitív rekurrens, és minden állapotnak ugyanaz a periódusa.) Tekintsük az  $X_0, X_1, \dots$  Markov-lánc mellett az  $\bar{X}_n = X_{dn}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  Markov-láncot is, amelynek állapottere megegyezik az eredeti Markov-lánc  $\mathcal{E}$  állapotterével, és értéke az  $n$  időpontban egyenlő az eredeti Markov-lánc értékével az  $nd$  időpontban. Ez utóbbi Markov-lánc aperiódikus,  $\bar{P}(j, k) = P(d, j, k)$  egy lépéses átmenetvalószínűségekkel, minden állapota pozitív rekurrens, de állapottere nem feltétlenül irreducibilis. Viszont meg tudjuk adni e Markov-lánc állapotterének felbontását  $d$  darab  $\mathcal{C}_0, \dots, \mathcal{C}_{d-1}$  irreducibilis osztály uniójaként.

Rögzítsük mondjuk az  $E_1 \in \mathcal{E}$  állapotot, és tekintsük minden  $E_k \in \mathcal{E}$  állapotra az  $\mathcal{N}_k = \{n: P(n, 1, k) > 0\}$  halmazt, azaz azon időpontok halmazát, amely időpontok alatt az  $E_1$  állapotból pozitív valószínűséggel jutunk az  $E_k$  állapotba. Nem nehéz belátni, hogy az  $X_0, X_1, \dots$  Markov-lánc  $d$  periódusa miatt létezik olyan  $0 \leq p \leq d - 1$  szám, hogy  $n = p \bmod d$  minden  $n \in \mathcal{N}_k$  számra. Nevezzük ezt a  $p$  számot az  $E_k$  állapot  $r(k)$  rangjának. Definiáljuk a  $\mathcal{C}_p \subset \mathcal{E}$ ,  $1 \leq p \leq d$ , halmazokat úgy, hogy  $E_k \in \mathcal{C}_p$  akkor és csak akkor, ha  $r(k) = p$ . Némi munkával be lehet látni, hogy a  $\bar{X}_0, \bar{X}_1, \dots$  Markov-lánc  $\mathcal{E}$  állapotterének felbontása irreducibilis zárt osztályokra a  $\mathcal{C}_p$ ,  $0 \leq p \leq d - 1$ , halmazokból áll. Továbbá, ha  $E_k \in \mathcal{C}_p$ ,  $E_l \in \mathcal{C}_q$  valamely  $p$  és  $q$  számokkal, akkor  $P(n, k, l) > 0$  csak akkor lehetséges, ha  $n = q - p \bmod d$ . Ezenkívül, ha  $E_k \in \mathcal{C}_p$ , és  $P(n, k, l) > 0$  valamely  $n$  időpontra, akkor  $E_l \in \mathcal{C}_q$  azzal a  $q$  számmal, amelyre  $n = q - p \bmod d$ .

A fenti összefüggések segítségével, és használva a már bizonyított eredményeket az  $\bar{X}_0, \bar{X}_1, \dots$  Markov-lánc megszorításán az irreducibilis  $\mathcal{C}_p$ ,  $1 \leq p \leq d - 1$  irreducibilis zárt osztályokra kapjuk, hogy létezik a

$$du_j = \lim_{n \rightarrow \infty} P(dn + q - p, i, j) = \frac{d}{\mu_j} \quad \text{ha } E_i \in \mathcal{C}_p \quad \text{és } E_j \in \mathcal{C}_q$$

határérték, ahol a  $\mu_j$  szám a (2) képletben van definiálva, és  $P(dn + r, i, j) = 0$ , ha  $r \neq q - p \bmod p$ . Továbbá az is igaz, hogy az  $u_j = \frac{1}{\mu_j}$  számok alkotják a Markov-lánc (egyetlen) stacionárius eloszlását. A részletek bizonyítását elhagyom.

Rátérek véges állapotterű, azaz véges sok különböző értéket felvevő Markov-láncok rövid tárgyalására. Véges állapotterű Markov-láncok rendelkeznek néhány extra tulajdonsággal, amelyeket a következő tételben fogalmazok meg. Ezenkívül a sztochasztikus mátrixok néhány lineáris algebrai tulajdonsága segít véges állapotterű Markov-láncok vizsgálatában.

**Tétel véges állapotterű Markov-láncok tulajdonságairól.** *Egy véges állapotterű Markov-láncnak mindig van pozitív rekurrens állapota, viszont nincs null rekurrens állapota. Egy tranziens állapotból elindított Markov-lánc 1 valószínűséggel bekerül a Markov-lánc rekurrens állapotaiból álló halmazba.*

*A tétel bizonyítása.* Mivel egy véges Markov-lánc  $n$  lépéses átmenetvalószínűségeit is egy sztochasztikus mátrix adja meg, amelynek mérete nem függ az  $n$  számtól, és egy sztochasztikus mátrix sorösszege 1, ezért, rögzítve a sztochasztikus mátrix  $i$ -edik sorát valamely  $i$  számmal, létezik olyan  $j$  index, amelyre  $\limsup_{n \rightarrow \infty} P(n, i, j) > 0$ . Viszont egy ilyen  $j$  indexhez tartozó  $E_j$  állapot pozitív rekurrens, mert sem tranziens, sem null rekurrens nem lehet. Mivel a Markov-lánc rekurrens állapotaiból álló halmaz felbontható diszjunkt irreducibilis zárt osztályok uniójára, és egy irreducibilis zárt osztály elemei egyidejűleg pozitív vagy null rekurrens állapotok, ezért tekintve a Markov-lánc megszorítását egy irreducibilis zárt osztályra az előző érvelés alapján kapjuk, hogy a Markov-láncnak nincs null rekurrens állapota. Végül, ha egy tranziens  $E_i$  állapotból elindított Markov-lánc pozitív valószínűséggel elkerülné a Markov-lánc rekurrens állapotaiból álló halmazt, akkor (újából a Markov-lánc véges állapottere miatt létezne

a Markov-láncnak olyan  $E_j$  tranziens állapota, amelyre  $\limsup_{n \rightarrow \infty} P(n, i, j) > 0$ , és ez ellentmondás.

Egy Markov-lánc viselkedéséről nagyon hasznos információt ad az a Markov-lánc átmenetvalószínűségeit megadó sztochasztikus mátrix spektrumának, azaz sajátértékeinek és sajátvektorainak az ismerete. Vegyük észre, hogy egy sztochasztikus mátrixnak, ha jobbról szorozzuk meg oszlopvektorokkal, akkor a csupa 1 koordinátából álló vektor sajátvektor 1 sajátértékkel. Továbbá 1-nél nagyobb sajátértékkel rendelkező (oszlop) sajátvektor nem lehetséges. Azt is tudjuk a lineáris algebrából, hogy egy mátrixot akár balról szorozzuk meg egy sorvektorral, akár jobbról egy oszlopvektorral, ugyanazok lesznek a sajátértékei. (A sajátvektorai lényegesen különbözhetnek.)

*Feladat.* Lássuk be, hogy egy sztochasztikus mátrixnak nem lehet 1-nél nagyobb sajátértékkel rendelkező (oszlop) sajátvektora.

*Segítség:* Mutassuk meg, hogy az eredeti vektor legnagyobb abszolút értékű koordinátájának az abszolút értéke nagyobb vagy egyenlő, mint a képvektor bármely koordinátájának az abszolút értéke.

Tudjuk tehát, hogy egy sztochasztikus mátrixnak létezik egy 1 sajátértékkel rendelkező (sor) sajátvektora. Enyhe plusz feltevések mellett azt is lehet tudni, hogy ennek összes koordinátája pozitív, és szép esetekben az is igaz, hogy a sztochasztikus mátrix összes többi sajátértéke szigorúan kisebb, mint 1. Ilyen esetben a sztochasztikus mátrix  $n$ -ik hatványának viselkedéséről nagyon értékes információt nyerhetünk. Ugyanis felírva a mátrix által meghatározott lineáris transzformációt olyan koordinátarendszerben, ahol annak a lehető legegyszerűbb az alakja (ez a Jordan féle normálalak használatát jelenti) be lehet látni, hogy a következő aszimptotikus reláció érvényes. Tekintsünk egy tetszőleges nem negatív értékű koordinátákból álló sorvektort, amelyben a koordináták összege 1. Ha alkalmazzuk erre a vektorra az átmenetvalószínűségek által meghatározott sztochasztikus mátrix  $n$ -ik hatványát, akkor olyan vektort kapunk, amely e mátrix 1 sajátértékű sajátvektorától az ( $n$  változó függvényében) exponenciálisan kis különbséggel tér el. Ez azt jelenti, hogy a mátrix sajátvektora adja meg a Markov-lánc stacionárius eloszlását, és ha a Markov-láncot tetszőleges kezdeti eloszlással indítjuk el, akkor a Markov-lánc eloszlása az  $n$  idő függvényében exponenciális sebességgel konvergál a stacionárius eloszláshoz.

Az előbb vázolt gondolatmenet azt mutatja, hogy hasznos olyan eredményeket bizonyítani, amelyek megmondják, hogy egy sztochasztikus mátrixnak mikor van egyetlen 1 sajátértékű sajátvektora. A Markov-láncok elméletében Perron egy tétele, illetve annak Frobenius által bizonyított általánosítása hasznos. Ezek az eredmények olyan mátrixokkal foglalkoznak, amelyeknek összes együtthatója nem negatív. Perron tételét fogom kimondani, és röviden jelzem, hogy milyen általánosítását adta ennek az eredménynek Frobenius.

**Perron tétele.** Legyen egy  $A$   $n \times n$  méretű négyzetes mátrix minden eleme szigorúan pozitív szám. Az  $A$  mátrix  $\det(A - \lambda I)$  karakterisztikus polinomjának, (ahol  $I$  az  $n \times n$ -es diagonális egységmátrix) legnagyobb abszolút értékű gyöke szigorúan pozitív, egyszeres

gyök, és a karakterisztikus polinom összes többi gyökének az abszolút értéke szigorúan kisebb, mint ez a sajátérték. Az  $A$  mátrixnak a karakterisztikus polinom legnagyobb sajátértékéhez tartozó egyszerű sajátvektorának mindegyik koordinátája szigorúan pozitív szám. Ha az  $A$  mátrix sztochasztikus mátrix, azaz minden sorösszege 1-gyel egyenlő, akkor karakterisztikus polinomjának a legnagyobb gyöke 1.

Perron tétele alkalmazható olyan véges állapotterű Markov-lánc vizsgálatában, amelynek összes egy-lépéses átmenetvalószínűségei szigorúan pozitívak. Számunkra a következő eredmény érdekes.

**A Perron tétel egy következménye Markov láncok viselkedéséről.** *Teljesítse egy  $E_1, \dots, E_m$  állapotokat tartalmazó Markov lánc  $\Pi$  átmenetvalószínűség mátrixa a Perron tétel feltételeit. Ekkor a Markov lánc irreducibilis, és  $q_j = P(X_0 = E_j)$ ,  $1 \leq j \leq m$ , stacionárius eloszlása megegyezik a  $\Pi$  mátrix azon 1 sajátértékű  $q = (q_1, \dots, q_m)$  sajátvektorával, amelyre  $\sum_{k=1}^m q_k = 1$ . A Markov lánc tetszőleges 0 időpontbeli eloszlása esetén a Markov lánc  $n$  időpontbeli eloszlása (az  $n$  változó szerint) exponenciális sebességgel tart a  $q$  eloszláshoz, amikor  $n \rightarrow \infty$ .*

*A következmény bizonyítása.* Mivel a tekintett Markov lánc bármely állapotából a Markov lánc bármely más állapotába pozitív valószínűséggel el lehet jutni (1 lépésben), a Markov lánc irreducibilis. A Markov lánc stacionárius eloszlása megegyezik a Perron tétel állítása szerint létező  $q$  vektorral. A következmény állításának igazolásához azt kell még megmutatni, hogy tetszőleges  $p = (p_1, \dots, p_m)$ ,  $p_j \geq 0$ ,  $1 \leq j \leq m$ ,  $\sum_{j=1}^m p_j = 1$  alakú vektorra  $\lim_{n \rightarrow \infty} p\Pi^n = q$ , és a konvergencia exponenciális sebességű ebben a relációban.

Tekintsük a  $\Pi$  mátrix  $J$  Jordan-féle normálalakját, és azt az  $e^{(1)}, \dots, e^{(m)}$  bázist, amelyben a  $\Pi$  mátrix ezt a Jordan féle normálakat veszi fel. Ekkor  $e^{(1)} = q$ , a mátrix 1 sajátértékű sajátvektora, egy  $1 \times 1$  méretű Jordan kalickában van, és a Jordan-féle normálalakban szereplő összes többi sajátérték szigorúan kisebb, mint 1. Ezért, ha a Markov lánc  $p = (p_1, \dots, p_m)$  eloszlásvektorát felírjuk  $p = c_1 q + \sum_{j=2}^m c_j e^{(j)}$  alakban, akkor a Markov lánc  $n$  időpontbeli  $p^{(n)} = (p_1^{(n)}, \dots, p_m^{(n)}) = p\Pi^n$  eloszlására a  $p^{(n)} = c_1 q + \sum_{j=2}^m c(j, n) e^{(j)}$  reláció teljesül alkalmas exponenciálisan kicsi  $c(j, n)$  együtthatókkal, azaz létezik olyan  $0 < \lambda < 1$  szám, amelyre érvényes a  $\lim_{n \rightarrow \infty} c(j, n) \lambda^{-n} = 0$  reláció

minden  $2 \leq j \leq m$  számra. Azt kell még észrevenni, hogy a  $p = c_1 q + \sum_{j=2}^m c_j e^{(j)}$

relációban  $c_1 = 1$ , mert  $1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m p_j^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( c_1 \sum_{j=1}^m q_j + \sum_{j=2}^m c(j, n) \sum_{s=1}^m e_s^{(j)} \right) = c_1$ ,

ahol  $e^{(j)} = (e_1^{(j)}, \dots, e_m^{(j)})$ ,  $2 \leq j \leq m$ .

A Perron tételben tekintett mátrixok irreducibilis és 1 periódusú Markov-láncok vizsgálatában használhatóak. Algebrai módon jellemezhetőek az irreducibilis Markov-

láncok átmenetvalószínűségei által meghatározott sztochasztikus mátrixok általánosan is. Be lehet vezetni a nem-negatív elemű, úgynevezett irreducibilis mátrixok fogalmát az általános esetben, amely az irreducibilis Markov-láncok által meghatározott sztochasztikus mátrixok természetes általánosítása. A Perron tétel Frobenius által bizonyított általánosítása irreducibilis, nem-negatív elemű mátrixok legnagyobb abszolút értékű sajátértékeinek és a hozzájuk tartozó sajátvektorok jellemzését adja meg. Ennek megfogalmazása, amelyet ebben az ismertetésben elhagyok, bonyolultabb, mint az eredeti Perron tételé. Ez a bonyolultság azzal függ össze, hogy Frobenius eredménye nemcsak az aperiódikus, hanem az irreducibilis, periódikus Markov-láncok viselkedésének a leírását is lehetővé teszi.

## Kiegészítés.

### A felújítási tétel bizonyítása.

Legyenek  $Y_1, Y_2, \dots$  független, egyforma eloszlású pozitív egész értékű valószínűségi változók,  $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , és definiáljuk a következő mennyiségeket:  $f_k = P(Y_1 = k)$ ,  $\mu = EY_1 = \sum_{k=1}^{\infty} kf_k$ ,  $B(\omega) = \{S_1(\omega), S_2(\omega), \dots\}$ ,  $u_n = P(n \in B(\omega))$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , és  $u_0 = 1$ . Vegyük észre, hogy teljesülnek a

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k = 1, \quad \text{és} \quad f_k \geq 0 \quad \text{minden } k = 1, 2, \dots \text{ számra,} \quad (\text{A1})$$

valamint az

$$u_n = f_1 u_{n-1} + f_2 u_{n-2} + \dots + f_n u_0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{A2})$$

relációk. Az (A1) formula azt fejezi ki, hogy az  $Y_1$  valószínűségi változó értéke 1 valószínűséggel egy pozitív egész szám. Az (A2) formula azért igaz, mert  $f_j u_{n-j}$  annak a valószínűsége, hogy  $Y_1 = j$ , és  $Y_2 + \dots + Y_l = n - j$  valamilyen  $l \geq 2$  számra, ha  $1 \leq j < n$ , és  $f_n u_n$  annak a valószínűsége, hogy  $Y_1 = n$ . (Vegyük észre, hogy mivel az  $Y_j$  valószínűségi változók függetlenek és azonos eloszlásúak, ezért  $u_m = P(\{\omega: Y_2(\omega) + \dots + Y_l(\omega) = m \text{ valamely } l = 2, 3, \dots, \text{ számra}\})$ .) Továbbá a felújítási tétel feltételei szerint az  $\mathcal{A} = \{j: f_j > 0\}$  halmazban szereplő számok legnagyobb közös osztója 1. Ezért a felújítási tétel következik az alább megfogalmazott és később bebizonyítandó eredményből.

**Tétel A.** *Legyenek  $f_1, f_2, \dots$  pozitív egész számok, amelyek teljesíti az (A1) relációt, és amelyekre az  $\mathcal{A} = \{j: f_j > 0\}$  halmazban szereplő számok legnagyobb közös osztója 1. Legyen  $u_0 = 1$ , és definiáljuk az  $u_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , számokat rekurzíve az (A2) formula segítségével. Ekkor*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{1}{\mu}, \quad \text{ahol } \mu = \sum_{k=1}^{\infty} f_k. \quad (\text{A3})$$

*A  $\mu = \infty$  esetben az (A3) formula a  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$  azonosságot adja.*

A Tétel A állítását a következő Propozíció segítségével fogjuk bebizonyítani.

**Propozíció.** *Teljesüljenek a Tétel A feltételei. Vezessük be a Tétel A jelöléseit használva az  $\eta = \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n$  mennyiséget. Ekkor létezik olyan  $n_1 < n_2 < \dots$  számsorozat, amelyre igaz, hogy*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} u_{n_j+k} = \eta = \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n \quad \text{minden } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \text{ számra.} \quad (\text{A4})$$

Először megmutatom, hogy hogyan következik a Tétel A a Propozíció állításából.

Vezessük be a  $\rho_k = f_{k+1} + f_{k+2} + \dots$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , mennyiségeket. Ekkor az (A1) képlet szerint  $\rho_0 = 1$ , és a  $\mu$  mennyiséget  $\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k$  alakban írhatjuk. Valóban,

$$\mu = \sum_{k=1}^{\infty} k f_k = \sum_{k=1}^{\infty} k(\rho_{k-1} - \rho_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k.$$

Továbbá az (A2) formulából következik az alábbi azonosság.

$$\rho_0 u_N + \rho_1 u_{N-1} + \dots + \rho_N u_0 = 1 \quad \text{minden } N = 1, 2, \dots \text{ számra.} \quad (\text{A5})$$

Valóban az (A2) formulát összegezve  $1 \leq n \leq N$ -re kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} u_1 + \dots + u_N &= u_{N-1} f_1 + u_{N-2}(f_1 + f_2) + \dots + u_0(f_1 + \dots + f_N) \\ &= u_{N-1}(\rho_0 - \rho_1) + u_{N-2}(\rho_0 - \rho_2) + \dots + u_0(\rho_0 - \rho_N) \\ &= \rho_0(u_{N-1} + \dots + u_0) - (\rho_1 u_{N-1} + \rho_2 u_{N-2} + \dots + \rho_N u_N). \end{aligned}$$

Innen, mivel  $\rho_0 = 1$  és  $u_0 = 1$

$$\begin{aligned} u_N &= u_0 - (\rho_1 u_{N-1} + \rho_2 u_{N-2} + \dots + \rho_N u_N) \\ &= u_N + 1 - (\rho_0 u_N + \rho_1 u_{N-1} + \rho_2 u_{N-2} + \dots + \rho_N u_N), \end{aligned}$$

ahonnan következik az (A5) azonosság.

Bizonyítsuk be a Tétel A állítását először a  $\mu = \infty$  esetben. Alkalmazzuk az (A5) formulát olyan  $N = n_j$  indexekre, amelyek teljesítik a Propozíció állítását, azaz  $\lim_{j \rightarrow \infty} \rho_{n_j-k} = \eta = \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n$  minden  $k > 0$  számra, és hajtsuk végre a  $j \rightarrow \infty$

határátmenetet. Ekkor az (A5) formulából, illetve a  $\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k = \infty$  azonosságból következik, hogy  $\eta = \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ . Viszont mivel  $u_n \geq 0$  minden  $n \geq 0$  indexre, innen adódik a  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$  reláció ebben az esetben.

A  $\mu < \infty$  esetben mutassuk meg először azt, hogy  $\eta = \frac{1}{\mu}$ . Az (A2) formulából látható, hogy  $0 \leq u_n \leq 1$  minden  $n$  indexre. Alkalmazzuk az (A5) formulát az  $N = n_j$

számokkal, ahol az  $n_j$  számok a Propozícióban szereplő indexeket jelölik, és tartsunk a  $j$  index-szel végtelenhez. Nem nehéz belátni, felhasználva a  $\lim_{j \rightarrow \infty} u_{n_j - k} \rho_k = \rho_k \eta$  relációt

minden fix  $k$  indexre, hogy a  $\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k < \infty$  esetben a  $j \rightarrow \infty$  határátmenet az (A5) formulában az

$$\eta(\rho_0 + \rho_1 + \dots) = 1$$

azonossághoz vezet, ahonnan  $\eta = \frac{1}{\mu}$ .

A Tétel A bizonyításának befejezéséhez elég azt megmutatni, hogy akárhogy rögzítünk egy  $\varepsilon > 0$  számot nem lehet a pozitív egész számok olyan  $n_j$  részsorozatát találni, amelyre  $\lim_{j \rightarrow \infty} u_{n_j} = \eta_0$  valamely  $0 \leq \eta_0 \leq \eta - \varepsilon$  számmal. Valóban, ha lenne ilyen sorozat, akkor felhasználva azt, hogy  $0 \leq u_n \leq \eta + \frac{\varepsilon}{2\mu}$   $n \geq n_0$  esetében alkalmas  $n_0$  küszöbindex-szel, és  $0 \leq u_n \leq 1$  minden  $n$ -re az (A5) formula baloldalán szereplő kifejezést a következő módon becsülhetnénk felülről  $N = n_j$  indexre elég nagy  $j$  számra.

$$\begin{aligned} & \rho_0 u_N + \rho_1 u_{N-1} + \dots + \rho_N u_0 \\ & \leq \left( \eta_0 + \frac{\varepsilon}{2\mu} \right) \rho_0 + (\rho_1 + \dots + \rho_K) \left( \eta + \frac{\varepsilon}{2\mu} \right) + \sum_{j=K+1}^{\infty} \rho_j \\ & \leq (\eta_0 - \eta) + \eta \sum_{l=0}^K \rho_l + \frac{\varepsilon}{2\mu} \sum_{l=0}^K \rho_l + \frac{\varepsilon}{4} \leq -\varepsilon + 1 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} \leq 1 - \frac{\varepsilon}{4}, \end{aligned}$$

ha először a  $K$ , majd attól függően a  $j$  indexet választjuk elég nagyra. A számolásban kihasználjuk az  $\eta\mu = 1$  és  $\mu = \sum_{l=0}^{\infty} \rho_l$  azonosságokat. A kapott egyenlőtlenség ellentmond az (A5) relációnak. Ezért a kívánt tulajdonságú  $\eta_0$  nem létezik, hanem teljesül a  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \eta = \frac{1}{\mu}$  azonosság.

A bizonyítás befejezéséhez be kell még bizonyítani a Propozíciót. Ennek érdekében válasszuk ki a pozitív egész számok egy olyan  $n_j$  részsorozatát, amelyre létezik minden  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  számra a  $\lim_{j \rightarrow \infty} u_{n_j + k} = w_k$  határérték, továbbá  $w_0 = \eta = \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n$ .

Ilyen részsorozat létezik. Valóban, mivel az  $u_n$  sorozat korlátos, ezért ki lehet választani pozitív egész számok egy olyan  $n_1^{(0)}, n_2^{(0)}, \dots$  részsorozatát, amelyre teljesül a  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n_j^{(0)}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n = \eta$  reláció. Ezután szukcesszíve ki lehet választani a természetes számok egymásba skatulyázott  $n_1^{(l)}, n_2^{(l)}, \dots$  részsorozatát minden  $l = 1, 2, \dots$  számra úgy, hogy teljesüljön a  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n_j^{(l)} + k} = w_k$  reláció minden  $|k| \leq l$  egész számra valamely  $w_k$  határértékkel. Ezután a szokásos átlós eljárással megkaphatjuk a kívánt tulajdonságú  $u_{n_j}$  sorozatot. Azt állítom, hogy az így kapott sorozat teljesíti a Propozícióban előírt tulajdonságokat. Azt kell még belátni, hogy a Propozíció feltételeinek teljesülése esetén  $w_k = \eta$  minden  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  számra.

Közvetlenül csak azt látjuk, hogy  $0 \leq w_k \leq \eta$  minden  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  számra, és  $w_0 = \eta$ . Ahhoz, hogy a még bizonyítandó állítást igazoljuk, először megmutatom, hogy

teljesül a

$$w_k = \sum_{l=1}^{\infty} f_l w_{k-l} \quad (\text{A6})$$

azonosság minden  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  számra. Valóban, definiáljuk a

$$V_k^{(j)} = \begin{cases} u_{n_j+k}, & \text{ha } n_j + k \geq 0 \\ 0, & \text{ha } n_j + k < 0 \end{cases}$$

számokat minden  $j = 1, 2, \dots$  és  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  indexre. Ekkor az (A2) formula alapján

$$V_k^{(j)} = \sum_{l=1}^{\infty} f_l V_{k-l}^{(j)},$$

és innen  $j \rightarrow \infty$  határátmenettel megkapjuk az (A6) formulát.

Megfogalmazom a következő Lemmmát.

**Lemma.** *Legyen  $w_k$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , valós számok olyan sorozata, amely teljesíti az (A6) relációt valamely az (A1) formulát kielégítő  $f_k$  sorozattal. Legyen továbbá  $0 \leq w_k \leq \eta$  minden  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  indexre,  $w_0 = \eta$ , és legyen az  $\mathcal{A} = \{j: f_j > 0\}$  halmazban szereplő számok legnagyobb közös osztója 1. Ekkor  $w_k = \eta$  minden  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  indexre.*

A Propozíció az (A6) reláció és a Lemma következménye. Ezért elegendő a Lemmát belátni.

*A lemma bizonyítása.* Mivel az  $f_k$  sorozat teljesíti az (A1) relációt, és  $0 \leq w_k \leq w_0 = \eta$  minden  $k$  indexre, az (A6) formula adja  $k = 0$  választással, hogy  $w_{-k} = \eta$  minden  $k \in \mathcal{A}$  indexre. Ezután az (A6) relációt  $k, -k \in \mathcal{A}$ , alakú számokra alkalmazva kapjuk, hogy  $w_{-(k_1+k_2)} = \eta$ , ha  $k_1, k_2 \in \mathcal{A}$ . Folytatva ezt az eljárást azt kapjuk, hogy minden  $k = \alpha_1 k_1 + \dots + \alpha_s k_s$  alakú lineáris kombinációra, ahol  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  pozitív egész számok, és  $k_1, \dots, k_s \in \mathcal{A}$  igaz a  $w_{-k} = \eta$  reláció. Másrészt azt állítom, hogy mivel a  $\mathcal{A}$  halmazban levő számok legnagyobb közös osztója 1, létezik olyan  $k_0$  küszöbindex, hogy minden  $k \geq k_0$  szám felírható a fenti alakú  $k = \alpha_1 k_1 + \dots + \alpha_s k_s$  lineáris kombinációként. Valóban, alapvető számelméleti eredmények alapján léteznek olyan  $a_1, \dots, a_j \in \mathcal{A}$  számok, és  $\beta_1, \dots, \beta_j$  egész, (nem feltétlenül pozitív) együtthatók, amelyekre teljesül a  $\sum_{s=1}^j \beta_s a_s = 1$  reláció. Legyen  $A = a_1 + \dots + a_j$ , és írjunk minden  $k$  pozitív egész számot  $k = tA + p$ ,  $0 \leq p < A$ , alakban. Ekkor a  $k = t(a_1 + \dots + a_j) + p \sum_{s=1}^j \beta_s a_s$  azonosság megadja minden elég nagy szám kívánt alakú előállítását.

A fentiekből következik, hogy létezik olyan  $k_0$  küszöbindex, hogy  $w_k = \eta$ , ha  $k \leq -k_0$ . Viszont ha  $w_l = \eta$  minden  $l \leq k$  számra valamely  $k$  számra, akkor az (A1) és (A6) formula (a  $k + 1$  indexre alkalmazva) azt adja, hogy  $w_{k+1} = \eta$ . Ezen észrevétel alapján teljes indukcióval kapjuk, hogy  $w_k = \eta$  minden  $k$  indexre. A lemmát bebizonyítottuk.