

## Feltételes várható érték fogalma és martingálok.

Először ismertetem a martingálok és szemimartingálok definícióját.

**Martingál és szemimartingál definíciója.** Legyen adva  $\sigma$ -algebrák  $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3 \subset \dots$  növekvő sorozata egy  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  valószínűségi mezőn, amelyre teljesül az  $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{A}$  tulajdonság minden  $n = 1, 2, \dots$  számra. Legyen adva ezen kívül  $\mathcal{F}_n$  mérhető  $\xi_n(\omega)$ ,  $E|\xi_n(\omega)| < \infty$ , valószínűségi változók sorozata. Azt mondjuk, hogy a  $\xi_n(\omega)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , valószínűségi változók sorozata (diszkrét időben definiált) martingált alkot az  $\mathcal{F}_n$   $\sigma$ -algebra sorozatra nézve, ha teljesül az

$$E(\xi_{n+1}(\omega)|\mathcal{F}_n) = \xi_n(\omega) \quad 1 \text{ valószínűséggel minden } n = 1, 2, \dots \text{ számra} \quad (\text{D1})$$

azonosság. A fent definiált sorozat (diszkrét időben definiált) szemimartingált definiál, ha teljesül az

$$E(\xi_{n+1}(\omega)|\mathcal{F}_n) \geq \xi_n(\omega) \quad 1 \text{ valószínűséggel minden } n = 1, 2, \dots \text{ számra} \quad (\text{D2})$$

egyenlőtlenség.

Legyen adva egymásba skatulyázott  $\mathcal{F}_t$   $\sigma$ -algebrák,  $t \geq 0$ ,  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ , ha  $s \leq t$ ,  $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}$  valós számokkal indexelt rendszere egy  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  valószínűségi mezőn. Legyen továbbá adva  $\mathcal{F}_t$  mérhető  $\xi_t(\omega)$  valószínűségi változók rendszere, amelyre  $E|\xi_t(\omega)| < \infty$ . Azt mondjuk, hogy a  $\xi_t(\omega)$  valószínűségi változók időben folytonos martingált alkotnak az  $\mathcal{F}_t$   $\sigma$ -algebrák rendszerére nézve, ha teljesül az

$$E(\xi_t(\omega)|\mathcal{F}_s) = \xi_s(\omega) \quad 1 \text{ valószínűséggel minden } 0 \leq s \leq t < \infty \text{ számpárra} \quad (\text{D1}')$$

azonosság. A fent definiált sorozat (folytonos időben definiált) szemimartingált alkot, ha teljesül az

$$E(\xi_t(\omega)|\mathcal{F}_s) \geq \xi_s(\omega) \quad 1 \text{ valószínűséggel minden } 0 \leq s \leq t < \infty \text{ számpárra} \quad (\text{D2}')$$

egyenlőtlenség.

*1. megjegyzés.* Hasonlóan definiálhatunk egy véges sok elemből álló  $(\xi_n, \mathcal{F}_n)$ ,  $1 \leq n \leq N$ , martingált vagy szemimartingált. Az egyetlen különbség az, hogy a (D1) illetve (D2) formulát csak  $1 \leq n < N$  indexekre követeljük meg. Hasonlóan definiálhatunk egy folytonos paraméterű martingált egy  $[a, b]$  intervallumban, a (D1') és (D2') tulajdonságot csak  $a \leq s \leq t \leq b$  paraméterekre követelve meg.

*2. megjegyzés.* Ha adva van valószínűségi változók egy  $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots$ , sorozata, akkor  $\mathcal{F}_n^{(0)} = \mathcal{B}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  a legszűkebb a diszkrét idejű martingálok és szemimartingálok definíciójában szereplő feltételeket teljesítő  $\sigma$ -algebrák. Vegyük észre, hogy amennyiben a (D1) feltétel teljesül akkor az

$$E(\xi_{n+1}(\omega)|\mathcal{F}_n^{(0)}) = E\left(E(\xi_{n+1}(\omega)|\mathcal{F}_n)|\mathcal{F}_n^{(0)}\right) = E\left(\xi_n(\omega)|\mathcal{F}_n^{(0)}\right) = \xi_n(\omega)$$

1 valószínűséggel minden  $n = 1, 2, \dots$  számra

azonosság is teljesül, azaz ha a  $\xi_n(\omega)$  sorozat martingált alkot az  $\mathcal{F}_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $\sigma$ -algebra sorozatra nézve, akkor martingált alkot az  $\mathcal{F}_n^{(0)}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $\sigma$ -algebra sorozatra nézve is. Hasonlóan állíthatjuk, hogy ha a  $\xi_n(\omega)$  sorozat szemimartingált alkot az  $\mathcal{F}_n$   $\sigma$ -algebrák sorozatára nézve, akkor szemimartingált alkot az  $\mathcal{F}_n^{(0)}$   $\sigma$ -algebrák sorozatára nézve is.

Folytonos idejű martingálok és szemimartingálok esetén definiálhatjuk az  $\mathcal{F}_s^{(0)} = \mathcal{B}(\xi_u, 0 \leq u \leq s)$   $\sigma$ -algebrákat, és ezekkel helyettesítve a  $\mathcal{F}_s$   $\sigma$ -algebrákat a folytonos idejű martingálokra és szemimartingálokra is állíthatjuk, hogy az  $\xi_t(\omega)$  sztochasztikus folyamatok martingálok illetve szemi-martingálok maradnak. Ezért jogunk van valószínűségi változók egy sorozatát diszkrét idejű martingálnak vagy szemimartingálnak hívni, ha ez a sorozat martingál, illetve szemimartingál a most definiált  $\mathcal{F}_n^{(0)}$   $\sigma$ -algebrák sorozatára nézve. Az irodalomban használják ezt a konvenciót, és mi is élni fogunk ezzel a lehetőséggel. Hasonlóan, egy  $\xi_t(\omega)$  sztochasztikus folyamatot martingálnak illetve szemimartingálnak hívunk, ha az martingál illetve szemimartingál az  $\mathcal{F}_t^{(0)}$ ,  $t \geq 0$ ,  $\sigma$ -algebrák rendszerére nézve.

A martingálok az igazságos, a szemimartingálok pedig az előnyös játékoknak a természetes modelljei. Tekintsünk ugyanis egy játékot, amelynek minden egyes időpontban van egy fordulója, és ennek során nyereményünk értéke (véletlenszerűen) megváltozik. Jelölje  $\mathcal{F}_n$  azt a  $\sigma$ -algebrát, amely tartalmazza az  $n$ -időpontig összegyűjtött összes információt,  $\xi_n(\omega)$  pedig legyen a nyereményünk értéke az  $n$  időpontban. Ekkor az  $n + 1$ -ik forduló utáni időpontbeli várható nyereményünk az  $n$ -ik fordulóban rendelkezésünkre álló ismeretek alapján  $E(\xi_{n+1}(\omega)|\mathcal{F}_n)$ . A játék akkor igazságos, ha ez a várható nyeremény megegyezik az  $n$ -ik időpontbeli  $\xi_n(\omega)$  nyereményünkkel, és akkor előnyös, ha nagyobb nála. Több a martingálok elméletében fontos eredmény ezen kép alapján érthető meg. Mielőtt ezeknek az eredményeknek a tárgyalását elkezdenénk, idézzük fel a már tanult feltételes várható érték definícióját és legfontosabb tulajdonságait.

A feltételes várható érték definíciója felhasználja az alább felidézendő Radon–Nikodym tételt. E tétel megfogalmazásának érdekében először be kell vezetni (előjeles) mértékek egy más mérték szerinti abszolút folytonosságának a definícióját.

**Egy előjeles mérték egy másik mérték szerinti abszolút folytonosságának a definíciója.** Legyen  $\mu$  (esetleg  $\sigma$ )-véges ( $\sigma$ -additív) mérték és  $\nu$  véges ( $\sigma$ -additív) előjeles mérték egy  $\Omega$  téren értelmezett  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebrán. Azt mondjuk, hogy a  $\nu$  előjeles mérték abszolút folytonos a  $\mu$  mérték szerint az  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebrán, ha minden olyan  $C \in \mathcal{F}$  halmazra, amelyre  $\mu(C) = 0$ , a  $\nu(C) = 0$  reláció is teljesül.

**Radon–Nikodym tétel.** Legyen adva egy  $\Omega$  tér, rajta egy  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebra, továbbá ezen az  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebrán egy  $\mu$  ( $\sigma$ -véges) mérték és  $\nu$  (véges) előjeles mérték. Tegyük fel, hogy a  $\nu$  előjeles mérték abszolút folytonos a  $\mu$  mértékre nézve az  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebrán. Akkor létezik olyan az  $\Omega$  téren definiált valós értékű  $\mathcal{F}$  mérhető  $f(\omega)$  függvény, amelyre  $\int |f(\omega)| d\mu(\omega) < \infty$ , és  $\nu(C) = \int_C f(\omega) d\mu(\omega)$  minden  $C \in \mathcal{F}$  halmazra. Továbbá ez az  $f(\omega)$  függvény egyértelmű a következő értelemben. Ha két  $f_1(\omega)$  és  $f_2(\omega)$   $\mathcal{F}$  mérhető

*függvény teljesíti a fenti relációt minden  $C \in \mathcal{F}$  halmazra, akkor  $f_1(\omega) = f_2(\omega)$  a  $\mu$  mérték szerint majdnem minden  $\omega \in \Omega$  pontban.*

*Megjegyzés:* A Radon–Nikodym tétel tipikus egzisztencia tétel. Az általános esetben nem ad módszert arra, hogyan lehet a keresett  $f(\omega)$  Radon–Nikodym deriváltat effektíve kiszámolni. Ez a probléma a feltételes eloszlás és feltételes várható érték fogalmában is megjelenik, és ez teszi a feltételes várható érték fogalmát nehézé.

Tekintsünk egy  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  valószínűségi mezőt, azon egy integrálható  $\xi$  valószínűségi változót (azaz legyen  $E|\xi(\omega)| = \int_{\Omega} |\xi(\omega)| P(d\omega) < \infty$ ) és egy  $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$   $\sigma$ -algebrát. Definiáljuk a  $\mu(A) = \int_A \xi(\omega) P(d\omega)$ ,  $A \in \mathcal{A}$ , előjeles mértéket. Ekkor  $\mu$  nyilvánvalóan abszolút folytonos mérték az  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  téren a  $P$  mértékre nézve. Ha tekintjük a  $P$  mérték és  $\mu$  előjeles mérték megszorítását a  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebrára, akkor a  $\mu$  előjeles mérték továbbra is abszolút folytonos marad a  $P$  mértékre. Ezért bevezethetjük a feltételes várható érték alábbi definícióját.

**Feltételes várható érték definíciója.** *Legyen adva egy  $\xi(\omega)$  integrálható valószínűségi változó és egy  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebra egy  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  valószínűségi mezőn. Definiáljuk a  $\mu = \mu(\xi)$  előjeles mértéket a  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebrán a  $\mu(B) = \int_B \xi(\omega) P(d\omega)$ ,  $B \in \mathcal{F}$ , képlet segítségével. A  $\xi(\omega)$  valószínűségi változó  $E(\xi(\omega)|\mathcal{F})$  feltételes várható értéke az  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebrára nézve egyenlő a  $\mu$  előjeles mérték ( $\mathcal{F}$ -mérhető) Radon–Nykodim deriváltjával a  $P$  valószínűségi mértéknek az  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebrára vett megszorítására nézve.*

*Másképp megfogalmazva az  $E(\xi|\mathcal{F})$  feltételes várható érték olyan valószínűségi változó, amely teljesíti a következő két feltételt:*

- a.) *Az  $E(\xi|\mathcal{F})$  valószínűségi változó mérhető az  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebrára.*
- b.)  *$\int_B E(\xi|\mathcal{F}) dP = \int_B \xi dP$  minden  $\mathcal{F}$  mérhető  $B$  eseményre.*

*Az ilyen tulajdonságú valószínűségi változó létezését (és egyértelműségét) a Radon–Nykodim tétel biztosítja.*

**Feltételes valószínűség általános definíciója.** *Legyen adva egy  $A$  mérhető halmaz és egy  $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$   $\sigma$ -algebra egy  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  valószínűségi mezőn. Az  $A$  halmaz  $P(A|\mathcal{F})$  feltételes valószínűségén feltéve az  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebrát az  $A$  halmaz  $I_A(\omega)$  indikátorfüggvényének (azaz  $I_A(\omega) = 1$ , ha  $\omega \in A$ ,  $I_A(\omega) = 0$ , ha  $\omega \notin A$ )  $E(I_A(\omega)|\mathcal{F})$  feltételes várható értéket értjük.*

*1. megjegyzés:* Legyenek adva valamely  $\eta_1, \dots, \eta_k$  valószínűségi változók egy  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  valószínűségi mezőn. A  $\mathcal{B}(\eta_1, \dots, \eta_k)$   $\sigma$ -algebrán a legszűkebb olyan  $\sigma$ -algebrát értjük, amelyre nézve az  $\eta_1, \dots, \eta_k$  valószínűségi változók mindegyike mérhető, és adva egy integrálható  $\xi$  valószínűségi változó használjuk az

$$E(\xi|\eta_1, \dots, \eta_k) = E(\xi|\mathcal{B}(\eta_1, \dots, \eta_k))$$

jelölést is. (Az egyszerűbb jelölés érdekében véges sok  $\eta$  valószínűségi változót írtam, de vehetünk végtelen, akár kontinuum sok  $\eta$  valószínűségi változót.)

2. megjegyzés: Gyakran használják (az előző megjegyzés fogalomrendszerét alkalmazva) az  $E(\xi|\eta_1 = x_1, \dots, \eta_k = x_k)$  jelölést is, és beszélnek egy  $\xi(\omega)$  valószínűségi változó feltételes várható értékéről feltéve, hogy valamely  $\eta_1, \dots, \eta_k$  valószínűségi változók  $x_1, \dots, x_k$  értékeket vesznek fel. Ez a következőt jelenti. Azt mondjuk, hogy  $E(\xi|\eta_1 = x_1, \dots, \eta_k = x_k) = g(x_1, \dots, x_k)$ , ha a  $g$  függvény teljesíti a következő tulajdonságot.  $E(\xi|\eta_1, \dots, \eta_k) = g(\eta_1, \dots, \eta_k)$ . (Ez az azonosság úgy értendő, hogy a két oldal 1 valószínűséggel megegyezik.) Természetesen e jelölés jogosságának érdekében meg kell mutatni, hogy a kívánt tulajdonságú  $g$  függvény mindig létezik, illetve tisztázni kell azt, hogy tekinthetjük-e ezt a  $g$  függvényt egyértelműen definiáltnak. A kívánt tulajdonságú  $g$  függvény létezését biztosítja az alábbi (bizonyítás nélkül közölt) mértékelméleti eredmény.

**Tétel.** *Legyen adva egy  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  valószínűségi mező, azon  $\eta_1(\omega), \dots, \eta_k(\omega)$  valószínűségi változók. Jelölje  $\mathcal{F}$  az  $\eta_1(\omega), \dots, \eta_k(\omega)$  valószínűségi változók által generált  $\sigma$ -algebrát. Egy  $\zeta$  valószínűségi változó akkor és csak akkor mérhető erre az  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebrára, ha létezik a  $k$ -dimenziós  $R^k$  euklideszi térben olyan Borel mérhető  $g(x_1, \dots, x_k)$  függvény, amelyre  $\zeta(\omega) = g(\eta_1(\omega), \dots, \eta_k(\omega))$ .*

Egy  $\zeta(\omega)$  valószínűségi változó fenti tételben megadott reprezentációjában az ott szereplő  $g$  függvény nincs egyértelműen meghatározva. Valóban, gondoljuk meg, hogy olyan  $(x_1, \dots, x_k)$  pontokban, amelyeket az  $(\eta_1(\omega), \dots, \eta_k(\omega))$  semmilyen  $\omega \in \Omega$  helyen nem vesz fel a  $g(x_1, \dots, x_k)$  függvényt tetszőleges módon definiálhatjuk. Viszont igaz (és egyszerűen bizonyítható) a következő gyengébb értelemben vett egyértelműség, amely elegendő a számunkra. Ha  $\mu$  jelöli az  $(\eta_1(\omega), \dots, \eta_k(\omega))$  véletlen vektor eloszlását (az  $R^k$  tér  $k$ -dimenziós Borel mérhető halmazain), és  $g(\eta_1(\omega), \dots, \eta_k(\omega)) = \bar{g}(\eta_1(\omega), \dots, \eta_k(\omega))$  1 valószínűséggel, akkor  $g(x_1, \dots, x_k) = \bar{g}(x_1, \dots, x_k)$  a  $\mu$  mérték szerint majdnem minden  $(x_1, \dots, x_k)$  pontban.

Felsorolom a feltételes várható érték legfontosabb tulajdonságait. Az alább felsorolt azonosságok úgy értendők, hogy az azok két oldalán szereplő kifejezések egy valószínűséggel megegyeznek.

**Tétel a feltételes várható érték tulajdonságairól.**

1. Ha  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| E|\xi_k| < \infty$ ,  $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$  tetszőleges  $\sigma$ -algebra, akkor

$$E\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi_k \middle| \mathcal{F}\right)(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k E(\xi_k | \mathcal{F})(\omega) \quad \text{majdnem minden } \omega \in \Omega \text{ pontban.}$$

2. Ha  $E|\xi| < \infty$ ,  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{A}$  tetszőleges  $\sigma$ -algebrák, akkor  $E(E(\xi|\mathcal{F})|\mathcal{G})(\omega) = E(\xi|\mathcal{G})(\omega)$  majdnem minden  $\omega \in \Omega$  pontban. Speciálisan  $E(E(\xi|\mathcal{F})) = E\xi$ .
3. Ha  $\xi$  olyan valószínűségi változó, amelyre  $P(a \leq \xi \leq b) = 1$  alkalmas  $-\infty < a < b < \infty$  számokkal,  $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$   $\sigma$ -algebra, akkor  $a \leq E(\xi|\mathcal{F})(\omega) \leq b$  majdnem minden  $\omega \in \Omega$  pontban. Általánosabban, ha  $\xi(\omega) \geq \eta(\omega)$  majdnem minden  $\omega \in \Omega$  pontban, akkor  $E(\xi|\mathcal{F})(\omega) \geq E(\eta|\mathcal{F})(\omega)$  majdnem minden  $\omega \in \Omega$  pontban.

4.  $E(\xi|\mathcal{A})(\omega) = \xi(\omega)$ , ahol  $\mathcal{A}$  a valószínűségi mező definíciójában szereplő „legnagyobb”  $\sigma$ -algebra. Ha  $\mathcal{A}_0$  jelöli a triviális  $\sigma$ -algebrát, amelyik csak az  $\Omega$  és  $\emptyset$  üres halmazból áll, akkor  $E(\xi|\mathcal{A}_0)(\omega) = E\xi$ .
5. Ha  $E|\xi| < \infty$ ,  $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ , a  $\xi$  valószínűségi változó független az  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebrától, azaz ha tetszőleges  $F \in \mathcal{F}$  és a számegyenesen lévő Borel mérhető  $B \subset \mathbb{R}^1$  halmazokra,  $P(\{\omega: \xi(\omega) \in B\} \cap F) = P(\{\omega: \xi(\omega) \in B\})P(F)$ , akkor  $E(\xi|\mathcal{F})(\omega) = E\xi$ .
6. Ha  $E\xi^2 < \infty$ ,  $E\eta^2 < \infty$ ,  $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ , a  $\xi$  valószínűségi változó  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebrára mérhető valószínűségi változó, azaz tetszőleges a számegyenesen lévő Borel mérhető  $B \subset \mathbb{R}^1$  halmazra,  $\{\omega: \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$ , akkor  $E(\xi\eta|\mathcal{F})(\omega) = \xi(\omega)E(\eta|\mathcal{F})(\omega)$  majdnem minden  $\omega \in \Omega$  pontban. (Speciálisan, az  $\eta(\omega) \equiv 1$  választással kapjuk, hogy  $E(\xi|\mathcal{F})(\omega) = \xi(\omega)$ , ha  $\xi \in \mathcal{F}$  mérhető.)

Megadok még két a feltételes várható értékről szóló fontos eredményt, amelyeket itt nem fogunk használni, viszont hasznos tudni őket. Ezek közül az első (nehezebb) eredmény azt fejezi ki, hogy minden  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebrára és  $\xi(\omega)$  valószínűségi változóra létezik a  $\xi(\omega)$  valószínűségi változónak olyan feltételes eloszlása, amely minden  $\omega \in \Omega$ -ra valódi az ( $\omega$ -tól függő) valószínűségi mérték. A második eredmény arról szól, hogy a feltételes várható értékeket ki lehet fejezni a feltételes eloszlások segítségével, hasonlóan ahhoz, ahogy a várható értékeket ki tudjuk fejezni az eloszlások segítségével. Ebből következik, hogy sok a várható értékekről szóló eredményt általánosítani tudunk feltételes várható értékekre is. Az első eredmény a következő.

**Tétel a feltételes reguláris eloszlás létezéséről.** Legyen  $(\xi_1(\omega), \dots, \xi_k(\omega))$  egy  $k$ -dimenziós valószínűségi vektor egy  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  valószínűségi mezőn, és legyen adva egy  $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$   $\sigma$ -algebra. Jelölje  $\mathcal{B}$  a Borel  $\sigma$ -algebrát az  $\mathbb{R}^k$   $k$ -dimenziós euklideszi téren. A  $(\xi_1(\omega), \dots, \xi_k(\omega))$  véletlen vektornak létezik az  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebra szerinti reguláris feltételes eloszlása, azaz meg lehet adni egy olyan  $F(B, \omega)$ ,  $F(B, \omega): \mathcal{B} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$ , függvényt, amelyre

- i.)  $F(B, \cdot)$  minden  $B \in \mathcal{B}$  halmazra  $\mathcal{F}$  mérhető valószínűségi változó.
- ii.)  $F(\cdot, \omega)$  minden  $\omega \in \Omega$  pontra valószínűségi mérték az  $\mathbb{R}^k$   $k$ -dimenziós euklideszi tér  $\mathcal{B}$   $\sigma$ -algebráján, azaz  $F(\mathbb{R}^k, \omega) = 1$ ,  $0 \leq F(B, \omega) \leq 1$ , minden  $B \in \mathcal{B}$  halmazra, 
$$F\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k, \omega\right) = \sum_{k=1}^{\infty} F(B_k, \omega)$$
 minden diszjunkt  $B_k \in \mathcal{B}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , halmazokból álló rendszerre.
- iii.)  $F(B, \omega) = P((\xi_1(\omega), \dots, \xi_k(\omega)) \in B|\mathcal{F})(\omega)$  minden  $B \in \mathcal{B}$  halmazra. Ez azt jelenti, hogy az  $F(B, \omega)$  függvény tekinthető úgy, mint a csak majdnem minden  $\omega \in \Omega$  pontban meghatározott  $P((\xi_1(\omega), \dots, \xi_k(\omega)) \in B|\mathcal{F})(\omega)$  feltételes valószínűség egyik verziója.

Legyen adva egy  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebra, két véletlen vektor, amelyek közül az egyik  $\mathcal{F}$  mérhető, és tekintsük ezen véletlen vektorok valamely függvényének a feltételes várható értékét feltéve a  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebrát. A következő eredmény tartalma az, hogy ezt a feltételes várható értéket természetes módon ki lehet számolni a feltételes eloszlás szerinti integrál segítségével.

**Tétel.** Legyen adva egy  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$   $\sigma$ -algebra, azon egy  $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$   $\sigma$ -algebra, egy  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$   $k$ -dimenziós és  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_l)$   $l$ -dimenziós véletlen véletlen vektor. Legyen továbbá az  $(\eta_1, \dots, \eta_l)$  véletlen vektor  $\mathcal{F}$  mérhető, és jelölje az  $F(B, \omega)$ ,  $B \subset \mathbb{R}^k$  Borel mérhető függvény,  $\omega \in \Omega$ , a  $(\xi_1, \dots, \xi_k)$  véletlen vektor reguláris feltételes eloszlását feltéve az  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebrát. Legyen  $h(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l)$  egy  $k+l$  változós Borel mérhető függvény, amelyre  $E|h(\xi_1, \dots, \xi_k, \eta_1, \dots, \eta_l)| < \infty$ . Az  $E(h(\xi_1, \dots, \xi_k, \eta_1, \dots, \eta_l)|\mathcal{F})(\omega)$  feltételes várható értéket ki lehet számítani a következő képlet segítségével:

$$E(h(\xi_1, \dots, \xi_k, \eta_1, \dots, \eta_l)|\mathcal{F})(\omega) = \left[ \int h(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l) F(dx_1, \dots, dx_k, \omega) \right]_{y_1=\eta_1(\omega), \dots, y_l=\eta_l(\omega)}.$$

A következő feladatokban megfogalmazok néhány fontos példát martingálokra. A feladat állításai ellenőrizhetőek a feltételes várható érték előbb felsorolt tulajdonságainak segítségével.

1. *feladat.* Legyenek  $\xi_1, \xi_2, \dots$ , független valószínűségi változók, amelyekre  $E|\xi_n| < \infty$  minden  $n = 1, 2, \dots$  számra. Ha  $E\xi_n = 0$  minden  $n = 1, 2, \dots$ , számra, akkor az  $S_k = \sum_{j=1}^k \xi_j$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , részletösszegek martingált alkotnak. Ha  $E\xi_n \geq 0$  minden  $n = 1, 2, \dots$  számra, akkor az  $S_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , részletösszegek szemimartingált alkotnak.

2. *feladat.* Legyen adva az  $\mathcal{A}$   $\sigma$ -algebra rész- $\sigma$ -algebráinak növekvő  $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots \subset \mathcal{A}$  az sorozata és egy  $\xi$  valószínűségi változó,  $E|\xi| < \infty$ , egy  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  valószínűségi mezőn. Ekkor az  $X_n = E(\xi|\mathcal{F}_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , sorozat martingált alkot.

3. *feladat.* Legyenek  $\xi_1, \xi_2, \dots$  független valószínűségi változók,  $T_n = \prod_{k=1}^n \xi_k$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Ha  $E\xi_j = 1$  minden  $j = 1, 2, \dots$  számra, akkor a  $T_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , sorozat martingál. Ha  $E\xi_j \geq 1$ , és  $P(\xi_j \geq 0) = 1$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , akkor  $T_n$  szemimartingál.

4. *feladat.* Legyen  $W(t, \omega)$ ,  $t \geq 0$  egy Wiener-folyamat. Ekkor mind a  $W(t, \omega)$ , mind a  $W^2(t, \omega) - t$ ,  $t \geq 0$ , sztochasztikus folyamat martingál. (Érdekes mind a két sztochasztikus folyamat esetében a  $\mathcal{F}_t = \mathcal{B}(W(s); s \leq t)$ ,  $\sigma$ -algebrát társítani a  $W(t)$  illetve  $W^2(t) - t$  valószínűségi változóhoz.

4'. *feladat.* Legyen  $P(t, \omega)$ ,  $t \geq 0$  egy Poisson-folyamat,  $\lambda = 1$  paraméterrel. Ekkor mind a  $P(t, \omega) - t$ , mind a  $(P(t, \omega) - t)^2 - t$ ,  $t \geq 0$ , sztochasztikus folyamat martingál. Általában, ha  $X(t, \omega)$  egy független és stacionárius növekményű sorozat  $EX(t, \omega) = 0$  és  $EX^2(t, \omega) = t$ , akkor  $X(t, \omega)$  és  $X^2(t, \omega) - t$  martingál.

A 4. feladat felsorolja egy Wiener-folyamat bizonyos tulajdonságait. Ezenkívül tudjuk, hogy a Wiener-folyamat trajektóriái folytonosak. Megfogalmazom a Wiener-folyamat egy korábbi jellemzésének általánosabb, martingál-tulajdonságokkal megadott jellemzését.

**Tétel a Wiener-folyamatok egy jellemzéséről.** Legyen  $X(t, \omega)$ ,  $0 \leq t < \infty$ , olyan sztochasztikus folyamat, amelyre  $EX^2(t, \omega) < \infty$  minden  $t \geq 0$  számra,  $X(0, \omega) = 0$  egy valószínűséggel, és az  $X(t, \omega)$  és  $X^2(t, \omega) - t$ ,  $t \geq 0$ , sztochasztikus folyamatok martingálok (valamely  $\mathcal{F}_t$  az  $\mathcal{F}_t^{(0)} = \{X(s, \omega), s \leq t\}$ ,  $t \geq 0$ ,  $\sigma$ -algebrákat tartalmazó  $\sigma$ -algebrák rendszerére nézve). Ha ezenkívül az  $X(t, \omega)$  sztochasztikus folyamat minden trajektóriája folytonos, akkor  $X(t, \omega)$  Wiener-folyamat.

A fenti tétel bizonyítását az előadásban elhagyom, azt egy kiegészítésben ismertetem. Megjegyzem, hogy a tétel bizonyításának lényege az, hogy a független valószínűségi változók összegeiről szóló centrális határeloszlástétel általánosítható martingálokra is, és ennek az itt nem ismertetett eredménynek a segítségével belátható, hogy tetszőleges  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \infty$  számokra a tétel feltételeinek teljesülése esetén az  $X(t_j, \omega) - X(t_{j-1}, \omega)$ ,  $1 \leq j \leq k$ , valószínűségi változók függetlenek, és normális eloszlásúak 0 várható értékkel és  $t_j - t_{j-1}$  szórásnégyzettel.

Ismertetek néhány a martingálokról és szemimartingálokról szóló fontos eredményt. Nem adom meg mindegyikük részletes bizonyítását. Néhány esetben a bizonyítás fontos lépéseit (némi magyarázattal ellátott) feladat formájában fogalmazom meg. Viszont igyekszem elmagyarázni, hogy a bizonyítások háttérében ott van az igazságos és előnyös játékok tulajdonságairól szóló természetes gondolat. Az első eredmény azt fejezi ki, hogy egy igazságos játék esetén nem tudom a játékot úgy abbahagyni, hogy az számomra szigorúan előnyös legyen, egy előnyös játék esetén pedig a legelőnyösebb stratégia az, ha a játékban végig részt veszek. Természetesen, amikor arra gondolok, hogy milyen szabály szerint hagyjam abba a játékot, akkor olyan szabályra gondolok, amelyet effektíve végre is tudok hajtani. Ennek pontos megfogalmazása érdekében bevezetem a következő fogalmat.

**Megállási szabály definíciója.** Legyen adva  $\sigma$ -algebrák növekvő  $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3 \subset \dots \subset \mathcal{A}$  sorozata egy  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  valószínűségi mezőn. Azt mondjuk, hogy egy pozitív egész értékeket (és esetleg a  $\infty$ ) értéket) felvevő  $\tau(\omega)$  valószínűségi változó megállási szabály e  $\sigma$ -algebrák rendszerére nézve, ha  $\{\omega: \tau(\omega) = n\} \in \mathcal{F}_n$  minden  $n = 1, 2, \dots$  számra.

E fogalom időben folytonos megfelelője a következő: Legyen adva  $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}$ ,  $0 \leq t < \infty$ ,  $\sigma$ -algebráknak egy növekvő rendszere (azaz legyen  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ , ha  $s \leq t$ ) egy  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  valószínűségi mezőn. Azt mondjuk, hogy egy nem negatív értékeket (és esetleg a  $\infty$ ) értéket) felvevő  $\tau(\omega)$  valószínűségi változó megállási szabály e  $\sigma$ -algebrák rendszerére nézve, ha  $\{\omega: \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$  minden  $t \geq 0$  számra.

Megadom a definíció változatát abban az esetben, ha  $\sigma$ -algebrák helyett valószínűségi változók egy sorozata vagy egy sztochasztikus folyamat van adva.

**Megállási szabály definíciója.** Legyen valószínűségi változók  $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots$  sorozata egy  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  valószínűségi mezőn. Egy pozitív egész értékeket (és esetleg a  $\infty$ ) értéket) felvevő  $\tau(\omega)$  valószínűségi változó megállási szabály e valószínűségi változók sorozatára nézve, ha megállási szabály az  $\mathcal{F}_n = \mathcal{B}(\xi_k(\omega), 1 \leq k \leq n)$   $\sigma$ -algebrák növekvő rendszerére nézve.

*E fogalom időben folytonos megfelelője a következő: Legyen adva egy  $X(t, \omega)$ ,  $t \geq 0$ , egy a pozitív félegyesen definiált sztochasztikus folyamat egy  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  valószínűségi mezőn. Azt mondjuk, hogy egy nem negatív értékeket (és esetleg a  $\infty$  értéket) felvevő  $\tau(\omega)$  valószínűségi változó megállási szabály e sztochasztikus folyamatra nézve, ha megállási szabály az  $\mathcal{F}_t = \mathcal{B}(\xi_s: 0 \leq s \leq t)$ ,  $t \geq 0$ ,  $\sigma$ -algebrák növekvő rendszerére nézve.*

Érdeemes bevezetni a  $\tau(\omega)$  (véletlen) megállási időpontig összegyűjtött információt tartalmazó  $\mathcal{F}_\tau$   $\sigma$ -algebrát is. Egy  $B$  halmaz akkor és csak akkor tartozik a  $\mathcal{F}_\tau$   $\sigma$ -algebrába, ha a  $\tau$  időpontig tett megfigyelések alapján el tudjuk dönteni, hogy a  $B$  esemény bekövetkezett-e vagy sem. A pontos definíció a következő.

**Egy megállási szabály által generált  $\sigma$ -algebra definíciója.** *Legyen adva  $\sigma$ -algebrák növekvő  $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3 \subset \dots \subset \mathcal{A}$  sorozata egy  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  valószínűségi mezőn, és legyen  $\tau(\omega)$  megállási szabály erre a rendszerre nézve. Az  $\mathcal{F}_\tau$   $\sigma$ -algebra a következő halmazokból áll: Egy  $B \subset \Omega$  halmazra  $B \in \mathcal{F}_\tau$  akkor és csak akkor, ha  $B \cap \{\omega: \tau(\omega) \leq n\} \in \mathcal{F}_n$  minden  $n = 1, 2, \dots$  számra.*

*E fogalom időben folytonos megfelelője a következő: Legyen adva és  $\sigma$ -algebrák növekvő  $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}$ ,  $0 \leq t < \infty$ , rendszere (azaz legyen  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ , ha  $s \leq t$ ) egy  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  valószínűségi mezőn, és legyen  $\tau(\omega)$  megállási szabály erre a rendszerre nézve. Az  $\mathcal{F}_\tau$   $\sigma$ -algebra a következő halmazokból áll:  $B \subset \Omega$  halmazra  $B \in \mathcal{F}_\tau$  akkor és csak akkor, ha  $B \cap \{\omega: \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$  minden  $t \geq 0$  számra.*

*Feladat 1:* Lássuk be, hogy a fenti definíció értelmes, azaz az  $\mathcal{F}_\tau$  halmaz rendszer valóban  $\sigma$ -algebra.

*Feladat 2:* Legyen adva  $\sigma$ -algebrák növekvő  $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots \subset \mathcal{A}$  sorozata egy  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  valószínűségi mezőn, valamint egy  $\tau(\omega)$  megállási szabály erre a rendszerre nézve, és valószínűségi változók olyan  $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots$  sorozata, amelyre a  $\xi_n(\omega)$  valószínűségi változó  $\mathcal{F}_n$  mérhető minden  $n = 1, 2, \dots$  számra. Mutassuk meg, hogy  $\xi_{\tau(\omega)}(\omega)$   $\mathcal{F}_\tau$  mérhető. Speciálisan,  $\tau(\omega)$   $\mathcal{F}_\tau$  mérhető valószínűségi változó.

*Feladat 3:* Legyen adva  $\sigma$ -algebrák növekvő  $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots \subset \mathcal{A}$  sorozata egy  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  valószínűségi mezőn, valamint két olyan  $\tau_1(\omega)$  és  $\tau_2(\omega)$  megállási szabály erre a rendszerre nézve, amelyek teljesítik a  $\tau_1(\omega) \leq \tau_2(\omega)$  relációt minden  $\omega \in \Omega$  elemi eseményre. Mutassuk meg, hogy  $\mathcal{F}_{\tau_1(\omega)} \subset \mathcal{F}_{\tau_2(\omega)}$ . Igaz ezen állítás következő folytonos változata is. Ha  $\mathcal{F}_t$ ,  $0 \leq t < \infty$ ,  $\sigma$ -algebrák növekvő rendszere, azaz  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ , ha  $0 \leq s < t < \infty$ , valamint  $\tau_1(\omega)$  és  $\tau_2(\omega)$  két olyan megállási szabály erre a  $\sigma$ -algebra rendszerre nézve, amelyek teljesítik a  $\tau_1(\omega) \leq \tau_2(\omega)$  relációt minden  $\omega \in \Omega$  elemi eseményre, akkor  $\mathcal{F}_{\tau_1(\omega)} \subset \mathcal{F}_{\tau_2(\omega)}$ .

*Segítség:* Egy  $B \in \mathcal{F}_{\tau_1(\omega)}$  eseményt írjunk  $B = \bigcup_k (B \cap \{\omega: \tau_1(\omega) = k\})$  alakban, és mutassuk meg, hogy  $B \cap \{\omega: \tau_1(\omega) = k\} \in \mathcal{F}_{\tau_2(\omega)}$ .

A folytonos idő esetében használjuk ki, hogy amennyiben valamely  $B$  halmazra  $B \cap \{\omega: \tau_1(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ , akkor  $B \cap \{\omega: \tau_2(\omega) \leq t\} = B \cap \{\omega: \tau_1(\omega) \leq t\} \cap \{\omega: \tau_2(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ .

*Feladat 4: (nem kötelező)* Tekintsük növekvő  $\mathcal{F}_t$   $\sigma$ -algebráknak a  $t \geq 0$  számokkal paraméterezett növekvő rendszerét, és egy ezekre nézve természetes módon adaptált  $X(t, \omega)$  folytonos trajektóriájú sztochasztikus folyamatot. Fogalmazzuk meg és bizonyítsuk be egy ilyen rendszerre a feladat 2 természetes megfelelőjét. (Miért kellett feltenni azt, hogy a sztochasztikus folyamat trajektóriái folytonosak?)

**Tétel véletlenül megállított (szemi)martingálok várható értékének becsléséről.** Legyen adva egy  $(\xi_k(\omega), \mathcal{F}_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , martingál és egy  $\tau(\omega)$  megállási szabály az  $\mathcal{F}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $\sigma$ -algebrák rendszerére nézve, amelyre  $P(n \leq \tau(\omega) \leq N) = 1$  valamilyen  $1 \leq n \leq N < \infty$  számokra. Ekkor

$$E(\xi_{\tau(\omega)}(\omega)|\mathcal{F}_n) = \xi_n(\omega) \quad \text{és} \quad E(\xi_N(\omega)|\mathcal{F}_{\tau(\omega)}) = \xi_{\tau(\omega)}(\omega) \quad 1 \text{ valószínűséggel.} \quad (\text{D3})$$

Speciálisan

$$E\xi_n(\omega) = E\xi_{\tau(\omega)}(\omega) = E\xi_N(\omega) = E\xi_1(\omega). \quad (\text{D4})$$

Ha  $(\xi_k(\omega), \mathcal{F}_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , szemimartingál, akkor

$$E(\xi_{\tau(\omega)}(\omega)|\mathcal{F}_n) \geq \xi_n(\omega) \quad \text{és} \quad E(\xi_N(\omega)|\mathcal{F}_{\tau(\omega)}) \geq \xi_{\tau(\omega)}(\omega) \quad 1 \text{ valószínűséggel,} \quad (\text{D3}')$$

ezért

$$E\xi_n(\omega) \leq E\xi_{\tau(\omega)}(\omega) \leq E\xi_N(\omega). \quad (\text{D4}')$$

*Bizonyítás.* Először a (D3) és (D3') formulák baloldali azonosságát bizonyítjuk be. Ennek érdekében vegyük észre, hogy az  $\eta_k(\omega) = \xi_{k+1}(\omega) - \xi_k(\omega)$ ,  $n \leq k < N$ , valószínűségi változók  $\mathcal{F}_{k+1}$  mérhetőek, és a  $(\xi_k(\omega), \mathcal{F}_k)$ ,  $n \leq k \leq N$ , rendszer martingál volta ekvivalens azzal, hogy  $E(\eta_k(\omega)|\mathcal{F}_k) = 0$ , szemiszemimartingál volta pedig azzal, hogy  $E(\eta_k(\omega)|\mathcal{F}_k) \geq 0$  1 valószínűséggel minden  $n \leq k < N$  indexre. Vezessük be az  $\tilde{\eta}_k(\omega) = \eta_k(\omega)I_{\{\omega: \tau(\omega) \geq k+1\}}$ ,  $n \leq k < N$  valószínűségi változókat. Mivel  $E(\xi_{\tau(\omega)}(\omega)|\mathcal{F}_n) - \xi_n(\omega) = \sum_{k=n}^{N-1} \tilde{\eta}_k(\omega)$ , a (D3) és (D3') formulák első részének az igazolásához elég azt bebizonyítani, hogy  $E\tilde{\eta}_k(\omega)|\mathcal{F}_n) = 0$ ,  $k \leq n < N$ , ha  $(\xi_k, \mathcal{F}_k)$ ,  $n \leq k \leq N$ , martingál, és  $E\tilde{\eta}_k(\omega)|\mathcal{F}_n) \geq 0$ ,  $n \leq k < N$ , ha  $(\xi_k, \mathcal{F}_k)$ ,  $n \leq k \leq N$ , szemimartingál. Viszont az  $\{\omega: \tau(\omega) \geq k+1\} \in \mathcal{F}_k$ , (mert komplementere az  $\{\omega: \tau(\omega) \leq k\} \in \mathcal{F}_k$  halmaznak.) Ezért a feltételes várható érték tulajdonságai alapján  $E(\tilde{\eta}_k(\omega)|\mathcal{F}_n) = E(\eta_k(\omega)I_{\{\omega: \tau(\omega) \geq k+1\}}|\mathcal{F}_n) = E(I_{\{\omega: \tau(\omega) \geq k+1\}}E(\eta_k(\omega)|\mathcal{F}_k))|\mathcal{F}_n)$ . Innen  $E(\tilde{\eta}_k(\omega)|\mathcal{F}_n) = 0$ , ha  $(\xi_k(\omega), \mathcal{F}_k)$  martingál, azaz  $E(\eta_k(\omega)|\mathcal{F}_k) = 0$ . Hasonlóan,  $E(\tilde{\eta}_k(\omega)|\mathcal{F}_n) \geq 0$ , ha  $(\xi_k(\omega), \mathcal{F}_k)$  szemimartingál.

A (D3) és (D3') formulák első azonosságából megkapjuk a (D4) és (D4') képletek első állítását, ha várható értéket veszünk mind a két oldalon.

A (D3) azonosság második relációjának a bizonyítása hasonló elven alapul. Elég belátni azt, hogy  $E(\xi_N(\omega)I_{\{\omega: \tau(\omega)=k\}}|\mathcal{F}_\tau) = \xi_k(\omega)I_{\{\omega: \tau(\omega)=k\}}$  tetszőleges  $n \leq k \leq N$  számra, mert ezt az azonosságot összegezve minden  $n \leq k \leq N$  számra megkapjuk a kívánt állítást. Viszont tekintve egy tetszőleges  $B \in \mathcal{F}_{\tau(\omega)}$  halmazt  $B \cap \{\omega: \tau(\omega) = k\} \in \mathcal{F}_k$ , ezért felhasználva a tekintett sorozat martingál tulajdonságát és azt a tényt, hogy

az  $\xi_N(\omega)I_{\{\omega: \tau(\omega)=k\}}$  függvény nullával egyenlő az  $\{\omega: \tau(\omega) \neq k\}$  halmazon, kapjuk a következő azonosságot: Ha  $B \in \mathcal{F}_{\tau(\omega)}$ , akkor

$$\begin{aligned} \int_B \xi_N(\omega)I_{\{\omega: \tau(\omega)=k\}}P(d\omega) &= \int_{B \cap \{\omega: \tau(\omega)=k\}} \xi_N(\omega)dP(d\omega) \\ &= \int_{B \cap \{\omega: \tau(\omega)=k\}} \xi_k(\omega)dP(d\omega) = \int_B \xi_k(\omega)I_{\{\omega: \tau(\omega)=k\}}P(d\omega). \end{aligned}$$

Valójában ezt az állítást kellett bizonyítanunk.

A (D3') egyenlőtlenség második relációjának a bizonyítása hasonló. Mindössze azt kell észrevenni, hogy a szemimartingál tulajdonság az  $E(\xi_N(\omega)I_{\{\omega: \tau(\omega)=k\}}|\mathcal{F}_\tau) \geq \xi_k(\omega)I_{\{\omega: \tau(\omega)=k\}}$  egyenlőtlenség bizonyítását teszi lehetővé tetszőleges  $n \leq k \leq N$  számra. Végül a (D4) és (D4') még nem bizonyított része következik a (D3) és (D3') relációk második felének az integrálásából.

*Nem kötelező feladat:* Mutassuk meg az előző tétel (D3') állításának következő általánosítását. Ha  $(\xi_k(\omega), \mathcal{F}_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , szemimartingál,  $\tau_1(\omega)$  és  $\tau_2(\omega)$  két olyan megállási szabály az itt szereplő  $\sigma$ -algebrák rendszerére nézve, amelyekre  $P(n \leq \tau_1(\omega) \leq \tau_2(\omega) \leq N) = 1$ , akkor  $\xi_{\tau_1}(\omega) \leq E(\xi_{\tau_2}(\omega)|\mathcal{F}_{\tau_1})$  1 valószínűséggel.

A fenti tételben feltételeztük, hogy a  $\tau$  megállási szabály 1 valószínűséggel véges. Ezt a feltételt lehet gyengíteni, de teljesen elhagyni nem lehet, mint a következő híres példa mutatja. Tegyük fel, hogy a következő játékot játszhatjuk. Feldobnak egy pénzdarabot, amely  $\frac{1}{2}$  valószínűséggel esik a fej,  $\frac{1}{2}$  valószínűséggel az írás oldalra. Feltehetünk tetszőleges tétet, és fej dobás esetén tétünk megduplázódik, írás dobás esetén pedig elvész. Tegyük fel, hogy célunk a következő: Biztosan akarunk nyerni 1 forintot. Ennek érdekében felteszünk 1 forintot, és ha nyertünk hazamegyünk. Ha nem, duplázunk, 2 forintot teszünk fel, ha nyerünk hazamegyünk, ha nem duplázunk és 4 forintot teszünk fel. Ha nyerünk hazamegyünk, ha nem duplázunk és 8 forintot teszünk fel, és így tovább. Előbb vagy utóbb 1 valószínűséggel megjelenik a fej dobás, és ilyen módon ebben az igazságos játékban 1 valószínűséggel megnyerjük a kívánt 1 forintot. Ezek szerint mégis lehet egy igazságos játékban biztosan nyerni? Beszéljük meg ezt a példát részletesebben, fogalmazzuk meg a hozzátartozó matematikai modellt.

*Egy érdekes matematikai modell.* Legyenek  $\xi_1, \xi_2, \dots$ , független valószínűségi változók, amelyekre  $P(\xi_n = 2^{n-1}) = P(\xi_n = -2^{n-1}) = \frac{1}{2}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , és legyen  $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ .

Ekkor  $S_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , martingál. Definiáljuk a következő megállási szabályt.  $\tau(\omega) = \min\{n: n \geq 1, S_n \geq 1\}$ , és vezessük be a  $\tau_N(\omega) = \min(\tau(\omega), N)$  megállási szabályokat is minden  $N = 1, 2, \dots$  számra. Ekkor  $P(\tau(\omega) = k) = 2^{-k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , (a  $\tau(\omega) = k$  esemény akkor következik be, ha a  $\xi_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , változók közül a  $k$ -ik az első pozitív értékű valószínűségi változó), ezért  $P(\tau(\omega) < \infty) = 1$ , és  $P(S_\tau = 1) = 1$ . Ez felel meg az előbbi játéknak, és annak az állításnak, hogy 1 valószínűséggel 1 forintot nyerünk. Tekintsük a  $\tau_N$  megállási szabályokat, és a hozzátartozó nyereményeket. Ekkor  $P(\tau_N(\omega) = k) = 2^{-k}$  minden  $1 \leq k < N$  számra,  $P(\tau_N = N) = 2 \cdot 2^{-N}$ ,  $P(S_{\tau_N(\omega)} =$

$1) = 1 - 2^{-N}$ ,  $P(S_{\tau_N(\omega)}(\omega) = -(1+2+\dots+2^{N-1})) = P(S_{\tau_N(\omega)}(\omega) = -(2^N - 1)) = 2^{-N}$ . Ez azt jelenti, hogy  $ES_{\tau_N(\omega)}(\omega) = 0$ , ahogy a fenti tétel is állítja, de  $ES_{\tau(\omega)}(\omega) = 1$ . Igaz ugyan, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{\tau_N(\omega)}(\omega) = S_{\tau(\omega)}(\omega)$  1 valószínűséggel, ezért  $E\left(\lim_{n \rightarrow \infty} S_{\tau_N(\omega)}(\omega)\right) = E(S_{\tau(\omega)}(\omega))$ . De nem lehet felcserélni a limesz és várható érték képzés sorrendjét a fenti azonosság bal oldalán. Megjegyzem, hogy a fenti példa azt mutatja, hogy valóban lehet egy ilyen játékban 1 valószínűséggel nyerni, de ehhez végtelen sok tőkével kell rendelkezünk, ami lehetővé teszi, hogy a játékot ne kelljen idő előtt befejeznünk.

Megmutatom, hogy a fent megfogalmazott tételnek véletlenül megállított martingálok és szemimartingálok várható értékéről fontos következményei vannak. Többek között ebből következik a független valószínűségi változók részletösszegeiről szóló egyik fontos eredmény, a Kolmogorov-egyenlőtlenség. A martingálelméleti tárgyalás egyben megvilágítja ennek az eredménynek a mélyebb hátterét.

Először bebizonyítok egy becslést martingálok és szupermartingálok maximumáról.

**Becslés szemimartingálok maximumáról.** Legyen  $(\xi_n, \mathcal{F}_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , szemimartingál. Ekkor

$$P\left(\max_{1 \leq k \leq N} \xi_k(\omega) \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\{\omega: \max_{1 \leq k \leq N} \xi_k(\omega) \geq \lambda\}} \xi_N(\omega) P(d\omega) \leq \frac{E|\xi_N(\omega)|}{\lambda} \quad (\text{D5})$$

minden  $N = 1, 2, \dots$  egész és  $\lambda > 0$  valós számra.

*A becslés bizonyítása.* Vezessük be a  $\bar{\tau}(\omega) = \min(j: \xi_j(\omega) \geq \lambda)$  és  $\tau(\omega) = \min(\bar{\tau}(\omega), N)$  megállási szabályokat. Alkalmazzuk a (D3') reláció második felét a véletlenül megállított (szemi)martingálok várható értékének becsléséről szóló tételnek  $n = 1$  és  $N$  paraméterrel. Azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \lambda P\left(\max_{1 \leq k \leq N} \xi_k(\omega) \geq \lambda\right) &\leq \int_{\{\omega: \max_{1 \leq k \leq N} \xi_k(\omega) \geq \lambda\}} \xi_{\tau(\omega)}(\omega) P(d\omega) \\ &\leq \int_{\{\omega: \max_{1 \leq k \leq N} \xi_k(\omega) \geq \lambda\}} E(\xi_N(\omega) | \mathcal{F}_{\tau(\omega)}) P(d\omega) = \int_{\{\omega: \max_{1 \leq k \leq N} \xi_k(\omega) \geq \lambda\}} \xi_N(\omega) P(d\omega), \end{aligned}$$

mert  $\{\omega: \max_{1 \leq k \leq N} \xi_k(\omega) \geq \lambda\} \in \mathcal{F}_{\tau}$ . Így megkaptuk a (D5) formula első egyenlőtlenségét.

A (D5) formula második egyenlőtlensége nyilvánvaló.

A Kolmogorov-egyenlőtlenség egyszerűen bizonyítható az előző becslés és a következő lemma segítségével.

**Lemma.** Legyen adva egy  $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$   $\sigma$ -algebra és egy az  $E\xi^2 < \infty$  feltételt teljesítő  $\xi$  valószínűségi változó egy  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  valószínűségi mezőn. Ekkor teljesül a

$$E(\xi^2 | \mathcal{F}) \geq (E\xi | \mathcal{F})^2 \quad 1 \text{ valószínűséggel.}$$

egyenlőtlenség. Ebből az egyenlőtlenségből következik, hogy amennyiben  $(\xi_n, \mathcal{F}_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , martingál, és  $E\xi_n^2 < \infty$  minden  $n = 1, 2, \dots$  számra, akkor  $(\xi_n^2, \mathcal{F}_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , szemimartingál.

*A lemma bizonyítása.* Azt állítom, hogy  $E(\xi^2|\mathcal{F}) - (E\xi|\mathcal{F})^2 = E(\xi - E(\xi|\mathcal{F}))^2|\mathcal{F}$ , ahonnan  $E(\xi^2|\mathcal{F}) - (E\xi|\mathcal{F})^2 \geq 0$ , tehát a lemma egyenlőtlensége igaz. Az előző azonosság következik az  $E((\xi - E(\xi|\mathcal{F}))^2|\mathcal{F}) = E(\xi^2|\mathcal{F}) - 2E(\xi E(\xi|\mathcal{F})|\mathcal{F}) + (E(\xi|\mathcal{F}))^2 = E(\xi^2|\mathcal{F}) - (E(\xi|\mathcal{F}))^2$ , mert  $E(\xi E(\xi|\mathcal{F})|\mathcal{F}) = (E(\xi|\mathcal{F}))^2$  számolásból.

Ezért, ha  $(\xi_n, \mathcal{F}_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , martingál,  $E\xi_n^2 < \infty$  minden  $n = 1, 2, \dots$  számra, akkor  $E(\xi_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) \geq (E\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n)^2 = \xi_n^2(\omega)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , és ezt kellett bizonyítanunk.

*Megjegyzés:* Az előző lemma bizonyításában használt azonosság háttérben az a jól ismert tény áll, hogy az  $E(\xi|\mathcal{F})$  feltételes várható érték a  $\xi$  valószínűségi változó ortogonális vetülete az  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebrára, ezért alkalmazhatjuk a Pythagorász tételt a megfelelő valószínűségi változókra. Az így kapott az  $\xi(\omega)^2 = (\xi(\omega) - E(\xi(\omega)|\mathcal{F}))^2 + E(\xi(\omega)|\mathcal{F})^2$  azonosság két oldalának az  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebra szerinti feltételes várható értékét véve megkapjuk a lemma bizonyításában felírt azonosságot.

A fenti eredmények egyszerű következménye a Kolmogorov-egyenlőtlenség.

**Kolmogorov-egyenlőtlenség.** Legyenek  $\xi_1, \dots, \xi_N$  független valószínűségi változók, amelyekre  $E\xi_n = 0$ ,  $\sigma_n^2 = E\xi_n^2 < \infty$  minden  $1 \leq n \leq N$  számra. Vezessük be az  $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ ,  $1 \leq n \leq N$ , részletösszegeket. Érvényes a

$$P\left(\max_{1 \leq n \leq N} |S_n| > x\right) \leq \frac{\text{Var } S_N}{x^2} = \frac{\sum_{n=1}^N \sigma_n^2}{x^2} \quad \text{minden } x > 0 \text{ számra}$$

reláció, amelyet Kolmogorov-egyenlőtlenségnek hívnak.

*Bizonyítás.* Az  $S_n(\omega)$ ,  $n = 1, \dots, N$ , sorozat martingált, ezért az előző lemma alapján az  $S_n^2(\omega)$ ,  $n = 1, \dots, N$ , sorozat szemimartingált alkot. Alkalmazva erre a szemimartingálok maximumáról szóló becslést kapjuk, hogy

$$P\left(\max_{1 \leq n \leq N} |S_n| > x\right) \leq \frac{ES_N^2}{x^2} = \frac{\text{Var } S_n}{x^2} = \frac{\sum_{n=1}^N \sigma_n^2}{x^2},$$

amint állítottuk.

*1. megjegyzés.* Érdekes megjegyezni, hogy a Kolmogorov-egyenlőtlenség ugyanazt a becslést adja a  $P\left(\max_{1 \leq n \leq N} |S_n| > x\right)$  valószínűsége, mint amit a Csebisev-egyenlőtlenség ad a  $P(|S_N| > x)$  valószínűsége. Ez az eredmény olyan tényt fejez ki, hogy független, nulla várható értékű valószínűségi változók részletösszegeinek a maximuma

nem sokkal nagyobb, mint az utolsó részletösszeg. Több ilyen jellegű eredmény van a valószínűségszámításban, (lásd például a következő 2. megjegyzést). A Kolmogorov-egyenlőtlenség hasznos például a nagy számok erős törvényének a bizonyításában. Ha a nagy számok törvényét a lehető legáltalánosabb feltételek mellett akarjuk bizonyítani, akkor minél enyhébb momentum feltételek mellett kell jó becslést adni független valószínűségi változók részletösszegeinek a maximumára. Ilyenkor a Kolmogorov-egyenlőtlenség tesz jó szolgálatot.

A Kolmogorov-egyenlőtlenség bizonyításában szereplő lemmának érvényes a következő általánosítása.

**Lemma martingálok konvex függvényeiről.** *Legyen adva egy  $\xi(\omega)$  valószínűségi változó és egy  $\Phi(x)$ ,  $-\infty < x < \infty$ , konvex függvény, amelyekre teljesülnek az  $E|\xi(\omega)| < \infty$  és  $E|\Phi(\xi(\omega))| < \infty$  feltételek egy  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  valószínűségi mezőn, és egy  $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$   $\sigma$ -algebra. Ekkor teljesül az*

$$E(\Phi(\xi(\omega)|\mathcal{F})) \geq \Phi(E(\xi(\omega)|\mathcal{F})) \quad 1 \text{ valószínűséggel}$$

*egyenlőtlenség. Ezért, ha  $(\xi_n, \mathcal{F}_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , martingál,  $\Phi(x)$  konvex függvény, és  $E|\Phi(\xi_n)| < \infty$  minden  $n = 1, 2, \dots$  számra, akkor  $(\Phi(\xi_n), \mathcal{F}_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , szemimartingál.*

*A lemma indoklása.* A Jensen egyenlőtlenség alapján tudjuk, hogy a  $\xi$  valószínűségi változóra érvényes az

$$E\Phi(\xi(\omega)) = \int \Phi(x)F(dx) \geq \Phi\left(\int xF(dx)\right) = \Phi(E(\xi(\omega)))$$

egyenlőtlenség, ahol  $F(x)$  jelöli a  $\xi$  valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. Tudván, hogy létezik a  $\xi$  valószínűségi változó  $F(B, \omega)$ , feltételes eloszlása  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebrára nézve, ahol  $\omega \in \Omega$ , és  $B$  a számegyenes Borel mérhető részhalmaza, és azt, hogy hogyan lehet a feltételes várható értéket a feltételes eloszlás segítségével kiszámítani, kapjuk, ismét a Jensen egyenlőtlenség segítségével, hogy

$$E\Phi(\xi(\omega)|\mathcal{F}) = \int \Phi(x)F(dx, \omega) \geq \Phi\left(\int xF(dx, \omega)\right) = \Phi(E(\xi(\omega)|\mathcal{F}))$$

1 valószínűséggel,

ahol  $F(\cdot, \omega)$  jelöli a  $\xi$  valószínűségi változó feltételes eloszlását feltéve a  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebrát. Ennek az egyenlőtlenségnek a segítségével belátható, hogy  $(\Phi(\xi_n), \mathcal{F}_n)$   $n = 1, 2, \dots$ , szemimartingál az adott feltételek mellett.

*Feladat.* Lássuk be elemi módszerekkel (a feltételes eloszlás létezéséről szóló eredmény ismerete nélkül), hogy  $|E(\xi(\omega)|\mathcal{F})| \leq E(|\xi(\omega)||\mathcal{F})$  és  $(E(\xi(\omega)|\mathcal{F}))^+ \leq E(\xi(\omega)^+|\mathcal{F})$ , ahol  $x^+ = \max(x, 0)$ . Mutassuk meg, hogy ha  $(\xi_n(\omega), \mathcal{F}_n)$  martingál, akkor  $(|\xi_n(\omega)|, \mathcal{F}_n)$  és  $(\xi_n^+(\omega), \mathcal{F}_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , szemimartingál.

Felhasználva a martingálok konvex függvényeiről szóló lemmát az  $\Phi(x) = |x|^\alpha$ ,  $1 \leq \alpha < \infty$  konvex függvényekkel valamint a (D5) formula első egyenlőtlenségét be lehet látni az alábbi eredményt, amelynek bizonyítását elhagyom. Magát az eredményt is inkább az érdekesség kedvéért említem.

**Tétel martingálok maximumának a momentumairól.** *Legyen  $(\xi_n, \mathcal{F}_n)$ ,  $1 \leq n \leq N$  martingál. Ekkor*

$$E \left( \max_{1 \leq n \leq N} |\xi_n| \right)^\alpha \leq \left( \frac{\alpha}{\alpha - 1} \right)^\alpha E|\xi_N|^\alpha \quad \text{ha } \alpha > 1,$$

és

$$E \left( \max_{1 \leq n \leq N} |\xi_n| \right) \leq \frac{e}{e-1} + \frac{e}{e-1} E|\xi_N| \log^+ |\xi_N|$$

az  $\alpha = 1$  esetben, ahol  $\log^+ x = \max(\log x, 0)$ .

*2. megjegyzés.* Az előző eredmény azt jelenti, hogy egy martingálnak (például nulla várható értékű valószínűségi változók részletösszegeinek) az abszolút értékét, akkor az így kapott sorozat maximumának a momentumai csak konstans számszor nagyobbak, mint az utolsó tag maximuma. Ez az egyenlőtlenség is olyan ténnyt fejez ki, hogy egy martingál maximuma nem sokkal nagyobb, mint az utolsó tagja. Érdekes megjegyezni, hogy az  $\alpha = 1$  eset kissé “kilóg a sorból”. Itt a felső becslés kissé gyengébb, mert az egy  $E|\xi_N| \log^+ |\xi_N|$  alakú tagot is tartalmaz, azaz egy logaritmikus faktor is megjelenik. Megmutatták, hogy ez a tag nem hagyható el a becslésből.

*Konvergencia tételek martingálokra.*

Fontos eredmények érvényesek martingálok 1 valószínűségi konvergenciájáról. Itt csak a legfontosabb eredményt ismertetem. Ezenkívül megmutatom ennek az eredménynek egy érdekes alkalmazását, amely lehetővé teszi bizonyos esetekben a Radon–Nikodym derivált többé-kevésbé explicit kiszámolását. Ezeknek az eredményeknek a bizonyításában is azt használjuk ki, hogy a martingálok az igazságos, a szemimartingálok pedig az előnyös játékok modelljei.

**Tétel martingálok 1 valószínűségi konvergenciájáról.** *Legyen  $(\xi_n(\omega), \mathcal{F}_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , martingál egy  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  valószínűségi mezőn. Ekkor az  $E|\xi_n(\omega)|$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , sorozat monoton növekszik. Ha ez a sorozat korlátos, azaz létezik olyan  $K > 0$  szám, amelyre  $E|\xi_n(\omega)| \leq K$  minden  $n = 1, 2, \dots$  számra, akkor létezik 1 valószínűséggel a  $\xi_\infty(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega)$  határérték. Ezenkívül érvényes az  $E|\xi_\infty(\omega)| \leq K$  egyenlőtlenség is ugyanazzal a  $K > 0$  konstanssal.*

*A tétel bizonyítása.* Abból, hogy  $(\xi_n(\omega), \mathcal{F}_n)$  martingál következik, hogy az  $(|\xi_n(\omega)|, \mathcal{F}_n)$  sorozat  $n = 1, 2, \dots$ , szemimartingál. Ezért az  $E|\xi_n(\omega)|$  sorozat monoton növekszik, amint azt a tételben állítjuk. Az, hogy a  $\xi_n(\omega)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , sorozat 1 valószínűséggel konvergál ekvivalens azzal a ténnyel, hogy nulla annak a valószínűsége, hogy az  $\xi_n(\omega)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , sorozat limesz superiora szigorúan nagyobb, mint annak limesz inferiora.

Ezért annak érdekében, hogy megmutassuk azt, hogy a  $\xi_n(\omega)$  sorozat 1 valószínűséggel konvergál, elég megmutatni, hogy

$$P(\liminf_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) \leq r_1 < r_2 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega)) = 0$$

minden  $(r_1, r_2)$ ,  $r_1 < r_2$ , racionális számpárra. Ezt meg tudjuk mutatni úgy, hogy definiáljuk természetes módon azt, hogy az  $(\xi_n(\omega), n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , pontokon keresztül (véletlen) töröttvonal függvény hányszor metszi át az  $[r_1, r_2] \times [1, \infty]$  sávot, és bebizonyítjuk, hogy ez a metszésszám 1 valószínűséggel véges.

Rögzítsünk valamilyen  $1 \leq N < \infty$  számot és az  $1 \leq n \leq N$  időintervallumban történt átmetszések számának definíciója érdekében vezessük be a következő  $\zeta_k(\omega)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  (véletlen) időpontokat:

$\zeta_1(\omega) = \min\{k : 1 \leq k \leq N, \xi_k(\omega) \leq r_1\}$ , ha létezik ilyen  $k$  index,  $\zeta_2(\omega) = \min\{k : \zeta_1(\omega) \leq k \leq N, \xi_k(\omega) \geq r_2\}$ , ha létezik ilyen  $k$  index. A további  $\zeta_j(\omega)$ ,  $j = 3, 4, \dots$  időpontokat hasonlóan definiáljuk (amíg ez lehetséges). Ha  $j$  páros szám, akkor legyen  $\zeta_{j+1}(\omega) = \min\{k : \zeta_j(\omega) \leq k \leq N, \xi_k(\omega) \leq r_1\}$ , ha létezik ilyen  $k$  index. Ha  $j$  páratlan szám, legyen  $\zeta_{j+1}(\omega) = \min\{k : \zeta_j(\omega) \leq k \leq N, \xi_k(\omega) \geq r_2\}$ . Legyen  $\beta_N(\omega)$  a legnagyobb olyan  $j$  index, amelyet ily módon definiálni tudtunk, és ezután definiáljuk a  $\zeta_{\beta_N(\omega)+1}$  valószínűségi változót (véletlen index-szel) a  $\zeta_{\beta_N(\omega)+1} = N$  képlet segítségével. Vegyük észre, hogy  $\{\omega : \zeta_j(\omega) = n\} \in \mathcal{F}_n$  tetszőleges  $j = 1, 2, \dots$ ,  $1 \leq n \leq N$  számokra. Itt  $\zeta_j(\omega)$ -t tekinthetjük olyan valószínűségi változónak, amely nincs értelmezve az egész  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  valószínűségi mezőn, vagy azt mondjuk, hogy  $\zeta_j(\omega) = N + 1$  azokon az  $\omega \in \Omega$  helyeken, ahol eddig nem definiáltuk őt. Be lehet látni, hogy a  $\beta_N(\omega)$  valószínűségi becslés várható értéke teljesíti a következő egyenlőtlenséget.

**Becslés annak várható értékéről, hogy egy martingál hányszor metsz át egy intervallumot.** Legyen  $(\xi_n(\omega), \mathcal{F}_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , martingál egy  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  valószínűségi mezőn. Rögzítsünk egy  $N$ ,  $N \geq 1$  egész, és két  $r_1, r_2$ ,  $r_1 < r_2$ , valós számot, és tekintsük az általuk az előző bekezdésben definiált  $\beta_N(\omega)$  valószínűségi változót. Ez teljesíti az

$$\frac{E\beta_N(\omega) - 1}{2}(r_2 - r_1) \leq E(\xi_N(\omega) - r_1)^+ \leq E|\xi_N(\omega)| + |r_1|. \quad (D6)$$

egyenlőtlenséget, ahol  $x^+ = \max(x, 0)$ .

*A becslés bizonyítása.* Vezessük be a  $\bar{\xi}_n(\omega) = (\xi_n(\omega) - r_1)^+$  és  $\eta_n(\omega) = \bar{\xi}_{n+1}(\omega) - \bar{\xi}_n(\omega)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , valószínűségi változókat. Ekkor  $(\bar{\xi}_n(\omega), \mathcal{F}_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , szemimartingál, és  $E(\eta_n(\omega)|\mathcal{F}_n) \geq 0$  1 valószínűséggel minden  $n = 1, 2, \dots$  számra. Tekintsük a  $[\zeta_{2j-1}(\omega), \zeta_{2j}(\omega) - 1]$ ,  $1 \leq j \leq \frac{\beta_N(\omega)}{2}$  (véletlen, és véletlen számú) intervallumok

rendszerét, valamint az  $A(\omega) = \{1, \dots, N - 1\} \setminus \left( \bigcup_{j=1}^{\lfloor \frac{\beta_N(\omega)+1}{2} \rfloor} [\zeta_{2j-1}(\omega), \zeta_{2j}(\omega) - 1] \right)$  vé-

letlen halmazt és a  $Z_n(\omega) = \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{\beta_N(\omega)+1}{2} \rfloor} (\bar{\xi}_{\zeta_{2j}(\omega)}(\omega) - \bar{\xi}_{\zeta_{2j-1}(\omega)}(\omega))$  valószínűségi változót,

ahol  $[x]$  egy szám egész részét jelöli. Ekkor  $(r_2 - r_1) \frac{\beta_N(\omega) - 1}{2} \leq Z_N(\omega)$  1 valószínűséggel, mert  $(\xi_{\zeta_{2j}(\omega)}(\omega) - \xi_{\zeta_{2j-1}(\omega)}(\omega)) \geq (r_2 - r_1)$ , ha  $2j \leq \beta_n(\omega)$ , és a  $2j = \beta_N(\omega) + 1$  esetben  $(\bar{\xi}_{\zeta_{2j}(\omega)}(\omega) - \bar{\xi}_{\zeta_{2j-1}(\omega)}(\omega)) \geq 0$ . A most bebizonyított egyenlőtlenségből következik, hogy

$$(r_2 - r_1) \frac{E\beta_N(\omega) - 1}{2} \leq EZ_N(\omega).$$

Másrészt azt állítom, hogy

$$EZ_N(\omega) \leq E(\xi_N(\omega) - r_1)^+ - E(\xi_1(\omega) - r_1)^+ \leq E(\xi_N(\omega) - r_1)^+.$$

A fenti két egyenlőtlenségből következik a (D6) egyenlőtlenség első fele. Az utoljára felírt egyenlőtlenség pedig azért igaz, mert  $E(\xi_N(\omega) - r_1)^+ - E(\xi_1(\omega) - r_1)^+ - EZ_N(\omega) = \sum_{n=1}^{N-1} E\eta_n I_{\{\omega: n \in A(\omega)\}}$ , és mivel  $\{\omega: n \in A(\omega)\} \in \mathcal{F}_n$ , ezért  $E\eta_n I_{\{\omega: n \in A(\omega)\}} \geq 0$  minden  $1 \leq n \leq N - 1$  számra.

A (D6) formula második egyenlőtlensége nyilvánvaló.

A tétel bizonyítását egyszerűen befejezhetjük az előző becslés segítségével. Mivel  $\beta_N(\omega)$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , monoton növekvő függvényt sorozat,  $\beta_N(\omega) \geq 0$  minden  $N = 1, 2, \dots$  számra és  $\omega \in \Omega$  pontban, alkalmazhatjuk a Beppo–Levy tételt monoton függvény sorozat határértékének integráljáról. A Beppo–Levy tételből és a (D6) becslésből következik, hogy  $E\left(\lim_{N \rightarrow \infty} \beta_N(\omega)\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} E\beta_N(\omega) < \infty$ , ahonnan kapjuk, hogy  $P\left(\lim_{N \rightarrow \infty} \beta_N(\omega) < \infty\right) = 1$ . Innen következik a fent elmondottak alapján, hogy a  $\xi_n(\omega)$  sorozat 1 valószínűséggel konvergál egy  $\xi_\infty(\omega)$  valószínűségi változóhoz. A Fatou lemmából következik, hogy  $E|\xi_\infty(\omega)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} E|\xi_n(\omega)| \leq K$ . A Tétel bizonyítását befejeztük.

*Megjegyzés.* Szeretnénk bizonyos esetekben tudni, hogy a  $\xi_n(\omega)$  martingál nem csak 1 valószínűséggel konvergál a  $\xi_\infty(\omega)$  valószínűségi változóhoz, hanem  $L_1$  normában is, azaz  $\lim_{n \rightarrow \infty} E|\xi_n(\omega) - \xi_\infty(\omega)| = 0$ . Ez a reláció nem feltétlenül érvényes a martingálok 1 valószínűségi konvergenciájáról szóló tétel feltételeinek teljesülése esetén. Ellenpéldát kaphatunk például azon példa módosításával, amelyben megmutattuk, hogyan lehet igazságos játékban 1 valószínűséggel nyerni.

Legyenek  $X_n(\omega)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , független valószínűségi változók,  $P(X_n(\omega) = 2^{n-1}) = P(X_n(\omega) = -2^{n-1}) = \frac{1}{2}$ . Definiáljuk az  $S_n(\omega) = \sum_{j=1}^n X_j(\omega)$  részletösszegeket és a  $\tau(\omega) = \min\{k: S_k(\omega) \geq 1\}$ ,  $\tau_n(\omega) = \min(n, \tau(\omega))$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , megállási szabályokat. Vezessük be az  $\xi_n(\omega) = S_{\tau_n(\omega)}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , valószínűségi változókat. Ekkor  $\xi_n(\omega)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , martingál, és  $E|\xi_n(\omega)| = 2 - 2^{-n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Ez azt jelenti, hogy erre a martingálra is alkalmazható a martingálok 1 valószínűségi konvergenciájáról szóló tétel. Közvetlenül is látható, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) = 1$ , azaz a martingál sorozat 1 valószínűséggel konvergál 1-hez, míg  $E\xi_n(\omega) = 0$ . Tehát ez a martingál 1 valószínűséggel konvergál 1-hez, és  $L_1$  normában nem konvergál oda.

A következő eredmény a martingálok 1 valószínűségi konvergenciájáról szóló tétel egyik érdekes következménye, amely segíthet a Radon–Nikodym derivált kiszámításában bizonyos esetekben.

**Tétel.** *Legyen adva egy  $\xi(\omega)$ ,  $E|\xi(\omega)| < \infty$ , valószínűségi változó és  $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots \subset \mathcal{A}$   $\sigma$ -algebrák növekvő sorozata egy  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  valószínűségi mezőn. Jelölje  $\mathcal{F}_\infty$  a  $\mathcal{F}_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$   $\sigma$ -algebrák által generált  $\sigma$ -algebrát. A*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\xi(\omega) | \mathcal{F}_n) = E(\xi(\omega) | \mathcal{F}_\infty)$$

*konvergencia teljesül 1 valószínűséggel és  $L_1$  normában is.*

*A tétel bizonyítása.* A  $(\xi_n(\omega), \mathcal{F}_n)$ ,  $\xi_n(\omega) = E(\xi(\omega) | \mathcal{F}_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , sorozat martingál, és  $E|\xi_n(\omega)| \leq E|\xi(\omega)|$ , ezért alkalmazható rá a martingálok 1 valószínűségi konvergenciájáról szóló tétel. Innen következik, hogy létezik a  $\xi_\infty(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega)$  határérték 1 valószínűséggel alkalmas  $\xi_\infty(\omega)$  valószínűségi változóval, de be kell bizonyítani, hogy  $\xi_\infty(\omega) = E(\xi(\omega) | \mathcal{F}_\infty)$ . Ez ekvivalens azzal az állítással, hogy

$$\int_B \xi_\infty(\omega) P(d\omega) = \int_B \xi(\omega) P(d\omega)$$

minden  $B \in \mathcal{F}_n$  halmazra és  $n = 1, 2, \dots$  számra. Ezért elég belátni, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E|E(\xi | \mathcal{F}_n) - \xi_\infty(\omega)| \rightarrow 0,$$

azaz a  $\xi_n(\omega)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , sorozat nem csak majdnem mindenütt, hanem  $L_1$  normában is konvergál a  $\xi_\infty(\omega)$  valószínűségi változóhoz. Ehhez az analízis általános eredményei alapján elegendő belátni, hogy a  $\xi_n(\omega)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , valószínűségi változók egyenletesen integrálhatóak, azaz minden  $\varepsilon > 0$  számhoz létezik olyan  $K = K(\varepsilon)$  szám, hogy  $\int_{\{\omega: |\xi_n(\omega)| \geq K\}} |\xi_n(\omega)| P(d\omega) \leq \varepsilon$  minden  $n = 1, 2, \dots$  indexre. Viszont

$$\int_{\{\omega: |\xi_n(\omega)| \geq K\}} |\xi_n(\omega)| P(d\omega) \leq \int_{\{\omega: |\xi_n(\omega)| \geq K\}} |\xi(\omega)| P(d\omega),$$

és minden  $\varepsilon > 0$  számhoz létezik olyan  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  szám, hogy  $\int_B |\xi(\omega)| P(d\omega) < \varepsilon$ , ha  $P(B) \leq \delta$ . Másrészt,  $P(\omega: |\xi_n(\omega)| \geq K) \leq \frac{E|\xi_n(\omega)|}{K} \leq \frac{E|\xi(\omega)|}{K} \leq \delta$ , ha  $K \geq K_0(\delta)$  alkalmas  $K_0(\delta) > 0$  számra. A fenti becslésekből következik a Tétel állítása.

**Következmény:** *Legyen adva egy  $(X, \mathcal{X})$  mérhető téren egy  $\mu$  valószínűségi mérték és egy  $\nu$ , a  $\mu$  valószínűségi mértékre nézve abszolút folytonos előjeles mérték, amelynek mind a pozitív mind a negatív része véges. Tekintsük az  $X$  tér olyan egyre finomodó  $\{A_1^{(n)}, \dots, A_{k_n}^{(n)}\}$  partícióit,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $A_j^{(n)} \in \mathcal{X}$ ,  $1 \leq j \leq k_n$ , amelyek egyesítése generálja a  $\mathcal{X}$   $\sigma$ -algebrát, és definiáljuk az  $f_n(x) = \frac{\nu(A_j^{(n)})}{\mu(A_j^{(n)})}$ , ha  $x \in A_j^{(n)}$  függvényeket.*

Az  $f_n(\cdot)$  függvények  $\mu$  majdnem mindenütt konvergálnak a  $\frac{d\nu}{d\mu}(x)$  Radon–Nikodym deriválthoz.

*Bizonyítás:* Tekintsük az  $(X, \mathcal{X}, \mu)$  teret, mint valószínűségi mezőt, vezessük be rajta azokat az  $\mathcal{F}_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $\sigma$ -algebrákat, amelyek atomjai az  $\{A_1^{(n)}, \dots, A_{k_n}^{(n)}\}$  partició elemei, és legyen  $f(x) = \frac{d\nu}{d\mu}(x)$ ,  $x \in X$ . Ekkor a Következményben megfogalmazott feltételek teljesülés esetén  $Ef(x) < \infty$ ,  $f_n(x) = E(f(x)|\mathcal{F}_n)$ , és az  $\mathcal{F}_n$  növekvő  $\sigma$ -algebra sorozat generálja a  $\mathcal{X}$   $\sigma$ -algebrát. Ezért az előző tétel szerint  $f_n(x)$  egy valószínűséggel konvergál az  $f(x)$  függvényhez, és ezt kellett belátnunk.

A fenti eredménynek érvényes a következő általánosítása, amely szintén hasznos bizonyos alkalmazásokban.

**A következmény általánosítása:** Legyen adva egy  $(X, \mathcal{X})$  mérhető téren egy  $\mu$  valószínűségi mérték és egy  $\nu$ , a  $\mu$  valószínűségi mértékre nézve abszolút folytonos előjeles mérték, amelynek mind a pozitív, mind a negatív része véges. Tekintsük az  $X$  téren  $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots$   $\sigma$ -algebrák olyan növekvő sorozatát, amelyek egyesítése generálja a  $\mathcal{X}$   $\sigma$ -algebrát. Vezessük be az  $f_n(x) = \frac{d\nu}{d\mu}\Big|_{\mathcal{F}_n}(x)$ ,  $x \in X$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , valószínűségi változókat, amelyek a  $\mu$  mérték Radon–Nikodym deriváltjával egyenlőek, ha mind a  $\mu$  mind a  $\nu$  mértéket megszorítjuk a  $\mathcal{F}_n$   $\sigma$ -algebrára. Az  $f_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , függvények  $\mu$  majdnem minden pontban és  $L_1(\mu)$  normában is konvergálnak a  $\frac{d\nu}{d\mu}(x)$  Radon–Nikodym deriválthoz az  $(X, \mathcal{X})$  téren.

Megfordítva, ha nem tudjuk, hogy a  $\nu$  mérték abszolút folytonos-e a  $\mu$  mértékre nézve az  $(X, \mathcal{X})$  téren, de tudjuk, hogy az  $f_n(x)$  függvények  $L_1(\mu)$  normában konvergálnak egy  $f_\infty(x)$  függvényhez, akkor állíthatjuk azt, hogy a  $\nu$  mérték abszolút folytonos az  $(X, \mathcal{X})$  téren a  $\mu$  mértékre nézve, és  $\frac{d\nu}{d\mu}(x) = f_\infty(x)$ .

*Indoklás:* Az szorul még magyarázatra, hogy abból, hogy az  $f_n(x)$  függvények  $L_1(\mu)$  normában konvergálnak egy  $f_\infty$  függvényhez miért következik a  $\nu$  mérték abszolút folytonossága a  $\mu$  mértékre nézve az  $(X, \mathcal{X})$  téren  $f_\infty(x)$ ,  $x \in X$ , Radon–Nikodym deriválttal. Viszont az adott feltételek mellett felírhatjuk, hogy

$$\nu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) \mu(dx) = \int_A f_\infty(x) \mu(dx)$$

minden  $A \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$  halmazra. Viszont a mértékek kiterjesztésének egyértelműsége miatt (egy algebráról egy  $\sigma$ -algebrára) következik, hogy a  $\nu(A) = \int_A f_\infty(x) \mu(dx)$  azonosság érvényes minden  $A \in \mathcal{X}$  halmazra, és ezt kellett bizonyítanunk.

*Feladat:* Legyenek  $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots$ , független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, amelyeknek létezik várható értékük. Legyen  $\tau(\omega)$  egy megállási szabály a  $\mathcal{F}_n = \mathcal{B}(\xi_1, \dots, \xi_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $\sigma$ -algebrák sorozatára nézve. Tegyük fel továbbá, hogy létezik olyan  $N$  egész szám, amelyre  $P(\tau(\omega) \leq N) = 1$ . Vezessük be az  $S_n(\omega) =$

$\sum_{k=1}^n \xi_k(\omega)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , jelölést. Mutassuk meg, hogy  $ES_{\tau(\omega)}(\omega) = E\tau(\omega)E\xi_1(\omega)$ . Igaz ennek az állításnak a következő némileg élesebb formája is. Ha  $E\tau < \infty$ , (azaz  $\tau$  nem feltétlenül véges, csak véges várható értékű valószínűségi változó, akkor  $ES_{\tau(\omega)} = E\tau(\omega)E\xi_1(\omega)$ ).

Ha  $E\xi_1(\omega) = 0$ , és  $E\xi_1^2(\omega) < \infty$ ,  $E\tau(\omega) < \infty$ , akkor  $ES_{\tau(\omega)}^2(\omega) = E\tau(\omega)E\xi_1^2(\omega)$ . Ez az állítás átfogalmazható a következő ekvivalens módon. Nem tesszük fel, hogy  $E\xi_1(\omega) = 0$ . Ekkor is felírhatjuk a  $\text{Var} S_{\tau(\omega)}(\omega) = E\tau(\omega)\text{Var} \xi_1(\omega)$  azonosságot. (A fenti eredményeket hívják Wald azonosságnak az irodalomban.)

*Feladat:* Legyen  $S_1(\omega), S_2(\omega), \dots$ , a nulla pontból kiinduló bolyongás az egész számon, azaz legyenek az  $S_{n+1}(\omega) - S_n(\omega)$  valószínűségi változók függetlenek, és vegyenek fel  $+1$  vagy  $-1$  értéket, mind a kettőt  $\frac{1}{2}$  valószínűséggel. Rögzítsünk egy  $a > 0$  pozitív és egy  $b < 0$  negatív egész számot. Jelölje  $\tau_{a,b}(\omega)$  azt a véletlen időpontot, amikor a bolyongás először eléri az  $a$  vagy  $b$  pontot. Lássuk be (az előző feladat eredményének a segítségével), hogy annak a valószínűsége, hogy először az  $a$  pontot látogatja meg a bolyongás  $\frac{a}{a+|b|}$ , annak, hogy a  $b$  pontot  $\frac{|b|}{a+|b|}$ . Továbbá  $E\tau_{a,b} = a|b|$ . Jelölje  $\tau_a(\omega)$  azt a véletlen időpontot, amikor a bolyongás először meglátogatja az  $a > 0$  pontot. Lássuk be, hogy  $P(\tau_a(\omega) < \infty) = 1$ , de  $E\tau_a(\omega) = \infty$ .

*Segítség:* Vegyük észre, hogy  $S_{\tau_{N,(a,b)}(\omega)}(\omega)$ , és  $S_{\tau_{N,(a,b)}(\omega)}^2(\omega) - \tau_{N,(a,b)}(\omega)$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , martingálok, ahol  $\tau_{N,(a,b)}(\omega) = \min(N, \tau_{a,b}(\omega))$ . Ennek segítségével belátható, hogy  $ES_{\tau_{a,b}(\omega)}(\omega) = 0$ , és

$$E\tau_{a,b}(\omega) = ES_{\tau_{a,b}(\omega)}^2(\omega) = a^2P(P(\tau_{a,b}(\omega) = a) + b^2P(\tau_{a,b}(\omega) = -b).$$

Továbbá  $P(\tau_a(\omega) < \infty) = \lim_{b \rightarrow -\infty} P(\tau_{a,b}(\omega) < \infty) = 1$ , és  $E\tau_a(\omega) = \lim_{b \rightarrow -\infty} E\tau_{a,b}(\omega) = \infty$ .

*Feladat:* Legyen  $W(t, \omega)$ ,  $t \geq 0$ , Wiener-folyamat a félegyenesen. Lássuk be, hogy a  $Z(t, \omega) = e^{W(t, \omega) - t^2/2}$ ,  $t \geq 0$ , sztochasztikus folyamat martingál.

*Feladat:* Legyen  $W(t, \omega)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , Wiener-folyamat a  $[0, 1]$  intervallumon. Vegyük a  $[0, 1]$  intervallum egyre finomodó  $0 = t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < \dots < t_{k_n}^{(n)} = 1$  felosztássorozatát minden  $n = 1, 2, \dots$  számra úgy, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{1 \leq j < k_n} (t_{j+1}^{(n)} - t_j^{(n)}) = 0$ , és vegyük a  $Z_n(\omega) =$

$$\sum_{j=1}^{k_n-1} \left( W(t_{j+1}^{(n)}) - W(t_j^{(n)}) \right)^2$$

valószínűségi változókat és  $\mathcal{F}_n = \mathcal{B}(W(t_j^{(n)}))$ ,  $1 \leq j \leq k_n$   $\sigma$ -algebrákat. Mutassuk meg, hogy a  $(Z_n(\omega), \mathcal{F}_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , sorozat martingál. Mutassuk meg a martingálok 1 valószínűségi konvergencia tételének a segítségével, hogy a  $Z_n(\omega)$  sorozat 1 valószínűséggel konvergál 1-hez.

*Segítség:* Ha már bebizonyítottuk azt, hogy a  $Z_n(\omega)$  sorozat 1 valószínűséggel konvergál, de még nem tudjuk, hogy mi a limesz, akkor elegendő egy elég ritka részsorozatának a

határértékét megtalálni annak érdekében, hogy a bizonyítást befejezzük. Az előadásban szereplő hasonló tétel bizonyítása segít ennek a részfeladatnak a megoldásában.

*Nem kötelező feladat:* Tekintsük a  $W(t, \omega)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , Wiener-folyamatot a  $[0, 1]$  intervallumon és a  $W(t, \omega) + mt$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , sztochasztikus folyamatot, ahol  $m$  rögzített valós szám. Jelölje  $\mu$  a Wiener-folyamat, és  $\nu_m$  a  $W(t, \omega) + mt$  sztochasztikus folyamat eloszlását a  $C([0, 1])$  térben. Mutassuk meg, hogy a  $\nu_m$  mérték abszolút folytonos a  $\mu$  mértékre nézve, és Radon–Nikodym deriváltja  $\frac{d\nu_m}{d\mu}(x(t)) = e^{m \cdot x(1) - m^2/2}$  az  $x(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , folytonos függvény helyén.

*Az előző nem kötelező feladat általánosítása:* Tekintsük a  $W(t, \omega)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , Wiener-folyamatot a  $[0, 1]$  intervallumon és egy  $W(t, \omega) + \int_0^t m(t) dt$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , sztochasztikus folyamatot, ahol  $m(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , folytonosan differenciálható függvény. szám. Jelölje  $\mu$  a Wiener-folyamat, és  $\nu_m$  a  $W(t, \omega) + \int_0^t m(t) dt$  sztochasztikus folyamat eloszlását a  $C([0, 1])$  térben. Mutassuk meg, hogy a  $\nu_m$  mérték abszolút folytonos a  $\mu$  mértékre nézve, és Radon–Nikodym deriváltja

$$\frac{d\nu_m}{d\mu}(x(t)) = \exp \left\{ \int_0^1 m(t) dx(t) - \frac{1}{2} \int_0^1 m(t)^2 dt \right\}.$$

(Az eredmény általánosítható, de ennek megfogalmazásához sztochasztikus integrálok használatára van szükség, és ez nem témája ennek az előadásnak.)

*Nem kötelező feladat:* Legyen  $W(t, \omega)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , Wiener-folyamat a  $[0, 1]$  intervallumon. Mutassuk meg, hogy ennek feltételes eloszlása feltéve, hogy  $W(1, \omega) = x$  megegyezik egy  $B(t, \omega) + tx$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , sztochasztikus folyamat eloszlásával, ahol  $B(t, \omega)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , egy Wiener-bridge. Pontosabban megfogalmazva, rögzítve valamilyen  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq 1$  időpontokat és  $u_1, \dots, u_k$  számokat

$$\begin{aligned} P(W(t_1, \omega) < u_1, \dots, W(t_k, \omega) < u_k | W(1, \omega) = x) \\ = P(B(t_1, \omega) + t_1 x < u_1, \dots, B(t_k, \omega) + t_k x < u_k). \end{aligned}$$

*Segítség:* Érdeemes a bizonyításban felhasználni a  $W(t, \omega) = B(t, \omega) + tW(1, \omega)$  azonosságot, ahol  $B(t, \omega) = W(t, \omega) - tW(1, \omega)$  a  $W(1, \omega)$  valószínűségi változótól független Wiener-bridge.

**Kiegészítés.** Wiener-folyamatok martingál jellemzése.

**Tétel a Wiener-folyamatok egy jellemzéséről.** Legyen  $X(t, \omega)$ ,  $0 \leq t < \infty$ , olyan sztochasztikus folyamat, amelyre  $EX^2(t, \omega) < \infty$  minden  $t \geq 0$  számra,  $X(0, \omega) = 0$  egy valószínűséggel, és az  $X(t, \omega)$  és  $X^2(t, \omega) - t$ ,  $t \geq 0$  sztochasztikus folyamatok martingálok (az  $\mathcal{F}_t = \{X(s, \omega), s \leq t\}$ ,  $t \geq 0$   $\sigma$ -algebrák rendszerére nézve). Ha ezenkívül az  $X(t, \omega)$  sztochasztikus folyamat minden trajektóriája folytonos, akkor  $X(t, \omega)$  Wiener-folyamat.

A Wiener-folyamatok martingál jellemzéséről szóló tétel bizonyítása érdekében először megfogalmazom és bebizonyítom a Lindeberg feltételt teljesítő szériasorozatokról szóló centrális határeloszlástétel martingál megfelelőjét, amely valójában az eredeti tétel általánosítása. Először bevezetem a következő definíciót.

**Martingál különbség szériasorozatok definíciója.** Legyen adva minden  $k = 1, 2, \dots$  számra  $\xi_{k,1}, \dots, \xi_{k,n_k}$  valószínűségi változók valamint  $\mathcal{F}_{k,0} \subset \mathcal{F}_{k,1} \subset \dots \subset \mathcal{F}_{k,n_k}$ , növekvő  $\sigma$ -algebrák sorozata, azaz legyen  $\mathcal{F}_{k,j} \subset \mathcal{F}_{k,j'}$  minden  $k = 1, 2, \dots$ , és  $1 \leq j < j' \leq n_k$  indexpárra. Ezt a rendszert martingál különbség szériasorozatnak nevezzük, ha  $\xi_{k,j}$   $\mathcal{F}_{k,j}$  mérhető valószínűségi változó,  $E|\xi_{k,j}| < \infty$ , és  $E(\xi_{k,j} | \mathcal{F}_{k,j-1}) = 0$  egy valószínűséggel minden  $k = 1, 2, \dots$ ,  $1 \leq j \leq n_k$  indexre.

A következő eredményt fogalmazom meg.

**Martingál különbség szériasorozatokról szóló centrális határeloszlástétel.** Legyen valószínűségi változók  $\xi_{k,1}, \dots, \xi_{k,n_k}$  valamint minden rögzített  $k$  indexre növekvő  $\sigma$ -algebrák  $\mathcal{F}_{k,0} \subset \mathcal{F}_{k,1} \subset \dots \subset \mathcal{F}_{k,n_k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , rendszere martingál különbség szériasorozat, amely teljesíti a következő feltételeket is:

a.)  $\sigma_{k,j}^2 = E\xi_{k,j}^2 < \infty$  minden  $k = 1, 2, \dots$ ,  $1 \leq j \leq n_k$  indexekre, és  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n_k} \sigma_{k,j}^2 = 1$ .

b.)  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n_k} E|E(\xi_{k,j}^2 | \mathcal{F}_{k,j-1}) - \sigma_{k,j}^2| = 0$ .

c.) Teljesül a Lindeberg feltétel, azaz

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n_k} E\xi_{k,j}^2 I(\{|\xi_{k,j}| > \varepsilon\}) = 0,$$

minden  $\varepsilon > 0$  számra, ahol  $I(A)$  egy  $A$  halmaz indikátor függvényét jelöli.

Ekkor az  $S_k = \sum_{j=1}^{n_k} \xi_{k,j}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , összegek eloszlásban konvergálnak a standard normális eloszlásfüggvényhez, ha  $k \rightarrow \infty$ .

*A tétel bizonyítása.* Vezessük be minden  $k = 1, 2, \dots$  indexre független, nulla várható értékű,  $\sigma_{k,j}^2$  szórásnégyzetű  $\eta_{k,j}$ ,  $1 \leq j \leq n_k$ , normális eloszlású valószínűségi változók

sorozatát, amelyek függetlenek az  $\mathcal{F}_{k,n_k}$   $\sigma$ -algebrától is. Vezessük be az  $Y_{k,j} = \sum_{s=1}^j \xi_{k,j} + \sum_{s=j+1}^{n_k} \eta_{k,j}$ ,  $1 \leq j \leq n_k$ , (speciálisan  $Y_{k,n_k} = \sum_{j=1}^{n_k} \xi_{k,j}$ ) és  $Y_{k,0} = \sum_{j=1}^{n_k} \eta_{k,j}$  valószínűségi változókat. Azt kívánom megmutatni, hogy minden  $t$  valós számra

$$E(e^{itY_{k,n_k}} - e^{itY_{k,0}}) = \sum_{j=1}^{n_k} E(e^{itY_{k,j}} - e^{itY_{k,j-1}}) \rightarrow 0 \quad \text{ha } k \rightarrow \infty. \quad (\text{A1})$$

Mivel  $Ee^{itY_{k,0}} = \exp\left\{-\sum_{j=1}^{n_k} \frac{\sigma_{k,j}^2 t^2}{2}\right\} \rightarrow e^{-t^2/2}$ , ha  $k \rightarrow \infty$ , ezért (A1) relációból következik, hogy  $Ee^{itS_k} = Ee^{itY_{k,n_k}} \rightarrow e^{-t^2/2}$  minden  $t$  valós számra, ha  $k \rightarrow \infty$ , azaz  $S_k$  karakterisztikus függvénye konvergál a standard normális eloszlás karakterisztikus függvényéhez. Ezért az (A1) formulából következik a Tétel állítása.

Az (A1) reláció bizonyításához jó becslést kell adni az  $E(e^{itY_{k,j}} - e^{itY_{k,j-1}})$  kifejezésekre. Ennek érdekében vegyük észre, hogy mivel az  $\eta_{k,j}$  valószínűségi változók függetlenek az  $\mathcal{F}_{k,n_k}$   $\sigma$ -algebrától, így a  $\xi_{k,j}$ ,  $1 \leq j \leq n_k$  valószínűségi változóktól is, ezért bevezetve az  $U_{k,j} = \sum_{s=1}^j \xi_{k,s}$ ,  $1 \leq j \leq n_k$ ,  $U_{k,0} = 1$ ,  $V_{k,j} = \sum_{s=j+1}^{n_k} \eta_{k,s}$ ,  $0 \leq j < n_k$ ,  $V_{k,n_k} = 1$  mennyiségeket, a következő összefüggéseket írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} |E(e^{itY_{k,j}} - e^{itY_{k,j-1}})| &= \left| E\left(e^{it(U_{k,j-1} + \xi_{k,j} + V_{k,j+1})} - e^{it(U_{k,j-1} + \eta_{k,j} + V_{k,j+1})}\right) \right| \\ &= \left| E\left(e^{it(U_{k,j-1} + \xi_{k,j})} - e^{it(U_{k,j-1} + \eta_{k,j})}\right) \right| |Ee^{itV_{k,j+1}}| \\ &\leq \left| E\left(e^{it(U_{k,j-1} + \xi_{k,j})} - e^{it(U_{k,j-1} + \eta_{k,j})}\right) \right| \\ &\leq E\left(\left| E\left(\left(e^{it(U_{k,j-1} + \xi_{k,j})} - e^{it(U_{k,j-1} + \eta_{k,j})}\right) \middle| \mathcal{F}_{k,j-1}\right) \right|\right). \end{aligned}$$

Továbbá, mivel

$$\begin{aligned} &\left| E\left(\left(e^{it(U_{k,j-1} + \xi_{k,j})} - e^{it(U_{k,j-1} + \eta_{k,j})}\right) \middle| \mathcal{F}_{k,j-1}\right) \right| \\ &= |e^{itU_{k,j-1}}| \left| E\left(\left(e^{it\xi_{k,j}} - e^{it\eta_{k,j}}\right) \middle| \mathcal{F}_{k,j-1}\right) \right| \\ &= \left| E\left(e^{it\xi_{k,j}} \middle| \mathcal{F}_{k,j-1}\right) - e^{-t^2\sigma_{k,j}^2/2} \right|, \end{aligned}$$

ezért

$$\begin{aligned} |E(e^{itY_{k,j}} - e^{itY_{k,j-1}})| &\leq E\left| E\left(e^{it\xi_{k,j}} \middle| \mathcal{F}_{k,j-1}\right) - e^{-t^2\sigma_{k,j}^2/2} \right| \\ &\leq E\left| E\left(e^{it\xi_{k,j}} - 1 - it\xi_{k,j} + \frac{t^2}{2}\xi_{k,j}^2 \middle| \mathcal{F}_{k,j-1}\right) \right| \\ &\quad + E\left| 1 - \frac{t^2}{2}E(\xi_{k,j}^2 | \mathcal{F}_{k,j-1}) - e^{-t^2\sigma_{k,j}^2/2} \right| \end{aligned}$$

$$\leq E \left| e^{it\xi_{k,j}} - 1 - it\xi_{k,j} + \frac{t^2}{2}\xi_{k,j}^2 \right| + E \left| 1 - \frac{t^2}{2}E(\xi_{k,j}^2|\mathcal{F}_{k,j-1}) - e^{-t^2\sigma_{k,j}^2/2} \right|.$$

Másrészt

$$\begin{aligned} & E \left| 1 - \frac{t^2}{2}E(\xi_{k,j}^2|\mathcal{F}_{k,j-1}) - e^{-t^2\sigma_{k,j}^2/2} \right| \\ & \leq \frac{t^2}{2}E|\sigma_{k,j}^2 - E(\xi_{k,j}^2|\mathcal{F}_{k,j-1})| + \left| 1 - \frac{t^2}{2}\sigma_{k,j}^2 - e^{-t^2\sigma_{k,j}^2/2} \right|. \end{aligned}$$

Az előző két egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned} |E(e^{itY_{k,j}} - e^{itY_{k,j-1}})| & \leq E \left| e^{it\xi_{k,j}} - 1 - it\xi_{k,j} + \frac{t^2}{2}\xi_{k,j}^2 \right| \\ & + \frac{t^2}{2}E|E(\xi_{k,j}^2|\mathcal{F}_{k,j-1}) - \sigma_{k,j}^2| + \left| 1 - \frac{t^2}{2}\sigma_{k,j}^2 - e^{-t^2\sigma_{k,j}^2/2} \right|. \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

A Lindeberg feltételből következik a  $\sigma_{k,j}^2 = E\xi_{k,j}^2$  mennyiségek következő egyenletes kicsiségi tulajdonsága:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq n_k} \sigma_{k,j}^2 = 0. \quad (\text{A3})$$

Valóban tetszőleges  $\varepsilon > 0$  számra létezik olyan  $k_0 = k_0(\varepsilon)$  index, hogy  $k \geq k_0$ ,  $1 \leq j \leq n_k$  indexekre

$$\sigma_{k,j}^2 = E\xi_{j,k}^2 I(|\xi_{k,j}| \leq \varepsilon) + E\xi_{j,k}^2 I(|\xi_{k,j}| > \varepsilon) \leq \varepsilon^2 + E\xi_{j,k}^2 I(|\xi_{k,j}| > \varepsilon) \leq 2\varepsilon$$

minden  $1 \leq j \leq k$  indexre, ha  $k \geq k_0$  a Lindeberg feltétel alapján. Innen következik az (A3) reláció. Az (A3) relációból levezethető, hogy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n_k} \left| 1 - \frac{t^2}{2}\sigma_{k,j}^2 - e^{-t^2\sigma_{k,j}^2/2} \right| = 0. \quad (\text{A4})$$

Valóban, létezik olyan  $k_0 = k_0(\varepsilon, t)$  index, amelyre igaz, hogy  $\left| 1 - \frac{t^2}{2}\sigma_{k,j}^2 - e^{-t^2\sigma_{k,j}^2/2} \right| \leq t^4\sigma_{k,j}^4 \leq \varepsilon\sigma_{k,j}^2$  ha  $k \geq k_0$  minden  $1 \leq j \leq n_k$  indexre. Ezeket az egyenlőtlenségeket összeadva minden  $1 \leq j \leq n_k$  indexre, és felhasználva a  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n_k} \sigma_{k,j}^2 = 1$  feltételt, kapjuk az (A4) relációt.

A Lindeberg feltétel felhasználásával megmutatható az is, hogy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n_k} E \left| e^{it\xi_{k,j}} - 1 - it\xi_{k,j} + \frac{t^2}{2}\xi_{k,j}^2 \right| = 0. \quad (\text{A5})$$

Valóban rögzítve egy tetszőlegesen kicsi  $\varepsilon > 0$  számot, és felhasználva az  $|e^{itx} - 1 - itx + \frac{t^2}{2}x^2| \leq \frac{|t|^3|x|^3}{6} \leq \varepsilon \frac{|t|^3|x^2}{6}$ , ha  $|x| \leq \varepsilon$  és  $|e^{itx} - 1 - itx + \frac{t^2}{2}x^2| \leq t^2x^2$ , ha  $|x| > \varepsilon$  egyenlőtlenségeket, kapjuk, hogy

$$E \left| e^{it\xi_{k,j}} - 1 - it\xi_{k,j} + \frac{t^2}{2}\xi_{k,j}^2 \right| \leq \varepsilon \frac{|t|^3 E\xi_{k,j}^2}{6} + t^2 E\xi_{k,j}^2 I(|\xi_{k,j}| > \varepsilon).$$

Összeadva a fenti egyenlőtlenséget minden  $1 \leq j \leq n_k$  indexre, és felhasználva a  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n_k} \sigma_{k,j}^2 = 1$  feltételt és a Lindeberg feltételt azt kapjuk, hogy

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n_k} E \left| e^{it\xi_{k,j}} - 1 - it\xi_{k,j} + \frac{t^2}{2}\xi_{k,j}^2 \right| \leq \varepsilon |t^3|.$$

Mivel a fenti reláció igaz minden  $\varepsilon > 0$  számra, innen következik az (A5) reláció.

Az (A1) reláció első azonosságából, az (A2), (A4) és (A5) relációkból valamint a Tétel b) feltételéből következik az (A1) reláció második fele is. A tételt beláttuk.

Szükségünk lesz még az alábbi lemmára és annak egy következményére.

**Lemma.** *Legyen  $X(t)$  folytonos trajektóriájú sztochasztikus folyamat valamely  $[0, T]$  intervallumon. Rögzítsünk két  $\varepsilon$  és  $\alpha$  pozitív számot, és vezessük be segítségükkel az alábbi  $\tau$  valószínűségi változót:*

$$\tau = \tau(\varepsilon, \alpha, T) = \max\{t: |X(u) - X(v)| \leq \varepsilon, \quad \text{ha } 0 \leq u \leq v \leq T, \text{ és } |u - v| \leq \alpha\}.$$

*A  $\tau$  valószínűségi változó megállási szabály egy  $\mathcal{F}_t$ ,  $0 \leq t \leq T$ , monoton  $\sigma$ -algebra rendszerre nézve, ha  $\mathcal{B}(X_s, 0 \leq s \leq t) \subset \mathcal{F}_t$ , azaz  $\{\omega: \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$  minden  $0 \leq t \leq T$  számra.*

*Tekintsünk egy tetszőleges  $0 \leq t \leq T$  számot, és definiáljuk a  $\tau_t = \min\{t, \tau\}$  valószínűségi változót. Ha  $E|g(X(u), u)| < \infty$ ,  $0 \leq u \leq T$ , és  $(g(X(u), u), \mathcal{F}_u)$ ,  $0 \leq u \leq T$ , martingál valamely folytonos  $g(x, u)$  függvénnel és  $\mathcal{F}_u$ ,  $0 \leq u \leq T$ , monoton növekvő  $\sigma$ -algebra rendszerrel, akkor  $g(X(\tau_t), \tau_t) = E(g(X(T), T)|\mathcal{F}_{\tau_t})$ .*

**Következmény.** *Legyen  $X(u)$ ,  $0 \leq u \leq T$ , folytonos trajektóriájú sztochasztikus folyamat valamely  $[0, T]$  intervallumon, amelyre  $EX^2(u) < \infty$ ,  $0 \leq u \leq T$ . Legyen továbbá  $(X(u), \mathcal{F}_u)$  és  $(X^2(u) - u, \mathcal{F}_u)$ ,  $0 \leq u \leq T$ , martingál valamely  $\mathcal{F}_u$ ,  $0 \leq u \leq T$ , monoton növekvő  $\sigma$ -algebra rendszerrel. Ekkor az  $(X(\tau_t), \mathcal{F}_{\tau_t})$  és  $(X^2(\tau_t) - \tau_t, \mathcal{F}_{\tau_t})$ ,  $0 \leq t \leq T$ , sztochasztikus folyamatok a lemmában definiált  $\tau_t$  valószínűségi változókkal szintén martingálok.*

*A Lemma bizonyítása.* Adva egy  $0 \leq t < T$  szám, jelölje  $Q_t$  a  $[0, t]$  intervallumba eső racionális számok halmazát. Ekkor

$$\{\omega: \tau(\omega) \leq t\} = \bigcup_{(u,v): u \in Q_t, v \in Q_t, |u-v| \leq \alpha} \bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{ \omega: |X(u, \omega) - X(v, \omega)| \geq \varepsilon + \frac{1}{m} \right\} \in \mathcal{F}_t,$$

ami azt jelenti, hogy  $\tau(\omega)$  megállási szabály. (A  $t = T$  elfajuló esetben nyilván igaz, hogy  $\{\omega: \tau(\omega) \leq T\} = \Omega \in \mathcal{F}_T$ .) A fenti relációban felírt azonosság érvényes, mert  $\tau(\omega) \leq t$  akkor és csak akkor, ha létezik két olyan  $0 \leq \bar{u}, \bar{v} \leq t$  szám, amelyekre  $|\bar{u} - \bar{v}| \leq \alpha$ , és  $|X(\bar{u}, \omega) - X(\bar{v}, \omega)| > \varepsilon$ . Ekkor azonban (a trajektóriák folytonossága miatt) léteznek olyan  $u \in Q_t$  és  $v \in Q_t$  számok, és  $m$  pozitív egész szám, amelyekre  $|u - v| \leq \alpha$ , és  $|X(u, \omega) - X(v, \omega)| \geq \varepsilon + \frac{1}{m}$ .

Legyen  $Z_u = g(X(u), u)$ ,  $0 \leq u \leq T$ , és tekintsük minden  $m = 1, 2, \dots$  pozitív egész és  $0 \leq t \leq T$  valós számra a  $Z_{\frac{jT}{m}} = g\left(X\left(\frac{jT}{m}\right), \frac{jT}{m}\right)$  valószínűségi változókat, a  $\mathcal{G}_{\frac{jT}{m}} = \mathcal{F}_{\frac{jT}{m}}$   $\sigma$ -algebrákat,  $1 \leq j \leq m$ , valamint a  $\tau_{t(m)}$  diszkrétizált megállási szabályt, amelyet a  $\tau_t^{(m)} = \frac{l}{m}$ , ha  $\frac{l-1}{m} < \tau_t \leq \frac{l}{m}$ ,  $1 \leq l \leq m$ , képlet segítségével definiálunk. (Jegyezzük meg, hogy az  $X(t)$  folyamat trajektóriáinak folytonosságából, és a  $\tau$  valószínűségi változó definíciójából következik, hogy  $\tau(\omega) > 0$  minden  $\omega$ -ra.)

Ha  $(g(X(u), u), \mathcal{F}_u)$ ,  $0 \leq u \leq T$ , martingál, akkor  $\left(Z_{\frac{jT}{m}}, \mathcal{G}_{\frac{jT}{m}}\right)$ ,  $1 \leq j \leq m$ , szintén martingál, és  $\tau_t^{(m)}$  megállási szabály erre a rendszerre nézve. Ezért az előadásban tárgyalt véletlenül megállított (szemi)martingálok várható értékének becsléséről szóló tétel alapján (annak (D3) képletét használva) kapjuk, hogy  $Z_{\tau_t^{(m)}} = E(Z_T | \mathcal{F}_{\tau_t^{(m)}})$  minden  $m = 1, 2, \dots$  számra. Másrészt  $Z_{\tau_t} = \lim_{m \rightarrow \infty} Z_{\tau_t^{(m)}}$  a  $g(X(u), u)$ ,  $0 \leq u \leq T$ , folyamat trajektóriáinak folytonossága miatt. Ezért a Lemma bizonyításának befejezése érdekében elég megmutatni azt, hogy az  $E(Z_T | \mathcal{F}_{\tau_t^{(m)}})$  valószínűségi változók konvergálnak az  $E(Z_T | \mathcal{F}_{\tau_t})$  valószínűségi változóhoz, ha  $m \rightarrow \infty$ .

Sőt, a kívánt állítás igazolásához elég azt ellenőrizni, hogy az  $E(Z_T | \mathcal{F}_{\tau_t^{(m)}})$  valószínűségi változók,  $m = 1, 2, \dots$ , egyenletesen integrálhatóak. Ugyanis azt már tudjuk, hogy ezek 1 valószínűséggel konvergálnak valamely (egyelőre ismeretlen)  $Z$  valószínűségi változóhoz. Ezért az egyenletes integrálhatóságból, illetve az  $\mathcal{F}_{\tau_t} \subset \mathcal{F}_{\tau_t^{(m)}}$  relációból következik, hogy  $\int_A Z dP = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_A E(Z_T | \mathcal{F}_{\tau_t^{(m)}}) dP = \int_A Z_T dP$  minden  $A \in \mathcal{F}_{\tau_t}$  halmazra. Innen kapjuk, hogy  $Z = E(Z_T | \mathcal{F}_{\tau_t})$ .

A kívánt egyenletes integrálhatóság igazolásához, (azaz az  $\int_{|Z^{(m)}| > K} |Z^{(m)}| dP \leq \varepsilon$  egyenlőtlenség bizonyításához minden  $m = 1, 2, \dots$  számra, ha  $K \geq K(\varepsilon)$  ahol  $Z^{(m)} = E(Z_T | \mathcal{F}_{\tau_t^{(m)}})$ ) elég azt megmutatni, hogy egyrészt minden  $\varepsilon > 0$  számhoz létezik olyan  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  szám, hogy  $\int_B |Z^{(m)}| dP \leq \varepsilon$ , ha  $P(B) \leq \delta$  és  $B \in \mathcal{F}_{\tau_t^{(m)}}$ , másrészt  $P(|Z^{(m)}| > K) \leq \delta$  minden  $m = 1, 2, \dots$  számra, ha  $K \leq K(\delta)$  alkalmas  $K(\delta)$  számmal. Az első állítás azért igaz, mert az adott feltételek mellett  $\int_B |Z^{(m)}| dP \leq \int_B |Z_T| dP$ , és  $\int_B |Z_T| dP < \varepsilon$ , ha  $P(B) < \delta$ . A második állítás azért igaz, mert  $E|Z^{(m)}| = E|E(Z_T | \mathcal{F}_{\tau_t^{(m)}})| \leq E|Z_T|$ , és innen  $P(|Z^{(m)}| > K) \leq \frac{E|Z^{(m)}|}{K} \leq \frac{E|Z_T|}{K} \leq \delta$ , ha  $K \geq K(\delta)$ . A lemmát bebizonyítottuk.

*A Következmény bizonyítása.* Az adott feltételek mellett  $X(\tau_t, \omega) = E(X(T, \omega) | \mathcal{F}_{\tau_t})$  és  $X^2(\tau_t, \omega) - \tau_t(\omega) = E(X^2(T, \omega) - T | \mathcal{F}_{\tau_t})$ . Ezért, ha  $0 \leq s \leq t \leq T$ , akkor  $\mathcal{F}_{\tau_s} \subset \mathcal{F}_{\tau_t}$ , és  $E(X(\tau_t, \omega) | \mathcal{F}_{\tau_s}) = E(E(X(T, \omega) | \mathcal{F}_{\tau_t}) | \mathcal{F}_{\tau_s}) = E(X(T, \omega) | \mathcal{F}_{\tau_s}) = X(\tau_s, \omega)$ . Ez a következmény első állítása. A második állítás hasonlóan bizonyítható.

*A Wiener-folyamatok egy jellemzéséről szóló tétel bizonyítása.* Azt kell megmutatnunk, hogy a tétel feltételeinek teljesülése esetén tetszőleges  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m$  számokra az  $X(t_j) - X(t_{j-1})$ ,  $1 \leq j \leq m$ , valószínűségi változók független nulla várható értékű,  $t_j - t_{j-1}$  szórásnégyzetű, normális eloszlású valószínűségi változók. A bizonyítás fő részében azt magyarázom el, hogy hogyan látható  $t_1 = 1$  esetben az, hogy  $X(t_1) - X(t_0) = X(1) - X(0) = X(1)$  standard normális eloszlású valószínűségi változó. Ezután elmagyarázom, hogyan lehet a tétel állítását teljes egészében belátni. (Valójában a Tétel egy enyhe általánosítását bizonyítom be.)

Tekintsünk egy folytonos trajektóriákkal rendelkező sztochasztikus folyamatot egy  $[0, 1]$  intervallumban. Mivel egy véges intervallumban folytonos függvény egyenletesen is folytonos, ezért az  $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , sorozathoz választható olyan  $\alpha_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , sorozat, amelyre

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P \left( \sup_{0 \leq s, t \leq 1, |t-s| \leq \alpha_k} |X(t, \omega) - X(s, \omega)| > \varepsilon_k \right) = 0.$$

Feltehetjük a fenti relációban, hogy  $\alpha_k \rightarrow 0$ , és  $n_k = \frac{1}{\alpha_k}$  egész szám, ha  $k \rightarrow \infty$ . Tekintsük a lemmában bevezetett  $\tau = \tau_k = \tau(\varepsilon_k, \alpha_k, 1)$  és  $\tau_k^{(j)} = \min\{\tau_k, j\alpha_k\}$ ,  $1 \leq j \leq n_k$  valószínűségi változókat,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $0 \leq j \leq n_k$ . Legyen továbbá  $\xi_{k,j} = X(\tau_k^{(j)}) - X(\tau_k^{(j-1)})$ ,  $1 \leq j \leq n_k$ . Ekkor  $\lim_{k \rightarrow \infty} P(X(1, \omega) = X(\tau_k, \omega)) = 1$ . Ezért elegendő belátni,

hogy az  $X(\tau_k) = \sum_{j=1}^{n_k} \xi_{k,j}$  valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak a standard normális eloszláshoz. Megmutatom, hogy ez az állítás következik a martingál különbség szériasorozatokról szóló centrális határeloszlástételből és a Lemma következményéből.

Valóban, legyen  $\mathcal{F}_{k,j} = \mathcal{F}_{\tau_k^{(j)}}$ ,  $\mathcal{F}_{k,0} = \mathcal{F}_0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $1 \leq j \leq n_k$ . Ekkor a Lemma következménye alapján  $(\xi_{k,j}, \mathcal{F}_{k,j})$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $1 \leq j \leq n_k$ , martingál különbség sorozat, és  $E(\xi_{k,j}^2 | \mathcal{F}_{k,j-1}) = E(\min\{\tau_k, j\alpha_k\} | \mathcal{F}_{k,j-1}) - \min\{\tau_k, (j-1)\alpha_k\}$ , mert

$$\begin{aligned} E(\xi_{k,j}^2 | \mathcal{F}_{k,j-1}) &= E((X(\tau_k^{(j)}) - X(\tau_k^{(j-1)}))^2 | \mathcal{F}_{k,j-1}) \\ &= E(X(\tau_k^{(j)})^2 - \tau_k^{(j)} | \mathcal{F}_{k,j-1}) + E(\tau_k^{(j)} | \mathcal{F}_{k,j-1}) \\ &\quad - 2X(\tau_k^{(j-1)})E X(\tau_k^{(j)} | \mathcal{F}_{k,j-1}) + X(\tau_k^{(j-1)})^2 \\ &= X(\tau_k^{(j-1)})^2 - \tau_k^{(j-1)} + E(\tau_k^{(j)} | \mathcal{F}_{k,j-1}) - 2X(\tau_k^{(j-1)})^2 + X(\tau_k^{(j-1)})^2 \\ &= E(\tau_k^{(j)} | \mathcal{F}_{k,j-1}) - \tau_k^{(j-1)}. \end{aligned}$$

Ellenőrizni akarjuk, hogy a  $(\xi_{k,j}, \mathcal{F}_{k,j})$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $1 \leq j \leq n_k$ , valószínűségi változók teljesítik a martingál különbség szériasorozatokról szóló centrális határeloszlástétel feltételeit. A  $(\xi_{k,j}, \mathcal{F}_{k,j})$  párok nyilván martingál különbség szériasorozatot alkotnak. Nem nehéz belátni, hogy teljesítik az a) tulajdonságot, mert

$$E\xi_{k,j}^2 = E(\min\{\tau_k, j\alpha_k\}) - E(\min\{\tau_k, (j-1)\alpha_k\}),$$

ahonnan  $\sum_{j=1}^{n_k} E\xi_{k,j}^2 = E(\min\{\tau_k, 1\}) \rightarrow 1$ , ha  $k \rightarrow \infty$ , mivel  $\lim_{k \rightarrow \infty} P(\tau_k = 1) = 1$ , és  $\tau_k(\omega) \leq 1$  minden  $\omega$ -ra. A c) feltétel szintén nyilván teljesül, mert a konstrukció alapján  $P(|\xi_{k,j}| > \varepsilon) = 0$  minden  $1 \leq j \leq n_k$  indexre, ha  $k \leq \frac{1}{\varepsilon}$ .

A b) tulajdonság igazolásához vegyük észre, hogy

$$E(\xi_{k,j}^2 | \mathcal{F}_{k,j-1}) = E([\min\{\tau_k, j\alpha_k\} - \min\{\tau_k, (j-1)\alpha_k\}] | \mathcal{F}_{k,j-1}) \leq \alpha_k,$$

ahonnan  $\sigma_{k,j}^2 \leq \alpha_k$  is következik, és

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_k} E|E(\xi_{k,j}^2 | \mathcal{F}_{k,j-1}) - \alpha_k| &\leq \sum_{j=1}^{n_k} E(\alpha_k - E(\xi_{k,j}^2 | \mathcal{F}_{k,j-1})) \\ &= 1 - \sum_{j=1}^{n_k} E\xi_{k,j}^2 \rightarrow 0 \quad \text{ha } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Mivel  $E|E(\xi_{k,j}^2 | \mathcal{F}_{k,j-1}) - \sigma_{k,j}^2| = 2E\left|E(\xi_{k,j}^2 | \mathcal{F}_{k,j-1}) - \sigma_{k,j}^2\right|_- \leq 2E|E(\xi_{k,j}^2 | \mathcal{F}_{k,j-1}) - \alpha_k|$ , ahol  $|x|_- = \max(-x, 0)$ , ezért a fenti relációkból

$$\sum_{j=1}^{n_k} E|E(\xi_{k,j}^2 | \mathcal{F}_{k,j-1}) - \sigma_{k,j}^2| \leq 2 \sum_{j=1}^{n_k} E|E(\xi_{k,j}^2 | \mathcal{F}_{k,j-1}) - \alpha_k| \rightarrow 0, \quad \text{ha } k \rightarrow \infty,$$

és a b) feltétel is teljesül. Így az  $X(\tau_k)$  valószínűségi változók konvergálnak a standard normális eloszláshoz, és ezt kellett belátnunk.

Az általános eset tárgyalása előtt vezessük be a Wiener-folyamat kissé általánosabb definícióját.

**Általánosított Wiener-folyamat definíciója.** *Legyen adva egy  $X(t, \omega)$  sztochasztikus folyamat,  $\mathcal{F}_t$   $\sigma$ -algebrák növekvő sorozata,  $0 \leq t \leq T$ , azaz legyen  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ , ha  $0 \leq s \leq t \leq T$ . Tegyük fel továbbá, hogy  $X(t, \omega)$   $\mathcal{F}_t$  mérhető minden  $0 \leq t \leq T$  számra. Azt mondjuk, hogy az  $(X(t, \omega), \mathcal{F}_t)$  párok,  $0 \leq t < T$ , (általánosított) Wiener-folyamatot alkotnak a  $[0, T]$  intervallumon, ha  $X(0, \omega) = 0$  minden  $\omega$  elemi eseményre,  $X(t, \omega) - X(s, \omega)$  az  $\mathcal{F}_s$   $\sigma$ -algebrától független, nulla várható értékű,  $t-s$  szórásnégyzetű normális eloszlású valószínűségi változó minden  $0 \leq s < t \leq T$  számpárra, és  $X(t, \omega)$  folytonos trajektóriájú sztochasztikus folyamat minden  $\omega$  elemi eseményre.*

Érvényes az (általánosított) Wiener-folyamatok következő jellemzése.

**Tétel az (általánosított) Wiener-folyamatok egy jellemzéséről.** *Legyen adva egy  $X(t, \omega)$ , sztochasztikus folyamat és  $\mathcal{F}_t$ ,  $\sigma$ -algebrák növekvő sorozata  $0 \leq t \leq T$  paraméterekre úgy, hogy  $X(t, \omega)$   $\mathcal{F}_t$  mérhető minden  $0 \leq t \leq T$  számra. Tegyük fel azt is, hogy  $EX^2(t, \omega) < \infty$  minden  $t \geq 0$  számra,  $X(0, \omega) = 0$  minden  $\omega$  elemi eseményre, és az  $(X(t, \omega), \mathcal{F}_t)$  és  $(X^2(t, \omega) - t, \mathcal{F}_t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , párok martingálok. Ha ezenkívül*

az  $X(t, \omega)$  sztochasztikus folyamat minden trajektóriája folytonos, akkor az  $(X(t, \omega), \mathcal{F}_t)$  rendszer (általánosított) Wiener-folyamat a  $[0, T]$  intervallumon.

*A Tétel bizonyítása.* Azt kell megmutatni, hogy tetszőleges  $0 \leq s < t \leq T$  számpárra  $X(t, \omega) - X(s, \omega)$  a  $\mathcal{F}_s$   $\sigma$ -algebrától független nulla várható értékű  $t - s$  szórásnégyzetű normális eloszlású valószínűségi változó. Ezt az előző bizonyítás némi módosításával, finomításával megtehetjük.

Rögzítsünk egy  $0 \leq s \leq T$  számot, és definiáljuk az  $Y(u, \omega) = X(s+u, \omega) - X(s, \omega)$ ,  $0 \leq u \leq T - s$ , sztochasztikus folyamatot, és  $\mathcal{G}_u = \mathcal{F}_{s+u}$   $\sigma$ -algebrákat,  $0 \leq t \leq T - s$ . Vegyük észre, hogy  $E(Y(v, \omega)|\mathcal{G}_u) = 0$  és  $E(Y^2(v, \omega) - v|\mathcal{G}_u) = Y^2(u, \omega) - u$ , ha  $0 \leq u < v \leq T - s$ . Az utolsó azonosságot a következő számolás mutatja:

$$\begin{aligned} E(Y^2(v, \omega) - v|\mathcal{G}_u) &= E([X(v+s, \omega) - X(s, \omega)]^2 - v|\mathcal{F}_{s+u}) \\ &= E(X^2(v+s, \omega) - (v+s)|\mathcal{F}_{s+u}) + X^2(s, \omega) - 2X(s, \omega)EX(v+s, \omega)|\mathcal{F}_{s+u}) + s \\ &= X^2(u+s, \omega) - (u+s) + X^2(s, \omega) - 2X(s, \omega)X(u+s, \omega) + s \\ &= (X(u+s, \omega) - X(s, \omega))^2 - u = Y^2(u, \omega) - u. \end{aligned}$$

Ezért alkalmazhatjuk az előző bizonyítást némi átskálázással. Abból azt kapjuk, hogy  $Y(t-s, \omega) = X(t, \omega) - X(s, \omega)$  nulla várható értékű,  $t - s$  szórásnégyzetű normális eloszlású valószínűségi változó. Meg kell még mutatni azt is, hogy ez a valószínűségi változó független a  $\mathcal{F}_s$   $\sigma$ -algebrától. Ennek érdekében alkalmazzuk a következő érvelést.

Vegyünk egy tetszőleges  $B \in \mathcal{F}_s = \mathcal{G}_0$  eseményt, amelyre  $P(B) > 0$ , és tekintsük az  $(Y(u, \omega), \mathcal{G}_u)$ ,  $0 \leq u \leq T - s$ , párokat ugyanazon az  $(\Omega, \mathcal{A})$  valószínűségi mezőn, de helyettesítsük a  $P$  valószínűségi mértéket azzal a  $P_B$  valószínűségi mértékkel, amelyet a  $P_B(A) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)}$ ,  $A \in \mathcal{A}$ , képlet definiál. Az  $(Y(u, \omega), \mathcal{G}_u)$  és  $(Y^2(u, \omega) - u, \mathcal{G}_u)$ ,  $0 \leq u \leq T - s$ , rendszerek továbbra is martingált alkotnak. Ezért a fenti  $P_B$  mérték helyettesítéssel kapott rendszerre alkalmazva a már bizonyított eredményt, kapjuk, hogy  $P(\{\omega: X(t, \omega) - X(s, \omega) < x\} \cap B) = P(B)\Phi(x, t-s)$ , ahol  $\Phi(x, \sigma^2)$  a nulla várható értékű  $\sigma^2$  szórásnégyzetű normális eloszlás értékét jelöli az  $x$  helyen. Mivel ez az állítás igaz minden  $x$  valós számra és  $B \in \mathcal{F}_s$  eseményre, innen következik a tétel állítása.