A DECEMBER 23.-I VIZSGA FELADATAI ÉS KÉRDÉSEI

1.) Legyen ξ és η két független valószínűségi változó, ahol ξ egyenletes eloszlású a $[0,1]$ intervallumon, azaz sűrűségfüggvénye $f(x) = 1$, ha $0 \le x \le 1$, és $f(x) = 0$ egyébként. Az η valószínűségi változó exponenciális eloszlású $\lambda = 1$ paraméterrel, azaz sűrűségfüggvénye $g(x) = e^{-x}$, ha $x \ge 0$, és $g(x) = 0$, ha $x < 0$. Számolja ki a $\xi + \eta$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét.

2.) Egy urnában 20 piros és 30 fehér golyó van. Kihúzunk egymás után 11 golyót visszatevéssel. Számítsa ki a két egymást követő fehér—fehér golyó húzások számának a várható értékét és szórásnégyzetét.

3.) Egy szabályos dobókockát feldobunk tízszer. Jelölje ξ a páros értékű dobások számának az összegét. Számolja ki az $E\xi^3$ várható értéket.

4.) Ledobunk a $[-1,1]$ intervallumra 2700 pontot egyenletes eloszlással, tehát a ledobott pontok helyének a sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{2}$, ha $-1 \le x \le 1$, és $f(x) = 0$ egyébként. Adjunk jó közelítő becslést egy normális eloszlástáblázat segítségével annak valószínűségére, hogy a kapott pontok értékeinek az összege nagyobb, mint 15, és a négyzetösszege nagyobb, mint 880. (A feladat úgy értendő, hogy annak valószínűségét kell kiszámítani, hogy mind a két esemény bekövetkezik.)

5.)

a) Milyen tulajdonságokat kell teljesítenie egy egyváltozós $F(x)$ illetve egy k-változós $F(x_1, \dots, x_k)$ függvénynek ahhoz, hogy egy egy illetve k-változós eloszlásfüggvény legyen?

b) Milyen feltételek teljesülése esetén létezik egy valószínűségi mező és azon végtelen sok előírt együttes eloszlású valószínűségi változó? A Kolmogorov-féle alaptétel e kérdésről szóló eredményének az ismertetését kérem. (Az előadáson ennek az eredménynek több egymáshoz hasonló, de nem teljesen ekvivalens változatát fogalmaztam meg. Ezek bármelyikének helyes ismertetése jó válasznak minősül.)

6.) Hogyan szól a centrális határeloszlástétel legáltalánosabb alakja szériasorozatokra? Ezen belül fogalmazza meg az egyenletes kicsiség feltételét és a Lindeberg feltételt. Ha fel tud sorolni olyan centrális határeloszlástétel tipusú eredményeket, amelyek következnek az általános esetben érvényes centrális határeloszlástételből, akkor tegye meg. (Olyan eredményekről van szó, amelyek a centrális határeloszlástétel érvényességét mondják ki gyengébb, de jobban ellenőrizhető feltételek mellett.)

7.) Mikor mondjuk, hogy ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi változók egy sorozata eloszlásban konvergál egy $F(x)$ eloszlásfüggvényhez?