FELADATOK

1. Legyen ξ és η két független valószínűségi változó, amelyek közül ξ λ paraméterű és η μ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó, azaz a ξ valószínűségi változó $f(\cdot)$ sűrűségfüggvénye $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, ha $x \ge 0$, $f(x) = 0$, ha $x < 0$, az η valószínűségi változó $g(\cdot)$ sűrűségfüggvénye $g(x) = \mu e^{-\mu x}$, ha $x > 0$, $g(x) = 0$, ha $x < 0$, továbbá $\lambda > 0$, $\mu > 0$ és $\lambda \ne \mu$. Számítsuk ki a $\xi + \eta$ összeg sűrűségfüggvényét.

2.) Legyen a (ξ, η) kétdimenziós véletlen vektor eloszlása egyenletes a $(0,0)$, $(0,1)$, $(2,0)$ csúcspontok által meghatározott derékszögű háromszögben, azaz legyen sűrűségfüggvénye az $f(x,y) = 1$ az $x \ge 0$, $y \ge 0$, $2y + x \le 2$ egyenlőtlenséget teljesítő (x,y) pontokban, és $f(x,y) = 0$ egyébként. Számoljuk ki a ξ és η valószínűségi változók $\mathrm{Cov}\,(\xi, \eta)$ kovarianciáját.

3.) Adott két urna, mindkettőben 20 piros és 30 fehér golyó. Kihúzunk egymás után tíz alkalommal egy-egy golyót mind a két urnából. Az első urnából visszatevéssel, a második urnából visszatevés nélkül húzzuk ki a golyót. Számoljuk ki azon húzáspárok számának a várható értékét és szórásnégyzetét, amelyek során a két kihúzott golyó színe megegyezik.

4.) Van egy hatvan különböző kártyát tartalmazó kártyacsomagunk. Kihúzunk 30 lapot úgy, hogy a harmadik, hatodik, ... harmincadik után (tehát a hárommal osztható húzásszámok esetén) a kihúzott lapot nem tesszük vissza a kártyacsomagba, és az összes többi húzás után a kihúzott lapot visszatesszük a kártyacsomagba. Mi a kihúzott különböző kártyalapok számának a várható értéke? (Egy viszonylag egyszerű képletet kell erre adni, a várható érték numerikus értékének kiszámítását nem kívánom.)

5.) Ledobunk 6000 pontot egymástól függetlenül a $[0,3]$ intervallumra egyenletes eloszlással, azaz a ledobott pontok helyének sűrűségfüggvénye legyen $f(x) = \frac{1}{3}$, ha $0 \le x \le 3$, és $f(x) = 0$ egyébként. Egy jegyzőkönyvbe felírjuk a ledobott pontok némileg módosított értékét a következő módon. Ha a ledobott pont értéke a $[0,1]$ intervallumba esik, akkor a pont értéket írjuk a jegyzőkönyvbe, ha a pont az $[1,2]$ intervallumba esik akkor az 1 számot, ha pont a $[2,3]$ intervallumba esik, akkor a 2 számot írjuk a jegyzőkönyvbe. Adjunk egy normális eloszlásfüggvény táblázat segítségével jó közelítő értéket annak valószínűségére, hogy a jegyzőkönyvbe írt 6000 szám összege 6940 és 7080 közé esik.

6.) Mikor mondjuk, hogy egy $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ n-dimenziós véletlen vektor normális eloszlású?

MEGOLDÁSOK.

1. Tudjuk, hogy a tekintett két független valószínűségi változó összegének a sűrűségfüggvényét az $f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(x-y)\, du$ konvolució segítségével számíthatjuk ki. Mivel $f(x) = 0$, $g(x) = 0$, ha $x < 0$, ezért ebben az esetben a konvolucióban

szereplő integrandus $f(u)g(x-u)=0$, ha $u<0$ vagy $x-u<0$, azaz $u\geq x$. Innen

$$f*g(x)=\int_0^x \lambda e^{-\lambda u}\mu e^{-\mu(x-u)}\,du=\lambda\mu e^{-\mu x}\int_0^x e^{-(\lambda-\mu)u}\,du,\quad \text{ha } x\geq 0,$$

és $f*g(x)=0$, ha $x<0$. Ezért

$$f*g(x)=\frac{\lambda\mu e^{-\mu x}}{\mu-\lambda}\left[e^{-(\lambda-\mu)u}\right]_0^x=\lambda\mu\frac{e^{-\lambda x}-e^{-\mu x}}{\mu-\lambda}\qquad \text{ha } x\geq 0 \text{ és } \lambda\neq\mu.$$

Megjegyzés: Vizsgáljuk meg, mit kapunk az $f_\lambda * g_\mu(x)$ sűrűségfüggvény értékeként, ha a λ számot fixáljuk, és $\mu\to\lambda$. Most az f és g sűrűségfüggvények helyett f_λ és g_μ függvényeket írunk, hogy jelezzük ezek függését a λ és μ paraméterektől.

Mivel rögzített $x>0$ számra

$$\lim_{\mu\to\lambda}\frac{e^{-\lambda x}-e^{-\mu x}}{\mu-\lambda}=-x\lim_{\mu\to\lambda}\frac{e^{-\lambda x}-e^{-\mu x}}{\lambda x-\mu x}=-x\left.\frac{d}{du}e^{-u}\right|_{u=\lambda x}=xe^{-\lambda x},$$

ezért $\lim\limits_{\mu\to\lambda} f_\lambda * g_\mu(x)=\lambda^2 xe^{-\lambda x}$, ha $x\geq 0$. Másrészt $\lim\limits_{\mu\to\lambda} f_\lambda * g_\mu(x)=0$, ha $x<0$. Ez, összehasonlítva az $f_\lambda * g_\lambda(x)$ konvolucióra kapott eredménnyel azt jelenti, hogy $\lim\limits_{\mu\to\lambda} f_\lambda * g_\mu(x)=f_\lambda * g_\lambda(x)$ minden x számra.

2.) $\mathrm{Cov}\,(\xi,\eta)=E\xi\eta-E\xi E\eta$, $E\xi\eta=\int xyf(x,y)\,dx\,dy$, $E\xi=\int xf(x,y)\,dx\,dy$ és $E\eta=\int yf(x,y)\,dx\,dy$.

$$\begin{aligned}E\xi\eta&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\infty}^{\infty} xyf(x,y)\,dx\,dy=\int_0^2 x\left(\int_0^1 f(x,y)y\,dy\right)dx\\&=\int_0^2 x\left(\int_0^{1-\frac{x}{2}} y\,dy\right)dx=\int_0^2 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-\frac{x}{2}}dx=\int_0^2 x\frac{\left(1-\frac{x}{2}\right)^2}{2}\,dx\\&=\int_0^2\left(\frac{x^3}{8}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\right)dx=\frac{1}{2}-\frac{8}{6}+1=\frac{1}{6},\end{aligned}$$

$$E\xi=\int_0^2\left(\int_0^{1-\frac{x}{2}} x\,dy\right)dx=\int_0^2\left(x-\frac{x^2}{2}\right)dx=2-\frac{8}{6}=\frac{2}{3},$$

$$\begin{aligned}E\eta&=\int_0^2\left(\int_0^{1-\frac{x}{2}} y\,dy\right)dx=\int_0^2\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-\frac{x}{2}}dx\\&=\int_0^2\frac{1-x+\frac{x^2}{4}}{2}\,dx=\frac{1}{3}-1+1=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Innen $\mathrm{Cov}\,(\xi, \eta) = \frac{1}{6} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{18}$.

3.) Vezessük be a következő X_i, $1 \le i \le 10$, valószínűségi változókat. $X_i = 1$, ha az i-ik húzásban két piros vagy két fehér golyót húztunk. Ekkor az $S = \sum\limits_{k=1}^{10} X_i$ véletlen összeg várható értékét és szórásnégyzetét kell kiszámolnunk. Ennek érdekében számoljuk ki először az EX_i, $\mathrm{Var}\,\xi_i$, és $\mathrm{Cov}\,(X_i, X_j)$, $i \ne j$, mennyiségeket. Tudjuk, hogy $EX_i = EX_1$, $\mathrm{Var}\,X_i = \mathrm{Var}\,X_1$, $\mathrm{Cov}\,(X_i, X_j) = \mathrm{Cov}\,(X_1, X_2)$ minden $1 \le i, j \le 10$, $i \ne j$ indexekre.

$EX_1 = P(X_1 = 1) = \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{13}{25}$, $EX_1^2 = P(X_1 = 1) = EX_1$, ahonnan $\mathrm{Var}\,X_1 = \frac{13}{25} - \left(\frac{13}{25}\right)^2 = \frac{156}{625}$. $\mathrm{Cov}\,(X_1, X_2) = EX_1X_2 - EX_1EX_2 = EX_1X_2 - (EX_1)^2$. Számoljuk ki az EX_1X_2 mennyiséget. $EX_1X_2 = P(X_1 = 1, X_2 = 1)$. Ez utóbbi valószínűség azon események valószínűségeinek az összege, hogy vagy (PP, PP) vagy (FF, FF) vagy (PP, FF) vagy (FF, PP) húzássorozat történik az első két húzásban. Az első húzássorozat valószínűsége $\left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \frac{2}{5}\frac{19}{49}$, a másodiké $\left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \frac{3}{5}\frac{29}{49}$, a harmadik és negyedik húzássorozat valószínűsége $\left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \frac{2}{5}\frac{20}{49}$ Innen $EX_1X_2 = \frac{8\cdot19+27\cdot29+2\cdot360}{125\cdot49} = \frac{1655}{125\cdot49}$. Ezért

$$\mathrm{Cov}\,(X_1, X_2) = \frac{1655}{125 \cdot 49} - \frac{169}{625} = \frac{8275 - 8281}{49 \cdot (25)^2} = -\frac{6}{49 \cdot (25)^2}.$$

Innen $ES = 10EX_1 = \frac{26}{5}$, $\mathrm{Var}\,S = 10\mathrm{Var}\,X_1 + 90\mathrm{Cov}\,(X_1, X_2) = \frac{312}{125} - \frac{108}{49\cdot125} = \frac{3036}{1225}$.

4.) Definiáljuk a következő Y_j valószínűségi változókat. $EY_j = 1$, ha a j-ik kártyát kihúzzuk, $Y_j = 0$ egyébként, $1 \le j \le 60$. Ekkor a keresett várható érték az $\sum\limits_{j=1}^{60} EY_j$ összeg, és $EY_j = P(Y_j = 1) = 1 - P(Y_j = 0)$, ahol $P(Y_j = 0)$ annak a valószínűsége, hogy a j-ik kártyát a 60 húzás során soha nem húzzuk ki. Annak a valószínűsége, hogy az első húzásban nem húzzuk ki ezt a kártyát $\frac{59}{60}$, annak hogy az első két húzás során nem húzzuk ki $\left(\frac{59}{60}\right)^2$, annak hogy az első három húzás során nem húzzuk ki $\left(\frac{59}{60}\right)^3$. Annak a valószínűsége, hogy az első négy húzás során nem húzzuk ki a j-ik kártyát $\left(\frac{59}{60}\right)^3 \frac{58}{59}$, mert a harmadik húzás után már csak 59 lap marad. Hasonlóan, annak a valószínűsége, hogy az első hat húzás során nem húzzuk ki ezt a lapot $\left(\frac{59}{60}\right)^3 \left(\frac{58}{59}\right)^3$, és így tovább érvelve a hatvanadik húzásig azt kapjuk, hogy $P(Y_j = 0) = \prod\limits_{i=0}^{19} \left(\frac{59-i}{60-i}\right)^3$. Ezért a keresett várható érték $\sum\limits_{j=1}^{60} (1 - P(Y_j = 0)) = 60 \left[1 - \prod\limits_{i=0}^{19} \left(\frac{59-i}{60-i}\right)^3\right]$.

5.) Jelölje ξ_j a j-ik ledobott pont értékét, $1 \le j \le 6000$, és legyen $\eta_j = f(\xi_j)$, ahol az $f(x)$, $0 \le x \le 3$, függvényt az $f(x) = x$, ha $0 \le x \le 1$, $f(x) = 1$, ha $1 \le x \le 2$, és $f(x) = 2$, ha $2 \le x \le 3$ képletekkel definiáljuk. Ekkor η_j a j-ik jegyzőkönyvbe írt szám értéke, és minket a $P\left(6940 \le \sum\limits_{j=1}^{6000} \eta_j \le 7080\right)$ valószínűség értéke érdekel.

Ennek kiszámítása érdekében számítjuk ki először az $E\eta_j$ és $\operatorname{Var}\eta_j$ mennyiségeket. $E\eta_j = \int_0^3 \frac{1}{3} f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{3} x\,dx + \frac{1}{3}(1+2) = \frac{1}{6} + 1 = \frac{7}{6}$, $E\eta_j^2 = \int_0^3 \frac{1}{3} f^2(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{3} x^2\,dx + \frac{1}{3}(1^2+2^2) = \frac{1}{9} + \frac{5}{3} = \frac{16}{9}$, és $\operatorname{Var}\eta_j = E\eta_j^2 - (E\eta_j)^2 = \frac{16}{9} - \frac{49}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$. Innen az $S = \sum\limits_{j=1}^{6000} \eta_j$ valószínűségi változóra $ES = 7000$, és $\operatorname{Var} S = 2500 = 50^2$. Ezért a centrális határeloszlástétel szerint

$$
\begin{aligned}
P\left(6940 \le \sum_{j=1}^{6000} \eta_j \le 7080\right) &= P\left(\frac{6940-7000}{50} \le \frac{S-ES}{\sqrt{\operatorname{Var} S}} \le \frac{7080-7000}{50}\right) \\
&= P\left(-1.2 \le \frac{S-ES}{\sqrt{\operatorname{Var} S}} \le 1.6\right) \sim \Phi(1.6) - \Phi(-1.2) \\
&= \Phi(1.6) + \Phi(1.2) - 1 \sim (0.9452 + 0.8849 - 1) \sim 0.83.
\end{aligned}
$$

6.) Akkor mondjuk, hogy a $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ véletlen vektor normális eloszlású, ha létezik olyan A $n \times n$ méretű mátrix és $b = (b_1, \dots, b)$ vektor (ezek nem függnek a véletlentől), hogy véve n darab független standard normális eloszlású $\eta_1, \dots, \eta_n$ valószínűségi változót, és definiálva az $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ véletlen vektort, az $\eta A + b$ véletlen vektor eloszlása megegyezik a $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ véletlen vektor eloszlásával.